EL ANALISIS DE ACTIVIDADES EN EL CAMPO FINANCIERO

INDICE DE MATERIAS

0. ANTECEDENTES

La programación lineal apenas ha traspasado los límites temporales impuestos a la mayoría de edad jurídica. Nació en 1935. Los primeros ensayistas sentaron sus bases metodológicas en alemán y en inglés a lo largo de ese año. La obra "Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums" contenía dos de esos trabajos básicos, "Uber eine Gleichunsysteme del mathematischen Oekonomie", de Wald, y "Uber ein Oekonomisschen Gleinchusystem und sine Veraligemeinerung des Bronwersohen Fixpuntsatzes", de Neuman. Por otra parte Weyl, con su monografía "Elementary Theorie der Konvexen Polyeder", aparecida en el volumen 7.° de la revista *Comentarii Mathematici Hervecisi*, y la publicación de las investigaciones de Leontief, en la *Review of Economic Statistic*, abrieron al mundo anglosajón el camino, ignorado hasta entonces, de estas nuevas técnicas; que tienen por objeto, al decir del doctor Kittel (1), "determinar las posibilidades de éxito en una tarea emprendida con las máximas garantías de predicción", mediante el trazado de modelos econométricos especiales.

La última guerra mundial planteó en gran escala problemas de organización general, de control, de rendimientos, etc., que fueron resueltos por medio de la "Operational Research", amplio conjunto de investigaciones modernas que en su metodología se sirven de la estadística en gran escala. Fueron implantadas por Wald y Blackelt en Inglaterra y por Shirley Quimby en los Estados Unidos, y comprenden la programación lineal como una de sus técnicas más útiles.

Una vez levantado el secreto de guerra, en 1945, se difundieron los avances experimentados por la investigación operativa durante la contienda y se aplicaron a las tareas de la paz. Wood y Dantzig publicaron en *Econométrica* los resultados de sus investigaciones en las fuerzas aéreas de los Estados Unidos. Y bajo la dirección de Koopmans vieron la luz en 1951 los importantes trabajos en equipo realizados en Chicago por la Cowlesse Commission for Research in Economics, base de partida de todos los trabajos posteriores.

(1) Citada en "Investigación operativa", Consejo de Investigaciones Científicas. Pto. Juan de la Cierva 1952.

Vencida por Dantzig la limitación que imponían los sistemas clásicos de lo que pudiéramos denominar "maximinización" condicionada de funciones, a las de tipo lineal, y conseguida la posibilidad de calcular el extremal de dichas funciones por criterios diversos como el del "simplex", de "relajación", de los "juegos ficticios", de "tablero de ajedrez", se pasó a la resolución de numerosos problemas prácticos concretos.

Ricorsa, Giardina, Longo, Dofman y muchos otros aplicaron la programación a la industria; Hitcheock y Vadnar al campo de los transportes; Arrow al de las ciencias sociales; Barankin al de las encuestas estadísticas, etc., etc. Y al hacerlo aportaron a su vez nuevos artificios, métodos y simplificaciones que desarrollaron las técnicas iniciales.

Pretendemos en el presente trabajo extender las aplicaciones de la Programación Lineal, también denominada Análisis de Actividades, al movedizo terreno financiero. Nos introducimos en él a través de las escotillas de la Bolsa para escudriñar en la rentabilidad de los valores que se contratan en ella y hallar combinaciones óptimas. No tenemos noticias de que, hasta la fecha, nadie haya abordado este campo con técnicas de programación, por lo que carecemos de documentación específica que nos sirva de antecedente inmediato. Como antecedentes mediatos tenemos las aplicaciones a otros sectores de la economía de las que antes hablamos, y las valiosas enseñanzas adquiridas en el Congreso de Econometría del año 1958, donde tuvimos ocasión de discutir y confrontar algunos puntos concretos de este trabajo.

1.1. Objeto del presente estudio

Se pretende conocer la rentabilidad efectiva de las acciones u obligaciones que se contratan en determinadas Bolsas, para elegir, entre los valores de más alto rendimiento y estabilidad, aquellos que sean más aconsejables para hacer una inversión de dinero en gran escala. Se trata, pues, de una inversión cuyo objetivo es alcanzar la máxima renta estable y no de prediciones para una especulación.

1.1.1.—*Supuestos previos.*

Consideramos dos supuestos previos al realizar la inversión:

1.° La renta o beneficios del capital invertido se consideran desde el punto de vista privado de la sociedad, empresa o persona física que los realiza y no desde el punto de vista de la economía de un país en conjunto.

2.° El inversionista, en principio, no acude a las ampliaciones de capital en los casos que éstas se produzcan, sino que se limita a vender sus "derechos de suscripción" y a cobrar su importe.

La limitación impuesta en este supuesto se acusa al plantear las funciones de rendimientos y costes que formaremos más adelante.

1.2. Introducción y método a seguir

Para poder abordar con garantías de éxito el problema planteado necesitamos conocer, ante todo, la renta efectiva neta de los valores que queremos comparar.

Y aquí encontramos la primera dificultad. Es curioso observar el hecho de que no hemos hallado ninguna publicación en la que se reflejen estos datos para el conjunto de las sociedades españolas. Existen, eso sí, multitud de series numéricas y de índices que sólo parcialmente computan la renta; puesto que en la mayoría de los casos tienen en cuenta exclusivamente el dividendo metálico repartido y a lo sumo, en las más completas, se descuentan de éste los impuestos a cargo del accionista.

No sirven, pues, para nuestro estudio unos cálculos donde raras veces se considera el líquido reportado por las ampliaciones de capital, que en muchas ocasiones suponen un beneficio superior al del propio dividendo. Para paliar esta carencia de información básica hemos tenido que construir los índices de renta efectiva adecuados que nos servirán de datos.

A partir de ellos abordaremos el problema en dos etapas sucesivas. En la primera —determinación del grupo de valores más rentables— ajustamos a las series cronológicas de índices de renta efectiva una curva o recta que nos indique su tendencia, y mediante un procedimiento mecánico separamos, de la totalidad de los valores considerados, aquellos que nos ofrezcan renta y estabilidad inferiores.

Efectuada esta selección nos quedará todavía un grupo de valores entre los que tendremos que elegir el programa más aconsejable para efectuar la inversión prevista. Con esa finalidad planteamos unas funciones de rendimiento y coste de las acciones que, debidamente programadas, nos darán la solución del supuesto. Como luego veremos, las funciones de "decisión" pueden reducirse a la forma lineal. Aplicaremos el método general de Dantzig para resolverlas y en su desarrollo teórico se nos presentarán numerosas simplificaciones y fórmulas de recurrencia que, una vez demostrada su validez, nos facilitarán su aplicación a casos concretos. De esta forma estaremos en condiciones de determinar no sólo los valores más beneficiosos y la cuantía de su renta en la combinación óptima, sino también los momentos o las épocas en que debe verificarse cada inversión parcial.

Aprovecharemos los números índices individuales de valores para formar otros índices de rentabilidad media por grupos de sociedades según la actividad a que se dedican preferentemente. La programación en este caso no tiene sentido, pero los índices nos proprocionan unos barómetros financieros muy estimables.

Vamos a dividir nuestro trabajo en cuatro partes o capítulos. En los tres primeros expondremos el desarrollo y la resolución teórica del problema. En la última aplicaremos el método trazado al estudio de un mercado concreto, las acciones de la Bolsa de Madrid.

Hemos de hacer constar que el método original empleado en este trabajo tiene absoluta generalidad. En su aspecto conceptual puede aplicarse al estudio de cualquier grupo de valores de renta variable o fija, se coticen o no oficialmente en el mismo o en distinto mercado, sean cuales fueren las nacionalidades de las acciones y de los organismos de contratación, así como el régimen jurídico al que estuvieren sometidos; siempre que sea posible computar la rentabilidad efectiva y, a efectos de utilidad práctica, las trabas impuestas a la adquisición de los valores sean superables.

2. DETERMINACION DEL GRUPO DE VALORES MAS RENTABLE

2.1. Concepto de renta efectiva de una acción que vamos a utilizar en el presente trabajo

Denominaremos renta efectiva de una acción a la corriente neta de bienes y servicios computables en unidades monetarias que produce aquel valor a su titular o titulares por el mero hecho de serlo —*en igualdad de condiciones con los demás poseedores de títulos* semejantes de la misma sociedad— durante el período de tiempo que comprende un ejercicio económico-rentable. Incluye, pues, esta definición en el concepto de renta efectiva los dividendos activos repartidos una vez deducido el impuesto de utilidades y el timbre; la prima por acción de asistencia a Juntas Generales deducidos los gastos que ha ocasionado el traslado *cuando dicha asistencia es* obligatoria o sin deducir cuando se admite la representación; los dividendos o "regalos" en especie como los pequeños contingentes de productos elaborados que suele repartir a sus accionistas la Compañía Arrendataria de Tabacos española; el beneficio neto o la parte alícuota de las nuevas acciones emitidas, en casos de aumento de capital, que se entrega, por debajo del precio de cotización, a cada acción antigua, y cuantas cantidades de dinero o bienes contribuyan a aumentar las arcas del accionista como tal.

Los cómputos de la parte de la renta por el concepto de servicios que recibe el accionista se refieren a todos aquellos que le corresponden por ser dueño de la acción y son susceptibles de valorar en dinero. Por ejemplo, el beneficio que recibe el accionista de una compañía de ferrocarriles al que se conceden por el hecho de serlo rebajas en el billete para la utilización del tren.

No se computarán en cambio el sueldo, primas de asistencia a Consejos, dietas, etc., que perciba un Gerente por su cargo, aunque para obtenerle haya necesitado poseer determinado número de acciones de la sociedad que dirige. Tampoco se tendrán en cuenta en general los derechos personales del accionista, como el del voto que no son en general computables, por tratarse de ventajas que normalmente no se pueden valorar en metálico.

2.1.2.

Nos parece oportuno, una vez delimitado el concepto de renta, analizar, siquiera sea en rasgos generales, la estructura del mercado en que los valores que estudiamos se contratan. Las bolsas son ejemplos típicos de mercado donde interviene una pluralidad de sujetos con deseo de comprar y vender. Siguiendo la clasificación de Castañeda (2) distinguiremos los distintos elementos que integran este tipo de mercado desde cuatro puntos de vista:

1.° *Relaciones externas.*—Prácticamente podemos considerar a la bolsa de valores mobiliarios como mercado libre en el que rige el principio de la libertad del cambio, puesto que existe autonomía en cuanto a cantidades y precios en las transacciones. La limitación que se impone en algunos países a determinados valores "de no ser transmisible a extranjeros" empaña ligeramente esa propiedad característica.

2.° *Contextura interna.*—Cada comprador conoce las propiedades de los vendedores y viceversa, puesto que tanto unos como otros anuncian sus ofertas a viva voz en los corros, a través de los agentes. Consideramos, pues, que la unicidad del precio existe en cada transacción y la fluidad no sufre rozamientos por el hecho de que el precio varíe en distintas operaciones a lo largo de la sesión; la dinámica de la bolsa es tan rápida que justifica esas variaciones.

3.° *Los elementos reales* no son homogéneos. Los títulos provienen de distintas sociedades con características diversas y, aun dentro de la misma sociedad, existen clases o series diferentes de acciones. En este sentido el mercado es, por lo tanto, imperfecto.

4.° Respecto a los *elementos personales* podemos considerar el mercado de valores como normal, ya que será muy difícil que un sujeto aislado pueda modificar los precios.

En resumen, estamos en presencia de mercados de competencia imperfecta, que se reparte en clientelas, pero cuya concurrencia es libre tanto en el sentido de existir muchos oferentes y demandan-

---

(2) "Lecciones de teoría económica", primera edición. Madrid 1947, páginas 328 y siguientes.

tes, como en el de tener acceso a él nuevos sujetos económicos que lo deseen. Es cierto, sin duda, que en ocasiones excepcionales pueden formarse coaliciones de empresas que llegarán a monopolizar algunos corros de valores, pero este hecho, en caso de darse, constituiría una anomalía y no podemos tenerlo en cuenta en el estudio presente.

2.2. Cálculo de la renta efectiva de una acción

Para determinarla emplearemos las siguientes notaciones:

c = cotización media de una acción durante un año.
d = dividendo en metálico de una acción.
d' = dividendo en especie de una acción.
p = prima neta de asistencia a juntas por acción.
V = valor en el mercado de una acción nueva emitida en casos de ampliación de capital.
n = número de derechos necesarios para adquirir dicha acción.
v = valor nominal de una acción "vieja".
v' = valor nominal de una acción "nueva".
p' = prima de emisión de acciones nuevas.
c' = cotización media de un "derecho de suscripción".
g = gastos de compra de una acción nueva.
g' = gastos de venta de un derecho.
u = contribución que grava el dividendo de una acción
u' = contribución sobre emisión de valores mobiliarios que grava una acción nueva.
f = otros ingresos netos que produce una acción durante el año.
ρ = renta efectiva de una acción.
r = renta efectiva de 100 pesetas invertidas.

Todos estos símbolos pueden referirse a una sociedad cualquiera J. Si les afectásemos de dos subíndices, expresarían el primero el año o la época a que corresponde el cálculo, y el segundo, la sociedad concreta de cuyo capital la acción es parte alícuota.

Efectuadas estas aclaraciones, podremos determinar la renta efectiva de una de sus acciones mediante la siguiente fórmula general:

$$\rho = d - u + d' + p + f + \begin{cases} + \dfrac{V - (v' + p' + g + u')}{n} & [I] \\ + c' - g' & [II] \end{cases}$$

Donde a la primera parte de la fórmula—términos a la izquierda de la llave—añadiremos la expresión [I]—parte superior de la derecha—cuando las nuevas acciones procedentes de suscripción se acumulen a las existentes; y añadiremos la diferencia [II]—parte inferior de la derecha—cuando se vendan los derechos de suscripción.

En el primer caso podemos distinguir tres apartados:

a) Si las nuevas acciones se entregasen totalmente liberadas, serían nulos, a efectos de nuestro cálculo, v', p' y u'.

b) Si se entregasen por su valor nominal dichas acciones, sólo tendríamos que descontar a V, v' y g.

c) Si se entregasen con prima y gastos por cuenta del accionista, se puede utilizar la fórmula completa.

Las rentas obtenidas tomando la fórmula con los términos de [I] o con los de [II] serán teóricamente equivalentes para una misma acción, puesto que la cotización de los cupones estará condicionada al juego de los sumandos de [I] en un mercado de libre concurrencia. Sin embargo, la existencia de clientelas, a las que antes aludimos, hace que en algunos momentos exista una pequeña diferencia real entre los dos cálculos. De todas formas, en la práctica, al menos en sentido tendencial, podemos considerarlas iguales. Las diferencias, en caso de existir, son insignificantes.

En el supuesto de que durante el año que efectuamos el estudio de una acción no haya habido ampliaciones de capital, podemos prescindir de los sumandos situados a la derecha de la llave, así como si se emitieran las nuevas acciones al precio de cotización de las antiguas con gastos a cargo de la sociedad.

El sumando f en la mayoría de las aplicaciones prácticas será cero. Pueden anularse también todos y cada uno de los sumandos situados a la izquierda de la llave. E incluso se puede dar el caso de que d sea negativo cuando una sociedad hubiese experimentado pérdidas que tienen que reponer los accionistas.

Con el fin de que sean comparables las rentas efectivas de las distintas acciones, nos conviene hallarlas en forma de porcentajes. Así plantearemos una sencilla regla de tres:

Si una acción cuyo valor efectivo es $\frac{c \cdot v}{100}$ produce ρ pesetas,

100 pesetas de dicho efectivo producirán r', donde

$$r' = \frac{100\,\rho}{\frac{c \cdot v}{100}} = \frac{10.000\,\rho}{c \cdot v} \text{ en } \% \text{ y } r' = \frac{\rho}{\frac{c \cdot v}{100}} \text{ en tanto por uno.}$$

2.3. Formación de porcentajes corregidos y de índices de renta efectiva

Supongamos que para valores de una sociedad J hemos obtenido los porcentajes de renta efectiva durante la serie de $n+1$ años 0, 1, 2, ..., n, que representaremos por

$$r'_{0j},\ r'_{1j},\ r'_{2j},\ \ldots\ldots,\ r'_{ij},\ \ldots\ldots,\ r'_{nj} \qquad [III]$$

Pero durante esos años ha variado el poder adquisitivo de la unidad monetaria y como consecuencia el de las rentas. A fin de homogeneizarlas tendremos que corregir las "erres primas" valiéndonos de los índices de precios al por mayor o los del coste de la vida tomados con base en el año 0 igual a 100. Si designamos a éstos por I_i—índice correspondiente al año i—, procederemos del siguiente modo. El porcentaje de renta efectiva de dicho año corregido r_{ij} será:

$$r_{ij} = \frac{r'_{ij} \cdot 100}{I_i}$$

Aplicando este procedimiento los porcentajes de [III] se nos transformarán en:

$$r_{0j}, r_{1j}, r_{2j}, \ldots, r_{ij}, \ldots, r_{nj}$$

Como la sociedad J puede ser una cualquiera de las m que constituyen nuestro estudio, asignando subíndices concretos a cada una de ellas $1, 2, \ldots, j, \ldots, m$ obtendremos los porcentajes de renta efectiva corregidos para las distintas sociedades y años que consideramos:

$$\begin{array}{l} r_{01}, r_{11}, \ldots, r_{i1}, \ldots, r_{n1} \\ r_{02}, r_{12}, \ldots, r_{i2}, \ldots, r_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{0j}, r_{1j}, \ldots, r_{ij}, \ldots, r_{nj} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{0m}, r_{1m}, \ldots, r_{im}, \ldots, r_{nm} \end{array} \qquad [IV]$$

donde cada fila representa los porcentajes de renta efectiva real proporcionada por las acciones de una sociedad a través de los $n+1$ años del período estudiado y cada columna los porcentajes de las distintas sociedades consideradas en el mismo año y referidos todos ellos al poder adquisitivo del año base.

2.3.1.

Podríamos aprovechar las series cronológicas [IV] para formar unos índices de renta efectiva real de valores de renta variable relacionando cada porcentaje de un año cualquiera i con el del año base o. Si designamos a este nuevo índice por φ, tendremos:

$$\varphi_{0j} = 100, \varphi_{1j} = \frac{r_{1j} \cdot 100}{r_{0j}}, \ldots, \varphi_{ij} = \frac{r_{ij} \cdot 100}{r_{0j}}, \ldots, \varphi_{nj} = \frac{r_{nj} \cdot 100}{r_{0j}}$$

Con lo que obtendríamos las series cronológicas de índices:

$$\begin{array}{l} \varphi_{01}, \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{0j}, \varphi_{1j}, \ldots, \varphi_{ij}, \ldots, \varphi_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{0m}, \varphi_{1m}, \ldots, \varphi_{im}, \ldots, \varphi_{nm} \end{array} \qquad [V]$$

Agrupando los índices [V] de varias sociedades afines, por cualquier procedimiento agregativo, obtendríamos otros índices de grupo de acciones —eléctricas, bancarias, etc.—, y con ellos, a su vez, el índice general. Todos ellos representarían la rentabilidad efectiva real y completa de los valores de renta variable, del mismo modo que las series de índices llamados "de renta líquida" definen sólo un aspecto parcial al computar solamente el dividendo en metálico de dichas acciones.

2.4. Ajuste de las series cronológicas de renta efectiva

Consideremos las series cronológicas de porcentajes de renta corregidos tal como han sido expuestos en [IV]. Puede ocurrir que los porcentajes de algunas series —filas— presenten grandes oscilaciones entre sí, dando rentas muy bajas y muy altas alternativamente. Debemos entonces eliminar dichas series, puesto que representan sociedades con poca estabilidad en sus negocios.

A cada una de las restantes series le ajustaremos entonces una línea que nos marcará la tendencia secular de la renta efectiva de las *acciones correspondientes a cada sociedad considerada.* El método de ajuste a emplear puede ser el conocido de "mínimos cuadrados", y la representación gráfica de las líneas de tendencia es aconsejable puesto que nos ayudará en nuestro cometido, como veremos en 2.5.

Hemos de hacer notar que en vez de partir de las series [IV] para hacer la eliminación previa y el ajuste, podríamos haber tomado como datos los números índices de [V], procediendo con ellos del mismo modo que en el caso anterior. El cambio de escala que supondría el empleo de los índices [V] con respecto a los porcentajes de [IV] no modifica en esencia los resultados finales que pretendemos conseguir.

2.5. Determinación mecánica del grupo de valores de renta más estable y elevada

Una vez que hemos ajustado las series indicadas en 2.4. y tenemos sus tendencias representadas gráficamente, procederemos a eliminar aquellas que mantengan dicha línea de tendencia marcadamente descendente o estacionaria, a no ser que su ordenada sea muy elevada, así como las que conservando ascendente su tendencia, tengan las ordenadas en el origen más bajas.

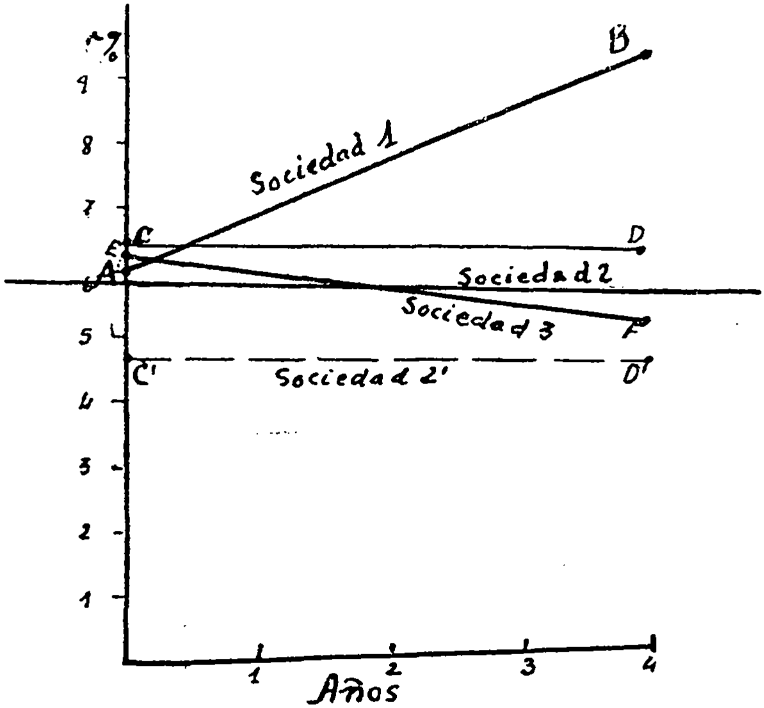


Fig 1

Supongamos que en la figura 1 tenemos dibujadas las líneas de tendencia de tres sociedades. La rentabilidad de la primera viene dada por la recta AB, que es ascendente. La de la segunda, por CD, que permanece estacionaria, pero con ordenada en el origen más alta que la de la primera. Y por último, la recta EF, que nos indica que la tercera sociedad considerada reparte rentas cada vez menores a sus accionistas. Siguiendo la regla dada en el párrafo anterior deberemos eliminar solamente la tercera sociedad. Si la tendencia de la segunda, en vez de ser CD, estuviera representada por otra recta de menor ordenada, tal como la C'D', procederíamos a eliminarla igualmente.

El alcance que debe darse en cada caso particular a este procedimiento de eliminación dependerá del grado más o menos elevado y del comportamiento a través del tiempo de la renta media de los valores que se consideren. Si el grupo estudiado tiene alta rentabilidad media deberemos elegir una ordenada en el origen alta para eliminar las series que vayan por debajo de ella. Si dicha rentabilidad fuese en general baja, tendríamos que aminorarla.

La finalidad del procedimiento estriba en separar del conjunto de valores que teníamos al principio aquellos que se muestran claramente incompatibles con la finalidad perseguida en este trabajo, que de no ser excluídos harían mucho más laboriosa la programación de los restantes que vamos a estudiar en la sección siguiente.

Además, las líneas de tendencia nos servirán para obtener por extrapolación los valores de las "erres" en años próximos futuros, es decir, que nos determinarán la rentabilidad efectiva esperada de las acciones que manejamos y que nos serán precisos para aconsejar inversiones futuras, como veremos en 3.3. al plantear las funciones de decisión.

Juzgamos de gran interés efectuar un estudio de los movimientos cíclicos y estacionales de las series de "erres" si se pretenden hacer "pronósticos", así como establecer contrastes no paramétricos de aleatoriedad para la tendencia y para los ciclos si son cortas dichas series o si, por la información que poseemos, no podemos, *a priori*, suponer una forma de distribución de tipo conocido.

3. PROGRAMACION DEL GRUPO DE VALORES DETERMINADO ANTERIORMENTE PARA ELEGIR ENTRE ELLOS LOS MAS ACONSEJABLES

Una vez eliminados por el procedimiento expuesto en 2. los valores menos aconsejables para efectuar la inversión prevista nos quedará un grupo más o menos numeroso de ellos, entre los que por la proximidad de sus tendencias o por las alternativas diversas que éstas presentan nos será difícil escoger sin un detenido estudio previo. Recurriremos, pues, a la programación del grupo de acciones que pasó el primer filtro para determinar con bastante precisión los valores más idóneos que cumplen la finalidad propuesta. Al mismo tiempo nos indicará la programación las épocas precisas en las que debemos realizar las inversiones parciales para obtener la combinación óptima de renta.

Nos veremos precisados a plantear unas funciones de rentabilidad y coste de los valores en los próximos apartados de la presente sección, que nos permitirán decidir. Tanto en unas como en otras emplearemos como unidad de cálculo la monetaria del país que consideremos computada por su valor adquisitivo en el año base. Si se operase con valores de distintas nacionalidades, se tomaría la unidad monetaria de uno cualquiera de ellos, trasladándose las de los demás a ésta.

3.1. Formación de las funciones de rendimiento de los valores

Entendemos por rendimiento o rentabilidad de un grupo de acciones durante un período de tiempo determinado la suma de rentas efectivas —tomadas en el sentido indicado en 2.1.— que han producido esos valores a lo largo del tiempo considerado y medidas en unidades monetarias del año base. Se considera que todas las inversiones se hacen al comenzar el ejercicio contable correspondiente y que las rentas se cobran al final de dicho año.

3.1.1.

Empezaremos computando la rentabilidad de una acción adquirida en el año base. A lo largo del período de n + 1 años habrá producido

$$\frac{c_{0j} \cdot v}{100} r_{0j} + \frac{c_{0j} \cdot v}{100} r_{1j} + \dots + \frac{c_{0j} \cdot v}{100} r_{nj} =$$

$$= \frac{c_{0j} \cdot v}{100} (r_{0j} + r_{1j} + \dots + r_{nj}) \qquad [VI]$$

es decir, la suma de las rentas que la acción produce cada año. En el porcentaje r_{ij} va implícita la corrección debida a posibles cambios del poder adquisitivo de la moneda, por lo que al multiplicarse por el otro factor queda todo el producto referido al año base.

Si designamos por λ_{0j} el número de acciones de la sociedad J, que adquirimos en el citado año base, pueden ocurrir dos casos:

a) Que todas las acciones tengan el mismo valor nominal y pertenezcan a una sola serie o a varias, pero con idénticas características. Su rendimiento total R_{0j} será entonces,

$$R_{0j} = \frac{c_{0j} \cdot v}{100} (r_{0j} + r_{1j} + \ldots + r_{nj}) \lambda_{0j}. \qquad [VII]$$

Fórmula que podremos simplificar si $v = 500$ pts. —caso muy frecuente en la práctica, en España— y nos dará

$$R_{0j} = 5\, c_{0j} (r_{0j} + \ldots + r_{nj}) \lambda_{0j}. \qquad [VIII]$$

b) Que las ecuaciones pertenezcan a series distintas con nominales o características diferentes. En este supuesto designaremos por

$v_1, v_2, \ldots, v_l, \ldots, v_s$	los diversos nominales.
${}^1r_{0j}, {}^2r_{0j}, \ldots, {}^lr_{0j}, \ldots, {}^sr_{0j}$	sus correspondientes rentas.
${}^1\lambda_{0j}, {}^2\lambda_{0j}, \ldots, {}^l\lambda_{0j}, \ldots, {}^s\lambda_{0j}$	el número de acciones adquiridas de cada clase.
${}^1c_{0j}, {}^2c_{0j}, \ldots, {}^lc_{0j}, \ldots, {}^sc_{0j}$	sus cotizaciones.

tendremos:

$$R_{0j} = \frac{{}^1c_{0j} \cdot v_1}{100} ({}^1r_{0j} + \ldots + {}^1r_{nj})\, {}^1\lambda_{0j} + \ldots + \frac{{}^sc_{0j} \cdot v_1}{100} ({}^sr_{0j} +$$

$$+ \ldots + {}^sr_{nj})^{s\lambda oj} = \sum_{l=1}^{s} \frac{{}^lc_{0j} \cdot v_1}{100} \left(\sum_{i=0}^{n} {}^lr_{ij} \right) {}^l\lambda_{0j} \qquad [IX]$$

3.1.2.

Consideremos ahora el rendimiento de las acciones de la sociedad J adquiridas en el año *i*. Debemos tener en cuenta al hacerlo que solamente nos producen renta a partir de ese año y en los siguientes. De ese modo las fórmulas [VI], [VII], [VIII] y [IX] se nos transformarán en las [X], [XI], [XII] y [XIII] para los casos correspondientes a los considerados en ellas.

Rentas que produce una acción adquirida al principio del año *h*

$$\frac{c_{hj} \cdot v}{100} r_{hj} + \frac{c_{hj} \cdot v}{100} r_{h+1,j} + \ldots\ldots + \frac{c_{hj} \cdot v}{100} r_{nj} =$$

$$= \frac{c_{hj} \cdot v}{100} (r_{hj} + r_{h+1,j} + \ldots\ldots + r_{nj} = \frac{c_{hj} \cdot v}{100} \sum_{i=h}^{n} r_{ij} \qquad [X]$$

Designando por λ_{hj} al número de acciones que se han adquirido a principios del año h, podremos expresar su réndimiento por

$$R_{hj} = \frac{c_{hj} \cdot v}{100} (r_{hj} + r_{h+1,j} + \ldots + r_{nj}) \lambda_{hj} \qquad [XI]$$

cuando todas las acciones tomadas tienen el mismo valor nominal Si además éste fuera de 500 ptas., la fórmula se simplificaría del siguiente modo:

$$R_{hj} = 5c_{hj} (r_{hj} + r_{h+1,j} + \ldots\ldots + r_{nj}) \lambda_{hj} \qquad [XII]$$

Si pertenecieran a distintas series con diferentes características tendremos

$$R_{hj} = \frac{{}^{1}c_{hj} \cdot v_1}{100} ({}^{1}r_{hj} + {}^{1}r_{h+j,j} + \ldots + {}^{1}r_{hj}) \lambda_{hj} + \ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \frac{{}^{s}c_{hj} \cdot v_s}{100} ({}^{s}r_{hj} + \ldots + {}^{s}r_{nj}) {}^{s}\lambda_{hj} = \sum_{l=1}^{s} \frac{{}^{l}c_{hj} \cdot v_l}{100} {}^{l}\lambda_{hj} \left(\sum_{l=h}^{n} r_{tj} \right) [XIII]$$

cuyos símbolos tienen la misma significación que los de 3.1.1. referidos al año *h* en vez de al año base 0.

3.1.3.

Demos un paso más en la formación de las funciones de rendimiento. Consideremos los valores de renta variable que de una sociedad cualquiera J hemos ido adquiriendo al cabo de los años 0, 1, ..., n. El rendimiento de todos ellos vendrá expresado por la suma de las rentas obtenidas con los valores que tomamos cada año.

Si las acciones son del mismo nominal, el rendimiento R_j proporcionado por todos los valores adquiridos de la sociedad J será:

$$R_j = \frac{c_{0j} \cdot v}{100}(r_{0j} + \dots + r_{nj})\,\lambda_{0j} + \frac{c_{1j} \cdot v}{100}(r_{1j} + \dots + r_{nj})\,\lambda_{1j} + \dots + \frac{c_{hj} \cdot v}{100}(r_{hj} + \dots + r_{nj})\,\lambda_{hj} + \dots + \frac{c_{nj} \cdot v}{100} r_{nj} \cdot \lambda_{nj} = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_{ij} \cdot v}{100}\lambda_{ij}\left(\sum_{i=h}^{n} r_{ij}\right) \qquad [XIV]$$

donde haciendo

$$\alpha_{hj} = \frac{c_{hj} \cdot v}{100} \sum_{i=h}^{n} r_{ij} \qquad (\text{para } i = 0, 1, \dots, h, \dots, n) \qquad [XV]$$

y dando valores se nos convertirá la expresión [XIV] en la siguiente:

$$R_j = \alpha_{0j}\lambda_{0j} + \alpha_{1j}\lambda_{1j} + \dots + \alpha_{ij}\lambda_{ij} + \dots + \alpha_{nj}\lambda_{nj} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij}\lambda_{ij}. \qquad [XVI]$$

Si las acciones estuviesen diversificadas en varias series de características diferentes,

$$R_j = \frac{{}^1c_{0j} \cdot v_1}{100}({}^1r_{0j} + \dots + {}^1r_{nj})\,{}^1\lambda_{0j} + \frac{{}^2c_{0j} \cdot v_2}{100}({}^2r_{0j} + \dots + {}^2r_{nj})\,{}^2\lambda_{0j} + \dots + \frac{{}^sc_{0j} \cdot v_s}{100}({}^sr_{0j} + \dots + {}^sr_{nj})\,{}^s\lambda_{0j} + \frac{{}^1c_{1j} \cdot v_1}{100}({}^1r_{1j} + \dots + {}^1r_{nj})\,{}^1\lambda_{1j} + \dots + \frac{{}^sc_{1j} \cdot v_s}{100}({}^sr_{1j} + \dots + {}^sr_{nj})\,{}^s\lambda_{1j} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$+ \frac{{}_1c_{hj} \cdot v_1}{100} ({}^1r_{hj} + {}^1r_{h+1,j} + \dots + {}^1r_{nj})\, {}^1\lambda_{hj} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$+ \frac{{}^sc_{hj} \cdot v_s}{100} ({}^sr_{hj} + \dots + {}^sr_{nj})\, {}^s\lambda_{hj} + \dots\dots\dots + \frac{{}^1c_{nj} \cdot v_1}{100}\, {}^1r_{nj}\, {}^1\lambda_{nj} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots + \frac{{}^sc_{nj} \cdot v_s}{100}\, {}^sr_{nj}\, {}^s\lambda_{nj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \sum_{i=0}^{n} \frac{{}^lc_{ij} \cdot v_l}{100}\, {}^l\lambda_{ij} \left(\sum_{i=h}^{n} {}^lr_{ij} \right) \qquad [XVII]$$

o bien haciendo

$${}^f\alpha_{hj} = \frac{{}^fc_{hj} \cdot v_f}{100} \sum_{i=h}^{n} {}^fr_{ij} \qquad [XVIII]$$

donde el superíndice indica las series o variedad 1, 2, ... f ... s, a la que pertenecen las acciones dentro de una misma sociedad y no tienen por qué coincidir las características de los valores que llevan el mismo superíndice en distinta sociedad; sustituyendo, la expresión [XVII] tomará la forma:

$$R_j = {}^1\alpha_{0j}\, {}^1\lambda_{0j} + {}^2\alpha_{0j}\, {}^2\lambda_{0j} + \dots\dots + {}^l\alpha_{0j}\, {}^l\lambda_{0j} + \dots\dots + {}^s\alpha_{0j}\, {}^s\lambda_{0j} +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$

$$+ {}^1\alpha_{nj}\, {}^1\lambda_{nj} + \dots\dots + {}^l\alpha_{nj}\, {}^l\lambda_{nj} + \dots\dots + {}^s\alpha_{nj}\, {}^s\lambda_{nj} = \qquad [XXI]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\alpha_{ij}\, {}^l\lambda_{ij}$$

3.1.4.

Por último, supongamos que, en vez de adquirir solamente acciones de una sociedad, las tomamos de varias, de las m sociedades 1, 2, ... m. Dando entonces esos valores sucesivamente a j en la fórmula [XVI], obtendremos sus respectivos rendimientos para acciones del mismo nominal dentro de cada sociedad:

$$R_1 = \alpha_{01}\lambda_{01} + \alpha_{11}\lambda_{11} + \dots + \alpha_{i1}\lambda_{i1} + \dots + \alpha_{n1}\lambda_{n1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i1}\lambda_{i1}$$

....

$$R_j = \alpha_{0j}\lambda_{0j} + \alpha_{1j}\lambda_{1j} + \dots + \alpha_{ij}\lambda_{ij} + \dots + \alpha_{nj}\lambda_{nj} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij}\lambda_{ij}$$

....

$$R_m = \alpha_{0m}\lambda_{0m} + \alpha_{1m}\lambda_{1m} + \dots + \alpha_{im}\lambda_{im} + \dots + \alpha_{nm}\lambda_{nm} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{im}\lambda_{im}$$

[XX]

donde

$$i = (0, 1, 2, \dots, h, \dots, n)$$
$$j = (1, 2, \dots\dots, k, \dots, m)$$
$$\lambda_{ij} \geqq 0$$

El rendimiento total R, que produce al inversionista todos los valores adquiridos, será la suma de los rendimientos de las acciones de cada una de las sociedades, es decir,

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i1}\lambda_{i1} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i2}\lambda_{i2} + \dots + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{im}\lambda_{im} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij}\lambda_{ij} \qquad \text{[XXI]}$$

Para acciones de características distintas dentro de cada sociedad la fórmula [XIX] se convierte en

$$R_1 = {}^1\alpha_{01}\,{}^1\lambda_{01} + \dots + {}^s\alpha_{01}\,{}^s\lambda_{01} + \dots\dots + {}^1\alpha_{11}\,{}^1\lambda_{11} + \dots\dots +$$

$$+ {}^s\alpha_{i1}\,{}^s\lambda_{i1} + \dots + {}^1\alpha_{n1}\,{}^1\lambda_{n1} + \dots + {}^s\alpha_{n1}\,{}^s\lambda_{n1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\alpha_{i1}\,{}^l\lambda_{i1}$$

....

$$R_j = {}^1\alpha_{0j}\,{}^1\lambda_{0j} + \dots + {}^s\alpha_{0j}\,{}^s\lambda_{0j} + \dots\dots + {}^1\alpha_{ij}\,{}^1\lambda_{ij} + \dots\dots +$$

$$+ {}^s\alpha_{ij}\,{}^s\lambda_{ij} + \dots + {}^1\alpha_{nj}\,{}^1\lambda_{nj} + \dots + {}^s\alpha_{nj}\,{}^s\lambda_{nj} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\alpha_{ij}\,{}^l\lambda_{ij}$$

....

[XXII]

$$R_m = {}^1\alpha_{0m}\,{}^1\lambda_{0m} + \dots + {}^s\alpha_{0m}\,{}^s\lambda_{0m} + \dots\dots + {}^1\alpha_{im}\,{}^1\lambda_{im} + \dots\dots +$$

$$+ {}^s\alpha_{im}\,{}^s\lambda_{im} + \dots + {}^1\alpha_{nm}\,{}^1\lambda_{nm} + \dots + {}^s\alpha_{nm}\,{}^s\lambda_{nm} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\alpha_{im}\,{}^l\lambda_{im}$$

donde

$$i = (0, 1, 2, \dots, i, \dots, h, \dots, n)$$
$$j = (1, 2, \dots\dots, j, \dots, k, \dots, m)$$
$$l = (1, 2, \dots\dots, f, \dots, l, \dots, s)$$
$$\lambda_{ij} \geqq 0$$

puesto que el número de valores adquiridos de determinada clase y sociedad puede ser nulo, pero nunca negativo.

Los ${}^l\alpha_{ij}$ serán en general positivos, aunque puede darse el caso de que existiera excepcionalmente alguno negativo o nulo cuando la sociedad correspondiente hubiera experimentado pérdidas o no tuviese beneficios durante el año para la clase estudiada, posibilidad que ya indicamos en 2.2. Pero de ser así, lo más probable es que no pasara el filtro del método mecánico de selección utilizado en 2.5. Pero si a pesar de todo pasó esa selección, se trata sin duda de un año excepcional que no sigue la marcha de la serie. Entonces sustituiremos esa cifra negativa por la teórica que se deduzca de la tendencia, que en ese caso será mucho más significativa de la dirección general del negocio. Al pasar a la fórmula serán, pues, siempre positivos. Su cálculo puede efectuarse a partir de las fórmulas [XV] o [XVIII] y nos darán números enteros o decimales, que serán los coeficientes de las variables ${}^l\lambda_{ij}$. Dichas variables pueden tomar teóricamente cualquier valor positivo o nulo, pero en la práctica tenemos que considerarlos como números enteros forzando la cifra por exceso o por defecto, ya que no tendría sentido adquirir fracciones de acción.

El rendimiento total R será en este caso

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_j + \dots + R_m = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha_{i1}\, {}^{l}\lambda_{i1} + \dots +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha_{im}\, {}^{l}\lambda_{im} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij} \qquad \text{[XXIII]}$$

3.1.5.

Si en la fórmula XVII dividimos cada suma entre paréntesis de su desarrollo (${}^{f}r_{hj} + {}^{f}r_{h+1,j} + \dots + {}^{f}r_{n,j}$) por $n + 1 - h$ (número de años que transcurren desde que se hizo la inversión hasta el final del período considerado) y hacemos

$${}^{f}\alpha'_{hj} = \frac{{}^{f}c_{hj} \cdot v_f}{100} \cdot \frac{\sum_{i=h}^{n} {}^{f}r_{ij}}{n + 1 - h} \qquad \text{[XVIII bis]}$$

(donde el sumatorio expresa rendimientos promedios anuales por cada peseta invertida —si r va en tanto por 1 y de cada 100 pesetas si r va en tanto por ciento— a lo largo del período de $n + 1 - h$ años), obtendremos los rendimientos medios R'_j para cada Sociedad a lo largo del período,

$$R'_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij} \qquad \text{[XIX bis]}$$

y el rendimiento promedio total R' para el conjunto de la inversión,

$$R' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij} \qquad \text{[XXIII bis]}$$

3.1.5.1.

En el caso particular de que todas las acciones tuviesen el mismo valor nominal

$$\alpha'_{hj} = \frac{c_{hj} \cdot v}{100} \cdot \frac{\sum\limits_{i=h}^{n} r_{ij}}{n + 1 - h} \qquad \text{[XV bis]}$$

y los respectivos rendimientos promedios serían,

$$R'_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij} \lambda_{ij}$$

$$R' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij} \lambda_{ij} . \qquad \text{[XXI bis]}$$

Los coeficientes α' tienen el mismo campo de variación, en sus valores, que las α.

En resumen, de todo lo expuesto en el presente apartado, sacamos la consecuencia de que el rendimiento o la rentabilidad efectiva neta, global o promedia, de las acciones en las que invertimos es una función lineal de unos coeficientes que indican la rentabilidad por acción y de unas variables que representan el número de valores que adquirimos de cada clase. Es decir, que

$$R = \xi(\alpha, \lambda)$$

donde α es el coeficiente y λ la variable.

3.2. Creación de las funciones de coste

Consideraremos como coste de una acción, o grupo de acciones, la cantidad total que hemos tenido que desembolsar para adquirirlas. Los gastos de conservación —derechos de depósito y custodia, administración, etc.— no serán tenidos en cuenta, por estimar que, o no afectan intrínsecamente a la renta puesto que son potestativos del titular y dependen de su comodidad y preparación, o son tan pequeños que el error cometido al no considerarlos es despreciable para nuestra finalidad.

En la formación de las funciones de coste seguiremos un proceso de generalización progresiva análogo al empleado en 3.1. al construir las de rendimiento.

El coste de una acción de la sociedad J adquirida el año base 0, será

$$\frac{c_{0j} \cdot v}{100} + g_{0j} \qquad \text{[XXIV]}$$

donde c_{0j} y v tienen la misma significación que en los apartados anteriores y g_{0j} representa los gastos de compra del valor —póliza, timbre y derechos de Agente.

Análogamente, una acción adquirida el año i tendrá un coste de

$$\frac{c_{ij} \cdot v}{100} + g_{ij} \qquad \text{[XXV]}$$

Pero las funciones de rendimiento han sido computadas en poder adquisitivo del año base. Para efectuar correctamente la comparación, debemos referir el coste a esa misma época. Para ello y puesto que en la formación de [XXV] no interviene ningún factor que lleve implícita la corrección necesaria, tendremos que multiplicar por $\frac{100}{I_i}$ la expresión [XXV], donde I_i representa el índice de precios al por mayor o el del coste de la vida del año i, siendo el del año base igual a 100.

El coste de los λ_{ij} valores de la Sociedad J, adquiridos el año i, será entonces en unidades monetarias del año base

$$C_{ij} = \left[\left(\frac{C_{ij} \cdot v}{100} + g_{ij} \right) \frac{100}{I_j} \right] \lambda_{ij} \quad , \qquad \text{[XXVI]}$$

si todos tienen el mismo nominal.

Y si las características fueran distintas y sus nominales $v_1, \ldots\ldots, v_s$, aplicaríamos:

$$C_{ij} = \left[\left(\frac{c_{ij} \cdot v_1}{100} + {}^1g_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \right] {}^1\lambda_{ij} + \ldots +$$

$$+ \left[\left(\frac{{}^sc_{ij} \cdot v_s}{100} + {}^sg_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \right] {}^s\lambda_{ij} \qquad [XXVII]$$

donde el superíndice indica la clase a la que pertenecen los valores dentro de la Sociedad J.

3.2.1.

El Coste C_j de las acciones de la Sociedad J adquiridas en los sucesivos años 0, 1, 2, ..., *i*, ..., *n* del período considerado será:

a) Si todas tienen las mismas características y valor nominal,

$$C_j = \left[\left(\frac{c_{0j} \cdot v}{100} + g_{0j} \right) \frac{100}{I_0} \right] \lambda_{0j} +$$

$$+ \left[\left(\frac{c_{1j} \cdot v}{100} + g_{1j} \right) \frac{100}{I_1} \right] \lambda_{1j} + \ldots +$$

$$+ \left[\left(\frac{c_{nj} \cdot v}{100} + g_{ij} \right) \frac{100}{I_n} \right] \lambda_{nj} \qquad [XXVIII]$$

donde haciendo

$$\beta_{ij} = \left(\frac{c_{ij} \cdot v}{100} + g_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \qquad [XXIX]$$

obtenemos [XXVII] en forma abreviada

$$C_j = \beta_{0j} \lambda_{0j} + \beta_{1j} \lambda_{1j} + \ldots\ldots + \beta_{ij} \lambda_{ij} + \ldots\ldots + \beta_{nj} \lambda_{nj} \lambda_{nj} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} \lambda_{ij} \qquad [XXX]$$

b) En el caso de que las acciones estén diversificadas en distintas series de características diferentes

$$
\begin{aligned}
C_j = {} & \left[\left(\frac{{}^{1}c_{0j} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{0j} \right) \frac{100}{I_0} \right] {}^{1}\lambda_{0j} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{1}c_{0j} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{0j} \right) \frac{100}{I_0} \right] {}^{1}\lambda_{0j} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{s}c_{0j} \cdot v_s}{100} + {}^{s}g_{0j} \right) \frac{100}{I_0} \right] {}^{s}\lambda_{0j} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{1}c_{ij} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \right] {}^{1}\lambda_{ij} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{1}c_{ij} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \right] {}^{1}\lambda_{0j} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{s}c_{ij} \cdot v_s}{100} + {}^{s}g_{ij} \right) \frac{100}{I_i} \right] {}^{s}\lambda_{ij} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{1}c_{nj} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{nj} \right) \frac{100}{I_n} \right] {}^{1}\lambda_{nj} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{1}c_{nj} \cdot v_1}{100} + {}^{1}g_{nj} \right) \frac{100}{I_n} \right] {}^{1}\lambda_{nj} + \ldots + \\
& + \left[\left(\frac{{}^{s}c_{nj} \cdot v_s}{100} + {}^{s}g_{nj} \right) \frac{100}{I_n} \right] {}^{s}\lambda_{nj}
\end{aligned}
$$

o bien haciendo

$$^{l}\beta_{ij} = \left(\frac{c_{ij} \cdot v_l}{100} + g_{ij} \right) \frac{100}{I_l} \qquad \text{[XXXI]}$$

obtendremos

$$\begin{aligned} C_j = {} & {}^{1}\beta_{0j}\,{}^{1}\lambda_{0j} + {}^{2}\beta_{0j}\,{}^{2}\lambda_{0j} + \dots + {}^{l}\beta_{0j}\,{}^{l}\lambda_{0j} + \dots + {}^{s}\beta_{0j}\,{}^{s}\lambda_{0j} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + {}^{1}\beta_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots\dots\dots + {}^{l}\beta_{ij}\,{}^{l}\lambda_{ij} + \dots\dots\dots + {}^{s}\beta_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + {}^{1}\beta_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots\dots\dots + {}^{l}\beta_{nj}\,{}^{l}\lambda_{nj} + \dots\dots\dots + {}^{s}\beta_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} = \\ & = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij}\,{}^{l}\lambda_{ij}. \qquad \text{[XXXII]} \end{aligned}$$

3.2.2

Si hacemos ahora variar a j desde 1 hasta m, en las fórmulas [XXX] y [XXXII] podremos representar los costes de los valores adquiridos de esas m sociedades durante los $n + 1$ años del período.

Así para el caso de que todas las acciones tengan el mismo valor nominal, obtendremos:

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta_{01}\,\lambda_{01} + \dots + \beta_{i1}\,\lambda_{i1} + \dots + \beta_{n1}\,\lambda_{n1} = \sum_{i=0}^{n} \beta_{i1}\,\lambda_{i1} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_j &= \beta_{0j}\,\lambda_{0j} + \dots + \beta_{ij}\,\lambda_{ij} + \dots + \beta_{nj}\,\lambda_{nj} = \sum^{n} \beta_{ij}\,\lambda_{ij} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{[XXXIII]} \\ C_m &= \beta_{0m}\,\lambda_{0m} + \dots + \beta_{im}\,\lambda_{im} + \dots + \beta_{nm}\,\lambda_{nm} = \sum_{i=0}^{n} \beta_{im}\,\lambda_{im}. \end{aligned}$$

La suma de todas las C_{vj} os dará el coste total C de las acciones de las m sociedades distintas que adquirimos en los $n + 1$ años sucesivos, es decir, que

$$C = C_1 + \dots + C_m = \sum_{j=1}^{m} C_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij}\,\lambda_{ij} \qquad \text{[XXXIV]}$$

Cuando las acciones pertenecen a distintas series dentro de la misma sociedad con características diferentes para cada una de ellas, obtendremos:

$$\begin{aligned} C_1 = {} & {}^{1}\beta_{01}\,{}^{1}\lambda_{01} + \dots + {}^{s}\beta_{01}\,{}^{s}\lambda_{01} + {}^{1}\beta_{11}\,{}^{1}\lambda_{11} + \dots + {}^{s}\beta_{11}\,{}^{s}\lambda_{11} + \\ & + \dots + {}^{1}\beta_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + {}^{s}\beta_{i1}\,{}^{s}\lambda_{i1} + \dots + {}^{1}\beta_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + \\ & + {}^{s}\beta_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{i1}\,{}^{l}\lambda_{i1} \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} C_j = {} & {}^{1}\beta_{0j}\,{}^{1}\lambda_{0j} + \dots + {}^{s}\beta_{0j}\,{}^{s}\lambda_{0j} + {}^{1}\beta_{1j}\,{}^{1}\lambda_{1j} + \dots + {}^{s}\beta_{1j}\,{}^{s}\lambda_{1j} + \\ & + \dots + {}^{1}\beta_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + {}^{s}\beta_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \dots + {}^{1}\beta_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + \\ & + \dots + {}^{s}\beta_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij}\,{}^{l}\lambda_{ij} \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} C_m = {} & {}^{1}\beta_{0m}\,{}^{1}\lambda_{0m} + \dots + {}^{s}\beta_{0m}\,{}^{s}\lambda_{0m} + {}^{1}\beta_{1m}\,{}^{1}\lambda_{1m} + \dots + {}^{s}\beta_{1m}\,{}^{s}\lambda_{1m} + \\ & + \dots + {}^{1}\beta_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + {}^{s}\beta_{im}\,{}^{s}\lambda_{im} + \dots + {}^{1}\beta_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + \\ & + {}^{s}\beta_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{im}\,{}^{l}\lambda_{im} \end{aligned}$$

donde los superíndices y subíndices 1, 2, 3, ..., l, ..., s designan las distintas variedades dentro de cada sociedad independientemente, sin que esto quiera decir que la variedad 3, por ejemplo, de las acciones de la empresa 1 tenga que tener las mismas características que la variedad 3 de los valores de la sociedad 2, o de cualquiera de las otras. En general, esas características serán diferentes.

Por otra parte,

$i = (0, 1, \dots, l, \dots, n), n + 1$ años
$j = (1, 2, \dots, j, \dots, m)$, m sociedades
$l = (1, 2, \dots, l, \dots, s)$, s variedades cada sociedad.

$${}^{l}\lambda_{ij} \geq 0$$

Los coeficientes ${}^{l}\beta_{ij}$, que representan el coste de una acción computado en unidades monetarias del año base, serán esencialmente positivos.

El coste total de todos los valores que hemos ido adquiriendo durante los $n+1$ años de las distintas m sociedades cuando cada una de éstas tiene diversificadas sus acciones en s variedades, será

$$C = \sum_{j=1}^{m} C_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij} \, {}^{l}\lambda_{ij} . \qquad [XXXVI]$$

De todo lo dicho se desprende que las funciones de coste de las acciones que intervienen en la inversión pueden ponerse en forma lineal. El coste total viene, pues, expresado en función de un coeficiente que representa el coste unitario por acción y de una variable que indica el número de acciones adquiridas, es decir

$$C - \psi(\beta, \lambda) .$$

3.3. Planteamiento de las funciones de decisión

Partiendo de las funciones de rendimiento y coste desarrolladas en 3.1. y 3.2., estamos en condiciones de plantear las de decisión. Pero antes de hacerlo nos parece oportuno indicar que el problema considerado en 1.1. se puede descomponer en dos. Puede enfocarse desde el punto de vista de comprobar si la inversión ha sido óptima después de efectuada —y entonces elegiremos para nuestro estudio un período de tiempo pasado, últimos diez años, por ejemplo—, o bien, calcular el programa más eficiente para una inversión futura —y en ese caso escogeremos una serie lo más numerosa posible de años pretéritos que nos marquen la tendencia y otros pocos años futuros en los que ésta se proyecta—. En el primer supuesto efectuaremos el cálculo de los coeficientes de las funciones a base de las cifras estadísticas tomadas de la realidad exclusivamente. En el segundo, esas cifras reales nos servirán para calcular las esperadas en años futuros, suponiendo que el desenvolvimiento de los negocios y las expectativas de renta no varíen tendencialmente. Tanto en uno como en otro caso la forma de las funciones y su resolución son análogas y sólo variarán los coeficientes al hacerlo el período de tiempo que se considere.

Hechas estas advertencias preliminares pasamos a estudiar, primero, el programa de una sola sociedad aislada y, después, el de varias sociedades con sus correspondientes problemas duales.

3.3.1.

Supongamos que tenemos una cantidad fija para invertir en acciones de una determinada sociedad J, diferenciadas en series con distintas características, y deseamos conocer la época más conveniente para obtener el óptimo de renta. Entonces tendremos que hallar el máximo de una función de la forma [XIX bis]

$$R'_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{ij} \, {}^{l}\lambda_{ij} \qquad \text{[XXXVII]}$$

con la condición de que se cumpla la función de costes de la forma [XXXII]

$$C_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij} \, {}^{l}\lambda_{ij} \, . \qquad \text{[XXXVII bis]}$$

Estamos en presencia de un caso sencillo de programación lineal, en el que intervienen $n+1$ variables y una sola condición. Los coeficientes de la función de costes son siempre positivos, así como su término independiente. Los coeficientes de la función de rendimiento serán también en general positivos, aunque puede ocurrir que excepcionalmente alguno no lo sea.

Para resolver el problema en uno y en otro caso tendremos que formar los cocientes $\dfrac{{}^{l}\alpha'_{ij}}{{}^{l}\beta_{ij}}$ entre los coeficientes de la función de rendimiento y sus correspondientes de la de costes. El cociente de mayor valor positivo nos marcará la época de la inversión óptima (3). Es decir, que si dicho cociente de mayor valor fuese, por ejemplo, $\frac{{}^{p}\alpha'_{hj}}{{}^{p}\beta_{hj}}$, correspondiente al año *h* y clase *p* de acciones, se anularían las correspondientes a los demás años y variedades y quedaría como solución

$$ {}^{1}\lambda_{0j} = 0, \ldots, {}^{s}\lambda_{0j} = 0, \ldots, {}^{p}\lambda_{hj} = \frac{C_j}{{}^{p}\beta_{hj}}, \ldots, {}^{1}\lambda_{nj} = 0, \ldots, {}^{s}\lambda_{nj} = 0. $$

Entonces

$$ C_j = {}^{p}\beta_{hj}\, {}^{p}\lambda_{hj} \qquad \text{y} \qquad R = C_j \frac{{}^{p}\alpha'_{hj}}{{}^{p}\beta_{hj}} \qquad [XXXVIII] $$

Todo ello nos indica que debemos hacer la inversión durante el año *h* y en acciones de la clase *p*, para obtener el óptimo rendimiento.

En el caso particular de que las acciones tuviesen todas el mismo valor nominal, tendríamos que hallar el máximo de

$$ R'_j = \sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij} \lambda_{ij} $$

con la condición de que

$$ C_j = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} \lambda_{ij} \qquad [XXXIX] $$

La solución se obtendría del mismo modo que en el supuesto de las acciones diversificadas, y nos daría la época más aconsejable para la inversión.

La segunda parte del problema dual para valores de una sola Sociedad podemos enunciarla del siguiente modo: Se desea saber

(3) J. CASTAÑEDA, "Introducción a la programación lineal", en *Revista de Ciencia Aplicada*, núm. 38, mayo-junio 1954, pág. 211.

la mínima inversión de dinero que tendríamos que efectuar en acciones de una Sociedad determinada para obtener una renta fijada de antemano. Consisten entonces las funciones de decisión en hallar el mínimo de

$$C_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\beta_{ij} \, {}^l\lambda_{ij} = \text{máx.} - C_j$$

con la condición de que [XL]

$$R'_j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^l\alpha'_{ij} \, {}^l\lambda_{ij} \, .$$

Si los valores no estuvieran diversificados en series de distinto nominal el planteamiento se realizaría hallando el mínimo de

$$C_j = \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij} \lambda_{ij} = \text{máx.} - C_j$$

con la condición de que [XLI]

$$R' = \sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij} \lambda_{ij} \, .$$

Tanto en este caso simplificado como en el anterior de la segunda parte del problema dual, el procedimiento para resolverlo es idéntico al empleado en la primera parte.

3.3.2.

Pasemos ahora a estudiar el caso más general en el que intervienen m sociedades, cuyas acciones están diversificadas en s variedades o series con distintas características cada una.

Primera parte del problema dual.—Deseamos conocer las clases de valores y las épocas más oportunas para obtener la máxima rentabilidad de una cantidad de dinero, de la cual no podemos pasar, invertido en acciones de varias sociedades.

PLANTEAMIENTO: Habrá que hallar el máximo de

$$R' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij}$$

con las condiciones

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{i1}\, {}^{l}\lambda_{i1} \leq C_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij} \leq C_j \qquad [XLII]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{im}\, {}^{l}\lambda_{im} \leq C_m .$$

Si las acciones de cada sociedad tuviesen el mismo nominal y características, las funciones de [XLII] se simplificarían de la siguiente forma:

$$\text{Máx. de } R' = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij}\, \lambda_{ij} \qquad [XLIII]$$

con las condiciones de que

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{i1}\ \lambda_{i1} \leq C_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{ij}\ \lambda_{ij} \leq C_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_{im}\ \lambda_{im} \leq C_m .$$

Segunda parte del problema dual.—Podríamos enunciarla de la siguiente forma: Se desea conocer la inversión mínima de dinero que necesitamos hacer en acciones de varias sociedades, cuyos valores o títulos están diversificados en varias series de acciones con características diferentes, para obtener por lo menos unas rentas determinadas.

PLANTEAMIENTO:

$$\text{Mínimo de } C = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\beta_{ij}\, {}^{l}\lambda_{ij} = \text{máx. de} - C$$

con las condiciones de que

$$\begin{array}{ll}
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{i1}\ {}^{l}\lambda_{i1} \geq R'_1 & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{ij}\ {}^{l}\lambda_{ij} \geq R'_j & \qquad [\text{XLIV}] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\sum_{i=0}^{n} \sum_{l=1}^{s} {}^{l}\alpha'_{im}\ {}^{l}\lambda_{im} \geq R'_m &
\end{array}$$

donde las funciones [XLIV] tienen el mismo significado que las [XXXVI] y [XIX bis] de 3.2.2. y 3.1.5.

Si las acciones de cada sociedad tuviesen el mismo nominal, suprimiríamos en [XLIV] los sumatorios $\sum_{l=1}^{s}$ y los superíndices ^{l}, y tendríamos que hallar el

$$\text{mínimo de } C = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} \beta_{ij}\, \lambda_{ij} = \text{máx. de} - C$$

con las condiciones

$$\begin{array}{l}
\sum_{i=0}^{n} \alpha'_{i1}\, \lambda_{i1} \geq R_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=0}^{n} \alpha'_{ij}\, \lambda_{ij} \geq R_j \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=0}^{n} \alpha'_{im}\, \lambda_{im} \geq R_m
\end{array}$$

donde las funciones son de la forma de las expresadas en [XXXIV] y [XVI bis] de 3.2.2. y 3.1.5.

3.4. Resolución de las funciones de decisión en el caso general. Simplificaciones y fórmulas de recurrencia

Una vez planteadas las funciones de decisión en el caso más general, vamos a proceder a su resolución por el procedimiento de Dantzig. Comenzaremos por la primera parte del problema dual, escribiendo en forma desarrollada las funciones que planteamos en [XLII] de 3.3.2.

3.4.1.

Máximo de

$$
\begin{aligned}
R' = {} & {}^{1}\alpha'_{01}\,{}^{1}\lambda_{01} + \dots + {}^{s}\alpha'_{01}\,{}^{s}\lambda_{01} + \dots + {}^{1}\alpha'_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + \\
& + {}^{s}\alpha'_{i1}\,{}^{s}\lambda_{i1} + \dots + {}^{1}\alpha'_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + {}^{s}\alpha'_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + {}^{1}\alpha'_{02}\,{}^{1}\lambda_{02} + \dots + {}^{s}\alpha'_{02}\,{}^{s}\lambda_{02} + \dots + {}^{1}\alpha'_{i2}\,{}^{1}\lambda_{i2} + \dots + \\
& + {}^{s}\alpha'_{i2}\,{}^{s}\lambda_{i2} + \dots + {}^{1}\alpha'_{n2}\,{}^{1}\lambda_{n2} + \dots + {}^{s}\alpha'_{n2}\,{}^{s}\lambda_{n2} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + {}^{1}\alpha'_{0j}\,{}^{1}\lambda_{0j} + \dots + {}^{s}\alpha'_{0j}\,{}^{s}\lambda_{0j} + \dots + {}^{1}\alpha'_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + \\
& + {}^{s}\alpha'_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \dots + {}^{1}\alpha'_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} + \\
& + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + {}^{1}\alpha'_{0m}\,{}^{1}\lambda_{0m} + \dots + {}^{s}\alpha'_{0m}\,{}^{s}\lambda_{0m} + \dots + {}^{1}\alpha'_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + \\
& + {}^{s}\alpha'_{im}\,{}^{s}\lambda_{im} + \dots + {}^{1}\alpha'_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm}
\end{aligned}
$$

Condiciones:

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}\beta_{01}\,{}^{1}\lambda_{01} + \dots + {}^{s}\beta_{01}\,{}^{s}\lambda_{01} + \dots + {}^{1}\beta_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + {}^{s}\beta_{i1}\,{}^{s}\lambda_{i1} + \\
&\qquad + \dots + {}^{1}\beta_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + {}^{s}\beta_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} \leqq C_1
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}\beta_{0j}\,{}^{1}\lambda_{0j} + \dots + {}^{s}\beta_{0j}\,{}^{s}\lambda_{0j} + \dots + {}^{1}\beta_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + {}^{s}\beta_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \\
&\qquad + \dots + {}^{1}\beta_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + {}^{s}\beta_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} \leqq C_j
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}\beta_{0m}\,{}^{1}\lambda_{0m} + \dots + {}^{s}\beta_{0m}\,{}^{s}\lambda_{0m} + \dots + {}^{1}\beta_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + {}^{s}\beta_{im}\,{}^{s}\lambda_{im} + \\
&\qquad + \dots + {}^{1}\beta_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + {}^{s}\beta_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm} \leqq C_m
\end{aligned}
$$

donde

$$ {}^{1}\lambda_{ij} \geqq 0 . \qquad \text{[XLVI]} $$

La función R′ contiene $s \cdot m\,(n+1)$ incógnitas, las mismas que el sistema de m inecuaciones de condición. Las desigualdades de éstas se convierten en igualdades, introduciendo una incógnita más por cada una de ellas, del siguiente modo: Sean $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ las incógnitas auxiliares. Con su empleo se transforman las inecuaciones de [XLVI] en las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
C_1 = {}&{}^{1}\beta_{01}\,{}^{1}\lambda_{01} + \dots + {}^{s}\beta_{01}\,{}^{s}\lambda_{01} + \dots + {}^{1}\beta_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + \\
&+ {}^{s}\beta_{i1}\,{}^{s}\lambda_{i1} + \dots + {}^{1}\beta_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + {}^{s}\beta_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} + \mu_1
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
C_j = {}&{}^{1}\beta_{0j}\,{}^{1}\lambda_{0j} + \dots + {}^{s}\beta_{0j}\,{}^{s}\lambda_{0j} + \dots + {}^{1}\beta_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + \\
&+ {}^{s}\beta_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \dots + {}^{1}\beta_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + {}^{s}\beta_{uj}\,\lambda_{nj} + \mu_j
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
C_m = {}&{}^{1}\beta_{om}\,{}^{1}\lambda_{om} + \dots + {}^{s}\beta_{om}\,{}^{s}\lambda_{om} + \dots + {}^{1}\beta_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + \\
&+ {}^{s}\beta_{im}\,{}^{s}\lambda_{im} + \dots + {}^{1}\beta_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + {}^{s}\beta_{nm}\,\lambda_{nm} + \mu_m
\end{aligned}
$$

[XLVII]

$$
\begin{array}{l}
{}^1\beta_{01}\,{}^1\lambda_{01} + \cdots + {}^s\beta_{01}\,{}^s\lambda_{01} + \cdots + {}^1\beta_{n1}\,{}^1\lambda_{n1} + \cdots + {}^s\beta_{n1}\,{}^s\lambda_{n1} + \mu_1 + 0 + \cdots + 0 + \cdots\cdots\cdots \\
\quad 0 \; + \cdots + \; 0 \; + \cdots + \; 0 \; + \cdots + \; 0 \; + 0 + {}^1\beta_{02}\,{}^1\lambda_{02} + \cdots + {}^s\beta_{n2}\,{}^s\lambda_{n2} + \mu_2 + 0 + \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad 0 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 + {}^1\beta_{0j}\,{}^1\lambda_{0j} + \cdots + {}^s\beta_{n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad 0 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

Con lo que nos resulta un sistema de m-ecuaciones con $s(n+1)\,m + m = m\,(s\,(n+1)+1)$ incógnitas que pueden representarse $+\,1)\,+1)$ vectores de m dimensiones pertenecientes a un espacio o hiperplano-dimensional. Si añadimos a estos vectores como una di función R se origina un cono poliédrico convexo en el espacio de $m+1$ dimensiones. Entonces cada una de las caras del cono resulta u problema estriba el encontrar el punto de una cara, que teniendo por "proyección horizontal" al que cumple las ecuaciones de condic

Formemos el cuadro de vectores m-dimensionales.

${}^1P_{01}$	..	${}^sP_{01}$	...	${}^1P_{n1}$	..	${}^sP_{n1}$	P_1	${}^1P_{02}$	..	${}^sP_{02}$	...	${}^1P_{n2}$	..	${}^sP_{n2}$	P_2	......	${}^1P_{0j}$
${}^1\beta_{01}$	..	${}^s\beta_{01}$	...	${}^1\beta_{n1}$	..	${}^s\beta_{n1}$	1	0		0		0		0	0		0
0		0		0		0	0	${}^1\beta_{02}$	..	${}^s\beta_{02}$	...	${}^1\beta_{n2}$		${}^s\beta_{n2}$	1	......	.
.		.		.		.	.	0		0		0		0	0		.
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		.
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		.
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		0
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		${}^1\beta_{0j}$
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		0
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		.
.		.		.		.	.	.		.		.		.	.		.
0		0		0		0	0	0		0		0		0	0		0

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + 0 = C_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + 0 = C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \ldots + {}^{s}\beta_{nj}\, {}^{s}\lambda_{nj} + \mu_j + 0 + \cdots\cdots\cdots + 0 = C_j$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + 0 + {}^{1}\beta_{om}\, {}^{1}\lambda_{om} + \ldots + {}^{s}\beta_{nm}\, {}^{s}\lambda_{nm} + \pi_m = C_m$$

[XLVIII]

representarse mediante una ecuación vectorial que contiene $m(s(n+$ como una dimensión más o "cota" el correspondiente coeficiente de la ono resulta un hiperplano ideal de m dimensiones y la solución del nes de condición—en nuestro caso las de costes—, posea la mayor "cota".

${}^{1}P_{0j}$	..	${}^{s}P_{0j}$	...	${}^{1}P_{nj}$	..	${}^{s}P_{nj}$	P_j	......	${}^{1}P_{0m}$	..	${}^{s}P_{0m}$	...	${}^{1}P_{nm}$	..	${}^{s}P_{nm}$	P_m	P_0
0		0		0		0	0		0		0		0		0	0	C_1
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	C_2
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
0		0		0		0	0		.		.		.		.	.	.
${}^{1}\beta_{0j}$	..	${}^{s}\beta_{0j}$	...	${}^{1}\beta_{nj}$	..	${}^{s}\beta_{nj}$	1	......	.		.		.		.	.	C_j
0		0		0		0	0		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		.		.		.		.	.	.
.		.		.		.	.		0		0		0		0	0	.
0		0		0		0	0		${}^{1}\beta_{0m}$	..	${}^{s}\beta_{0m}$	...	${}^{1}\beta_{nm}$	..	${}^{s}\beta_{nm}$	1	C_m

[XLIX]

donde,

$$\mu_j \geqq 0 \quad y \quad {}^{1}\lambda_{ij} \geqq 0.$$

Pero las ecuaciones de [XLVII] pueden escribirse en la forma que se indica en la pág. siguiente en [XLVIII].

Donde todos los vectores, a excepción de P_0, tienen nulas todas sus componentes menos una.

Comenzaremos eligiendo una solución base cualquiera que cumpla el sistema [XLVIII], con tal de que sea no degenerada, y probaremos si es o no óptima. Para que dicha solución sea no degenerada bastará que contenga un número de variables positivas igual o mayor que el de condiciones. Pero como el número de éstas es *m* en nuestro caso, si el de incógnitas fuese superior, el sistema se haría indeterminado. Por lo que deberemos tomar una solución que contenga *m* valores positivos de las variables, solución que pertenece a la cara correspondiente del "cono".

Así, si hacemos nulas todas las μ_j y las ${}^{1}\lambda_{ij}$, a excepción de ${}^{a}\lambda_{a1}$, ${}^{b}\lambda_{b2}$, ${}^{c}\lambda_{c3}$, ..., ${}^{k}\lambda_{kj}$, ..., ${}^{h}\lambda_{hm}$ donde cada "landa" y "mu" pueden ser cualesquiera de las del sistema [XLVIII] con tal de que intervenga una de cada fila o ecuación tendremos un sistema de *m* ecuaciones con el mismo número de incógnitas,

$$\begin{array}{l} {}^{a}\beta_{a1}\ {}^{a}\lambda_{a1} = C_1 \\ {}^{b}\beta_{b2}\ {}^{b}\lambda_{b2} = C_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^{k}\beta_{kj}\ {}^{k}\lambda_{kj} = C_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^{h}\beta_{hm}\ {}^{h}\lambda_{hm} = C_m \end{array} \qquad [L]$$

que resuelto nos dará los valores de la solución base.

Vamos a comprobar si es óptima. Para facilitar los cálculos los dispondremos en una tabla como la [LV]. En la fila 1 escribiremos los coeficientes α' de la función [XLVI] que queremos hacer máxima. En la *2* representaremos por sus símbolos los vectores de [XLIX]. En la *6* los coeficientes α' correspondientes a las variables de la solución. En *7* se anotan los vectores que figuran en dicha solución y en *8* sus valores numéricos hallados al resolver el sistema [L].

A fin de conocer si conviene introducir en la solución base algunos de los vectores que no entran en ella se descompone cada uno de éstos, tomando como componentes los vectores correspondientes a dicha solución. Así podremos formar ecuaciones vectoriales como la siguiente:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}P_{01} = {}&{}^{1}x_{a1.01}\,{}^{a'}P_{a1} + {}^{1}x_{b2.01}\,{}^{b'}P_{b2} + \dots\dots + \\
&+ {}^{1}x_{kj.01}\,{}^{k'}P_{kj} + \dots\dots + {}^{1}x_{hm.01}\,{}^{h'}P_{hm}
\end{aligned}
\qquad [LI]
$$

O escrita de otro modo:

$$
\begin{vmatrix} {}^{1}\beta_{01} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}
= {}^{1}x_{a1.01}
\begin{vmatrix} {}^{a'}\beta_{a1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}
+ {}^{1}x_{b2.01}
\begin{vmatrix} 0 \\ {}^{b'}\beta_{b2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}
+ \dots + {}^{1}x_{kj.01}
\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ {}^{k'}\beta_{kj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}
+ \dots + {}^{1}x_{hm.01}
\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ {}^{h'}\beta_{hm} \end{vmatrix}
$$

Sistema que una vez resuelto nos dará los valores de las "equis" que anotaremos en la primera columna del cuadro *3* de la Tabla. Descomponiendo el vector ${}^{2}P_{01}$ y resolviendo el sistema así formado obtendremos los valores de la segunda columna y así sucesivamente, hasta completar todo el cuadro 3.

En cuanto el número de filas y columnas de dicho cuadro sea algo elevado los cálculos se harán muy laboriosos. Pero podremos establecer en ellos una serie de simplificaciones. Así, en primer lugar, si nos fijamos en una ecuación vectorial cualquiera del tipo de la [LI] podemos representarla en general por:

$$ {}^{1}P_{ij} = {}^{1}x_{a'1.ij}\,{}^{a'}P_{a1} + \dots + {}^{1}x_{kj.ij}\,{}^{k'}P_{kj} + \dots\dots + {}^{1}x_{hm.ij}\,{}^{k'}P_{hm} \qquad [LII] $$

O sea:

$$ \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ {}^{1}\beta_{ij} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} = {}^{1}x_{a1.ij} \begin{vmatrix} {}^{a'}\beta_{a1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} + \dots + {}^{1}x_{kj.ij} \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ {}^{k'}\beta_{kj} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} + \dots + {}^{1}x_{hm.ij} \begin{vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ {}^{h'}\beta_{hm} \end{vmatrix} $$

Por la naturaleza de los vectores contenidos en cada sistema obtendremos valores nulos para todas las x menos una que puede no serlo. Precisamente aquellas a las cuales correspondan los mismos primeros subíndices en el vector componente y en el que se descompone. La fórmula de recurrencia que podemos aplicar para hallar los valores no nulos es la siguiente:

$$ {}^{1}x_{kj.ij} = \frac{{}^{1}\beta_{ij}}{{}^{k'}\beta_{kj}} \qquad [LIII] $$

(los subíndices k indican las columnas correspondientes de la solución base y pueden variar de *o* a *n*, los *k'* de *1* a *s*).

El otro tipo de ecuaciones vectoriales que puede darse descomponiendo los vectores correspondientes a los coeficientes de las variables auxiliares será de la forma

$$ P_j = x_{a1.j}\,{}^{a'}P_{a1} + \dots + x_{kj.j}\,{}^{k'}P_{kj} + \dots + x_{hm.j}\,{}^{h'}P_{hm} $$

que nos dará desarrollada

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}\right| = x_{a1.j} \left|\begin{matrix} {}^{a'}\beta_{a1} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}\right| + \dots + x_{kj.j} \left|\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ {}^{k'}\beta_{kj} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix}\right| + \dots + x_{hm.j} \left|\begin{matrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ {}^{h'}\beta_{hm} \end{matrix}\right| .$$

Resolviendo esta ecuación vectorial podremos obtener valores nulos solamente para las x cuyo subíndice del vector que se descompone sea igual que el segundo subíndice del vector componente. Es decir que

$$x_{kj.j} = \frac{1}{{}^{k'}\beta_{kj}} \qquad \text{[LIV]}$$

De las fórmulas [LIII] y [LIV] deducimos una regla práctica que simplifica extraordinariamente los cálculos. Para hallar las "equis" del cuadro tercero bastará dividir el coeficiente β_{kj} de la solución inicial por cada uno de los coeficientes β_{ij} que forman parte de la función de costes de la misma sociedad J. Estas simplificaciones análogas a las que en un caso más sencillo empleamos en nuestro trabajo "Aplicaciones de la Programación lineal al estudio de costes y rendimientos de una biblioteca o archivo estadístico" (4), hace que no tengamos que calcular más que los valores de las x del cuadro 3 situados dentro de las filas marcadas en negro que semejan unos escalones descendentes. Para trazar estos escalones señalaremos el lugar que deben ocupar las $s(n+1)+1$ primeras variables de la primera fila. Descenderemos a continuación al lugar ocupado por las $s(n+1)+1$ variables siguientes de la segunda, y así sucesivamente, hasta llegar a la última fila o m-ésimo escalón. Las res-

(4) Pbdo. en el Suplemento al *Bol. Estad.* INE núm. 9, pág. 142 y sgs.

tantes x que no están comprendidas dentro de esos escalones serán todas nulas.

Si tenemos en cuenta además que las variables x correspondientes al lugar de cruce de dos rectas imaginarias trazadas en sentido horizontal y vertical respectivamente desde los mismos vectores de la columna 7 y de la fila 2 de la tabla general, son siempre iguales a la unidad (5) habremos simplificado extraordinariamente los cálculos del cuadro central 3 que estamos considerando.

En la fila *4* de la Tabla general anotaremos los valores que va tomando la función R′; se obtienen sumando los productos de sus correspondientes x del cuadro *3* por los coeficientes de *6*. Por último, en la fila *5* se escriben las diferencias W entre las R′ de la fila *4* y sus correspondientes de la *1*. Si todas las W fueran no negativas, la solución base elegida sería la óptima o una de las óptimas.

3.4.1.1.

Sólo en el caso de que encontremos W negativas tendremos que seguir operando. Pasaríamos entonces a otra "cara" en la que se obtenga mayor "cota" para la misma "proyección horizontal". A fin de conseguirlo es conveniente introducir en la nueva solución una variable ${}^{p'}\lambda_{pq}$ tal que su correspondiente *W* de la Tabla, siendo negativa, alcance el mayor valor absoluto. Anularemos, en cambio, la variable ${}^{k'}\lambda_{kj}$ de la solución base que en la relación $\dfrac{{}^{k'}\lambda_{kj}}{x_{kj.pq}}$ nos dé el menor valor positivo.

Haremos entonces ${}^{p'}\lambda_{pq} = \dfrac{{}^{k'}\lambda_{kj}}{x_{kj.pq}}$ valor que se introduce en la nueva solución.

Los valores de las demás variables no nulas de la nueva solución se ajustarán de forma que cumplan las condiciones del sistema de condición. A partir de las α' y de estos nuevos valores se forma otra Tabla general análoga a la anterior (6). En ella

(5) Ver Introducción a la "Programación Lineal", en *Revista de Ciencia Aplicada.* Obra citada, pág. 215.

(6) *La Programaziones Lineale nell'Industria.* Torino, 1954; págs. 36 y ss.

los valores del cuadro central *3* se pueden calcular basándose en las fórmulas de recurrencia del tipo de las [LIII] y [LIV].

Así seguiremos operando del mismo modo que en la Tabla [LV] hasta lograr que todas las W sean no negativas, es decir, hasta lograr que la solución tanteada sea óptima.

3.4.2.

Resolveríamos la segunda parte del problema dual minimizando la función de coste total hallada en 3.3.2. [XXXVI].

$$\begin{aligned} C = {}& {}^{1}\beta_{o1}\,{}^{1}\lambda_{o1} + \dots\dots + {}^{s}\beta_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} + \\ & + {}^{1}\beta_{o2}\,{}^{1}\lambda_{o2} + \dots\dots + {}^{s}\beta_{n2}\,{}^{s}\lambda_{n2} + \\ & + \dots\dots + \\ & + \dots\dots + \\ & + {}^{1}\beta_{om}\,{}^{1}\lambda_{om} + \dots\dots + {}^{s}\beta_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm} \end{aligned}$$

Con las condiciones,

$$\begin{aligned} & {}^{1}\alpha'_{o1}\,{}^{1}\lambda_{o1} + \dots + {}^{s}\alpha'_{o1}\,{}^{s}\lambda_{o1} + \dots + {}^{1}\alpha'_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + \\ & + {}^{1}\alpha'_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + {}^{s}\alpha'_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} \geqq R_1 \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} & {}^{1}\alpha'_{oj}\,{}^{1}\lambda_{oj} + \dots + {}^{s}\alpha'_{oj}\,{}^{s}\lambda_{oj} + \dots + {}^{1}\alpha'_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + \\ & + {}^{1}\alpha'_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} \geqq R_j \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} & {}^{1}\alpha'_{om}\,{}^{1}\lambda_{om} + \dots + {}^{s}\alpha'_{om}\,{}^{s}\lambda_{om} + \dots + {}^{1}\alpha'_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + \\ & + {}^{1}\alpha'_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm} \geqq R_n' \end{aligned}$$

$${}^{1}\lambda_{ij} \geqq 0$$

Estas inecuaciones de condición se pueden transformar en ecuaciones introduciendo m variables auxiliares v_1, v_2, ..., v_j ..., v_m del siguiente modo:

$$\begin{aligned} & {}^{1}\alpha'_{o1}\,{}^{1}\lambda_{o1} + \dots + {}^{s}\alpha'_{o1}\,{}^{s}\lambda_{o1} + \dots + {}^{1}\alpha'_{i1}\,{}^{1}\lambda_{i1} + \dots + \\ & + {}^{s}\alpha'_{i1}\,{}^{s}\lambda_{i1} + \dots + {}^{1}\alpha'_{n1}\,{}^{1}\lambda_{n1} + \dots + {}^{s}\alpha'_{n1}\,{}^{s}\lambda_{n1} - v_1 = R'_1 \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} & {}^{1}\alpha'_{oj}\,{}^{1}\lambda_{oj} + \dots + {}^{s}\alpha'_{oj}\,{}^{s}\lambda_{oj} + \dots + {}^{1}\alpha'_{ij}\,{}^{1}\lambda_{ij} + \dots + \\ & + {}^{s}\alpha'_{ij}\,{}^{s}\lambda_{ij} + \dots + {}^{1}\alpha'_{nj}\,{}^{1}\lambda_{nj} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nj}\,{}^{s}\lambda_{nj} - v_j = R'_j \end{aligned}$$

TABLA DEL METODO DE DANTZIG [LV]

$$ {}^{1}\alpha'_{o1} \ldots {}^{s}\alpha'_{o1} \ldots {}^{1}\alpha'_{n1} \ldots {}^{s}\alpha'_{n1} \quad O \quad \ldots {}^{1}\alpha'_{oj} \ldots {}^{s}\alpha'_{oj} \ldots {}^{1}\alpha'_{nj} \ldots {}^{s}\alpha'_{nj} \quad O \quad \ldots {}^{1}\alpha'_{om} \ldots {}^{s}\alpha'_{om} \ldots {}^{1}\alpha'_{nm} \ldots {}^{s}\alpha'_{nm} \quad O \qquad \boxed{\alpha'} \quad 1 $$

$$ {}^{1}P_{o1} \ldots {}^{s}P_{o1} \ldots {}^{1}P_{n1} \ldots {}^{s}P_{n1} \quad P_{1} \ldots {}^{1}P_{oj} \ldots {}^{s}P_{oj} \ldots {}^{1}P_{nj} \ldots {}^{s}P_{nj} \quad P_{j} \ldots {}^{1}P_{om} \ldots {}^{s}P_{om} \ldots {}^{1}P_{nm} \ldots {}^{s}P_{nm} \quad P_{m} \qquad \boxed{P} \quad 2 $$

6	7	8
α'	P	λ
${}^{a'}\alpha'_{a1}$	${}^{a'}P_{a1}$	${}^{a'}\lambda_{a1}$
${}^{b'}\alpha'_{b2}$	${}^{b'}P_{b2}$	${}^{b'}\lambda_{b2}$
:	:	:
:	:	:
${}^{k'}\alpha_{kj}$	${}^{k'}P_{kj}$	${}^{k'}\lambda_{kj}$
:	:	:
:	:	:
:	:	:
:	:	:
${}^{h'}\alpha'_{hm}$	${}^{h'}P_{hm}$	${}^{h'}\lambda_{hm}$

$$ \boxed{{}^{1}x_{a1o1} \ldots {}^{s}x_{a1o1} \ldots {}^{1}x_{a1n1} \ldots {}^{s}x_{a1n1} \quad x_{a11}} $$

$$ \boxed{{}^{1}x_{kjo1} \ldots {}^{s}x_{kjo1} \ldots {}^{1}x_{kjn1} \quad {}^{s}x_{kjnj} \quad x_{kjj}} \qquad \boxed{X} \quad 3 $$

$$ \boxed{{}^{1}x_{hmom} \ldots {}^{s}x_{hmom} \ldots {}^{1}x_{hmnm} \quad {}^{s}x_{hmnm} \quad x_{hmm}} $$

$$ {}^{1}R'_{o1} \ldots {}^{s}R'_{o1} \ldots {}^{1}R'_{n1} \ldots {}^{s}R'_{n1} \quad R'_{1} \ldots {}^{1}R'_{oj} \ldots {}^{s}R'_{oj} \ldots {}^{1}R'_{nj} \ldots {}^{s}R'_{nj} \quad R'_{j} \ldots {}^{1}R'_{om} \ldots {}^{s}R'_{om} \ldots {}^{1}R'_{nm} \ldots {}^{s}R'_{nm} \quad R'_{m} \qquad \boxed{R'} \quad 4 $$

$$ {}^{1}W_{o1} \ldots {}^{s}W_{o1} \ldots {}^{1}W_{n1} \ldots {}^{s}W_{n1} \quad W_{1} \ldots {}^{1}W_{oj} \ldots {}^{s}W_{oj} \ldots {}^{1}W_{nj} \ldots {}^{s}W_{nj} \quad W_{j} \ldots {}^{1}W_{om} \ldots {}^{s}W_{om} \ldots {}^{1}W_{nm} \ldots {}^{s}W_{nm} \quad W_{m} \qquad \boxed{W'} \quad 5 $$

....

$$
\begin{gathered}
{}^{1}\alpha'_{om}\,{}^{1}\lambda_{om} + \dots + {}^{s}\alpha'_{om}\,{}^{s}\lambda_{om} + \dots + {}^{1}\alpha'_{im}\,{}^{1}\lambda_{im} + \dots + \\
+ {}^{s}\alpha'_{im}\,{}^{s}\lambda_{im} + \dots + {}^{1}\alpha'_{nm}\,{}^{1}\lambda_{nm} + \dots + {}^{s}\alpha'_{nm}\,{}^{s}\lambda_{nm} - v_{m} = R'_{m} \\
{}^{l}\lambda_{ij} \geqq 0 \quad \text{y} \quad v_{j} \geqq 0
\end{gathered}
$$

Ahora bien, como

$$\text{min. } C = \text{max.} - C$$

cambiaremos el signo de los coeficientes β de la función de costes para anotarlos en la fila *1* de la Tabla general, que formaremos siguiendo un proceso análogo al que empleamos para resolver la primera parte del problema dual en 3.4.1.

4. APLICACION DEL METODO A UN GRUPO DE ACCIONES DE LA BOLSA DE MADRID

Supuesto.—Una Sociedad ha dispuesto para el período de 1951 a 1958, ambos inclusive, de 17 millones de pesetas, que desea invertir a lo sumo, en algunos valores de la Bolsa de Madrid con el fin de obtener la máxima renta estable.

El grupo de valores de los que posee datos para hacer la investigación se reduce a 19, pertenecientes a Sociedades de distintas clases de actividad, cuyo nombre omitimos para salvar efectos publicitarios. Nos limitamos así a designar a cada Sociedad con un número de orden que figurará como segundo subíndice.

Es decir que poseemos datos de las sociedades 1, 2, 3, 4, ..., 19, a través de los años 0, 1, 2, ..., 7; tomamos como año base O el 1951.

Estos datos primarios son: valor en pesetas que corresponde a cada acción por dividendo, $d - u$; por venta de los derechos de suscripción en las ampliaciones de capital o valor medio teórico de un derecho, $c' - g'$; y por asistencia a Juntas generales, p.

4.1. Formación de los porcentajes de renta efectiva

Mediante la fórmula primera de 2.2 obtenemos la renta efectiva total por acción, y a partir de ella y de la cotización llegamos, con ayuda de la *fórmula última* del mismo apartado a obtener los tantos por 1, r', de renta efectiva neta. Porcentajes que corregimos con el índice oficial de coste de la vida I_j, para conseguir los tantos r_{ij} de [IV] referidos al poder adquisitivo del año base 1951.

La disposición de los cálculos viene presentada en los cuadros I, II, III, IV, V, VI, VII de los anexos.

4.2. Determinación del grupo de valores más rentable

De las series cronológicas de renta así obtenidas desechamos a simple vista algunas que por su bajo nivel o su marcha francamente descendente no necesitan estudio posterior. Tal ocurre con las series correspondientes a las sociedades 1, 2, 9, 12 y 13.

Hacemos la representación gráfica de las series que quedan, representación que puede verse en los anexos VIII y IX, ajustamos la tendencia secular de cada una de ellas y exigimos que el nivel mínimo de renta admisible sea aproximadamente el 0,08 por 1, *o sea el 8 por ciento.*

Procedamos ahora a la eliminación de las series de tendencia descendente o estacionaria menos definidas —que corresponden a las sociedades 3, 5, 11 y 15—. También apartaremos las sociedades 4, 6, 7, 10 y 11 por sus bruscas variaciones, que nos hacen pensar en la inestabilidad de sus beneficios.

Hemos de hacer notar que las series cronológicas de las que disponemos son muy cortas. No podemos, *a priori,* con ellas hacer suposiciones para preferir una tendencia y otra —exponencial, *logística, polinomial, etc.—. Por tratarse de universos* sin parámetros conocidos no podemos hacer en ellos la hipótesis de normalidad, pero sí podremos establecer un contraste de aleatoriedad basándonos sencillamente en todas las posibles combinaciones de valores realmente observados.

Vamos a utilizar aquí el método de contrastes no paramétricos para la tendencia ideado por B. H. Mann, que se basa en la sustitución de los valores observados por rangos (7) y es paralelo en

(7) G. Tintner: *Econometrics,* 1952; págs. 211 y ss.

su desarrollo al de los coeficientes de correlación por rangos de M. G. Kendall.

Consideremos la serie cronológica de renta efectiva de valores

$$r_0, r_1 \dots r_i \dots r_n$$

Ordenemos los datos de la serie, según sus magnitudes, de menor a mayor y asignémosles un número de orden o rango. Volviendo de nuevo a la serie inicial, la convertiremos en otra $p_0, p_1 \dots p_n$, donde p_0 es el rango de r_0, p_1 el rango de r_1, ..., p_n el rango de r_n.

A partir de las p_i estaremos en condiciones de hallar el número P de puntuaciones positivas

$$P = \sum_{i=0}^{n} s_i$$

donde

s_i = número de elementos r_i, r_{i+1}, ... r_n, que siendo posteriores a r_i tienen rango superior a p_i.

$s_n = 0$, siempre.

Y conociendo P nos será fácil hallar el número total de puntuaciones S, mediante la fórmula

$$S = 2P - \frac{1}{2}(n+1)\,n$$

El coeficiente de correlación serial vendrá entonces expresado por

$$\tau = \frac{2S}{(n+1)\,n}$$

El campo de variación de τ estará comprendido entre $+1$ —caso del orden perfecto en el que $p_0 \dots p_n$ forman la serie de los números naturales— y -1, desorden total, en el $p_0 \dots p_n$ son *los mismos números en orden inverso.*

Podemos establecer el contraste de significación de un valor de S obtenido mediante las Tablas de Kendall insertas en su libro "Rank Correlation Methods" (8) para valores comprendidos entre $n = 4$ y $n = 10$ con series que empiezan por 1. Como las series cronológicas que nosotros utilizamos comprenden los años 0, 1, 2 ... 7, tendremos que tomar $n = 8$.

En los anexos X y XI verificamos contrastes de significación de este tipo para las series de renta efectiva que aún no hemos eliminado. En todas ellas podemos apreciar que la probabilidad de obtener valores de S iguales o menores que los obtenidos por la fórmula anterior difiere significativamente de los esperados, al nivel del 5 por ciento. De aquí que no veamos ninguna razón para rechazar la tendencia lineal que hemos ajustado, ni para dejar de efectuar la extrapolación de los valores del año 1958, tomando como base los datos observados en los siete años anteriores.

No obstante, para un estudio más profundo, dada la posible fluctuación de los negocios que se puede presumir en las series de renta efectiva de valores mobiliarios, sobre todo si se pretenden hacer extrapolaciones y pronósticos a más largo plazo, sería aconsejable verificar un contraste no paramétrico para los ciclos, como el propuesto por Wallis y Moore (9), del que damos una idea en el apéndice número 1.

En resumidas cuentas, que después de estos filtros nos hemos quedado con las sociedades 8, 9, 14, 16, 18 y 19, cuyas "erres" reproducimos en el anexo XII, al mismo tiempo que damos los correspondientes valores extrapolados linealmente para 1958 o año 7 de las series.

4.3. Programación del grupo

La Gerencia de la Sociedad inversora acuerda que, para repartir el riesgo, se empleen respectivamente 3,8; 4; 3,8; 2,5 y 2,9 millones de pesetas como máximo en las 5 sociedades seleccionadas, por el orden citado. La distribución de las cantidades a cubrir por

---

(8) Londres, 1948; págs. 141 y ss., 1.ª edic.; ó 1955; pág. 171, 2.ª edic.

(9) *A significance test for time series analysis*, en "Journal of the American Statistical Association"; vol. 36, 1941, págs. 401 y ss.

cada sociedad se ha hecho proporcionalmente a la rentabilidad global de cada una de dichas sociedades elegidas, a lo largo del período de los ocho años. Es decir, se han repartido los 17.000.000 en partes directamente proporcionales a 92,6923; 99,8222; 92,9782; 61,5712 y 70,6999 por 100. Se desea saber ahora las épocas más favorables para hacer la inversión.

En el anexo XIII hallamos los valores α' y β de los coeficientes de las funciones de rendimientos y costes según las fórmulas [XXI bis] y [XXXIII] de 3.1.5. y 3.2.2., y con ellos podemos ya plantear las siguientes funciones de decisión del tipo de las [XLVI] de 3.4.1.

Máximo de [LVI]

$$\begin{aligned}
R' = {} & 116{,}4447\,\lambda_{08} + 113{,}4833\,\lambda_{18} + 124{,}6211\,\lambda_{28} + 135{,}1768\,\lambda_{38} + \\
& + 134{,}0837\,\lambda_{48} + 232{,}3886\,\lambda_{58} + 223{,}1481\,\lambda_{68} + 199{,}5045\,\lambda_{78} + \\
& + 105{,}6243\,\lambda_{0-14} + 97{,}7208\,\lambda_{1-14} + 102{,}9527\,\lambda_{2-14} + 100{,}3950\,\lambda_{3-14} + \\
& + 117{,}5665\,\lambda_{4-14} + 155{,}7470\,\lambda_{5-14} + 159{,}5480\,\lambda_{6-14} + 158{,}4495\,\lambda_{7-14} + \\
& + 157{,}0750\,\lambda_{0-16} + 141{,}3860\,\lambda_{1-16} + 151{,}5231\,\lambda_{2-16} + 170{,}4875\,\lambda_{3-16} + \\
& + 220{,}9906\,\lambda_{4-16} + 302{,}3606\,\lambda_{5-16} + 546{,}1560\,\lambda_{6-16} + 270{,}4242\,\lambda_{7-16} + \\
& + 48{,}2179\,\lambda_{0-18} + 49{,}9114\,\lambda_{1-18} + 46{,}4760\,\lambda_{2-18} + 51{,}5144\,\lambda_{3-18} + \\
& + 60{,}2357\,\lambda_{4-18} + 82{,}0366\,\lambda_{5-18} + 109{,}334\,\lambda_{6-18} + 105{,}9227\,\lambda_{7-18} + \\
& + 133{,}2693\,\lambda_{0-19} + 133{,}0072\,\lambda_{1-19} + 129{,}7063\,\lambda_{2-19} + 136{,}0729\,\lambda_{3-19} + \\
& + 175{,}2918\,\lambda_{4-19} + 248{,}2440\,\lambda_{5-19} + 303{,}4561\,\lambda_{6-19} + 131{,}4687\,\lambda_{7-19} +
\end{aligned}$$

Con la condición de que

$$\begin{aligned}
& 1.008{,}5175\,\lambda_{08} + 1.038{,}9235\,\lambda_{18} + 1.028{,}6213\,\lambda_{28} + \\
& + 995{,}3409\,\lambda_{38} + 1.014{,}6652\,\lambda_{48} + 1.387{,}8443\,\lambda_{58} + \\
& + 1.469{,}0421\,\lambda_{68} + 1.070{,}2975\,\lambda_{78} \leq 3.800.000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 849{,}4600\,\lambda_{0-14} + 793{,}2667\,\lambda_{1-14} + 832{,}3073\,\lambda_{2-14} + \\
& + 796{,}1672\,\lambda_{3-14} + 923{,}4145\,\lambda_{4-14} + 1.321{,}0877\,\lambda_{5-14} + \\
& + 1.508{,}9211\,\lambda_{6-14} + 1.059{,}9618\,\lambda_{7-14} \leq 4.000.000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1.356{,}2302\,\lambda_{0-16} + 1.361{,}3481\,\lambda_{1-16} + 1.300{,}4990\,\lambda_{2-16} + \\
& + 1.337{,}3460\,\lambda_{3-16} + 1.570{,}5989\,\lambda_{4-16} + 1.871{,}3226\,\lambda_{5-16} + \\
& + 2.456{,}6491\,\lambda_{6-16} + 1.453{,}2289\,\lambda_{7-16} \leq 3.800.000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 628{,}6927\,\lambda_{0-18} + 629{,}4955\,\lambda_{1-18} + 565{,}7191\,\lambda_{2-18} \\
& + 601{,}1438\,\lambda_{3-18} + 639{,}6360\,\lambda_{4-18} + 730{,}6835\,\lambda_{5-18} \\
& + 982{,}4493\,\lambda_{6-18} + 793{,}5250\,\lambda_{7-18} \leq 2.500.000
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& 1.513{,}2780\,\lambda_{0-19} + 1.432{,}9980\,\lambda_{1-19} + 1.338{,}5327\,\lambda_{2-19} + \\
& + 1.317{,}4406\,\lambda_{3-19} + 1.435{,}5264\,\lambda_{4-19} + 1.722{,}0144\,\lambda_{5-19} + \\
& + 2.039{,}3564\,\lambda_{6-19} + 1.891{,}9442\,\lambda_{7-19} \leq 2.900.000
\end{aligned}
$$

Ahora bien, estas inecuaciones de condición pueden transformarse en las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
& 1.008{,}5175\,\lambda_{08} + 1.038{,}9235\,\lambda_{18} + 1.028{,}6213\,\lambda_{28} + \\
& + 995{,}3409\,\lambda_{38} + 1.014{,}6652\,\lambda_{48} + 1.387{,}8443\,\lambda_{58} + \\
& + 1.469{,}0421\,\lambda_{68} + 1.070{,}2975\,\lambda_{78} + \mu_{8} = 3.800.000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 849{,}4600\,\lambda_{0-14} + 793{,}2667\,\lambda_{1-14} + 832{,}3073\,\lambda_{2-14} + \\
& + 796{,}1672\,\lambda_{3-14} + 923{,}4145\,\lambda_{4-14} + 1.321{,}0877\,\lambda_{5-14} + \\
& + 1.508{,}9211\,\lambda_{6-14} + 1.059{,}9211\,\lambda_{7-14} + \mu_{14} = 4.000.000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1.356{,}2302\,\lambda_{0-16} + 1.361{,}3481\,\lambda_{1-16} + 1.300{,}4990\,\lambda_{2-16} + \\
& + 1.337{,}3460\,\lambda_{3-16} + 1.570{,}5989\,\lambda_{4-16} + 1.871{,}3226\,\lambda_{5-16} + \\
& + 2.456{,}6491\,\lambda_{6-16} + 1.453{,}2289\,\lambda_{7-16} + \mu_{16} = 3.800.000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 628{,}6927\,\lambda_{0-18} + 629{,}4955\,\lambda_{1-18} + 565{,}7191\,\lambda_{2-18} + \\
& + 601{,}1438\,\lambda_{3-18} + 639{,}6360\,\lambda_{4-18} + 730{,}6835\,\lambda_{5-18} + \\
& + 982{,}4493\,\lambda_{6-18} + 793{,}5250\,\lambda_{7-18} + \mu_{18} = 2.500.000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 1.513{,}278\,\lambda_{0-19} + 1.432{,}998\,\lambda_{1-19} + 1.338{,}5327\,\lambda_{2-19} + \\
& + 1.317{,}4406\,\lambda_{3-19} + 1.435{,}5264\,\lambda_{4-19} + 1.722{,}0144\,\lambda_{5-19} + \\
& + 2.039{,}3564\,\lambda_{6-19} + 1.891{,}9442\,\lambda_{7-19} + \mu_{19} = 2.900.000
\end{aligned}
$$

Formemos los vectores m-dimensionales que damos en el siguiente cuadro:

P_{08}	P_{18}	P_{28}	P_{38}	P_{48}
1.008,5175	1.038,9235	1.028,6213	995,3409	1.014,6652
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

P_{58}	P_{68}	P_{78}	P_{8}	P_{0-14}
1.387,8443	1.469,0421	1.070,2975	1	0
0	0	0	0	849,4600
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$$\begin{array}{ccccc}
P_{1-14} & P_{2-14} & P_{3-14} & P_{4-14} & P_{5-14} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 793{,}2667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 832{,}3073 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 796{,}1672 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 923{,}4145 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 1.321{,}0877 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_{6-14} & P_{7-14} & P_{14} & {}_{0-16}\ d & P_{1-16} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 1.508{,}9211 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 1.059{,}9818 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.356{,}2302 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.361{,}3481 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_{2-16} & P_{3-16} & P_{4-16} & P_{5-16} & P_{6-16} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.300{,}4990 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.337{,}3460 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.570{,}5989 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.871{,}3226 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.456{,}6491 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_{7-16} & P_{16} & P_{0-18} & P_{1-18} & P_{2-18} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.453{,}2289 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 628{,}6927 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 629{,}4955 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 565{,}7191 \\ 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_{3-18} & P_{4-18} & P_{5-18} & P_{6-18} & P_{7-18} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 601{,}1438 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 639{,}8300 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 730{,}6835 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 982{,}4493 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 793{,}5250 \\ 0 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
P_{18} & P_{0-19} & P_{1-19} & P_{2-19} & P_{3-19} \\
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.514{,}278 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.432{,}998 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.338{,}5327 \end{vmatrix} &
\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.317{,}4408 \end{vmatrix}
\end{array}$$

$$P_{4-19} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.435,5264 \end{vmatrix} \quad P_{5-19} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.722,0144 \end{vmatrix} \quad P_{6-19} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.039,3564 \end{vmatrix} \quad P_{7-19} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.891,9442 \end{vmatrix} \quad P_{19} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$P = \begin{vmatrix} 3.800.000 \\ 4.000.000 \\ 3.800.000 \\ 2.500.000 \\ 2.900.000 \end{vmatrix}$$

Tomemos ahora una solución inicial, no degenerada. Por ejemplo, la que hace que se anulen todas las "landas", a excepción de las siguientes, cuyos valores hallamos:

$$\lambda_{5.8} = \frac{C_8}{\beta_{5.8}} = \frac{3.800.000}{1.469,0421} = 2.586,719$$

$$\lambda_{4.14} = \frac{C_{14}}{\beta_{4.14}} = \frac{4.000.000}{923,4145} = 4.331,74$$

$$\lambda_{6.16} = \frac{C_{16}}{\beta_{6.16}} = \frac{3.800.000}{2.456,6491} = 1.546,822 \qquad \text{[LVIII]}$$

$$\lambda_{5.18} = \frac{C_{18}}{\beta_{5.18}} = \frac{2.500.000}{730,6835} = 3.421,45$$

$$\lambda_{6.19} = \frac{C_{19}}{\beta_{6.19}} = \frac{2.900.000}{2.039,3584} = 1.422,015$$

Vamos a comprobar si esta solución es óptima. Para ello dispondremos la tabla del Método de Dantzig [LIX] análogamente a como hicimos en [LV], aunque ahora nos resultará más simplificada por operar con acciones que tienen las mismas características y nominal dentro de cada sociedad. En la fila primera escribimos los valores de las α' de la función de rendimiento [LVI].

TABLA DEL METODO DE DANTZIG (LIX)

6	7	8
232,3886	$P_{5.8}$	2.586,719
117,5665	$P_{4.14}$	4.331,740
546,1560	$P_{6.16}$	1.546,822
82,0366	$P_{5.18}$	3.421,450
303,4562	$P_{6.19}$	1.422,015

116,4447	113,4833	124,6211	135,1768	134,0837	232,3886
P_{08}	P_{18}	P_{28}	P_{38}	P_{48}	P_{58}
0,726678	0,748587	0,741164	0,717184	0,731108	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
168.8716	173,9630	172.2380	166,6653	169,9011	232,3886
+	+	+	+	+	0

223,1481	199,5045	0	105,6243	97,7208	102,9527	100,3940	117,5665	155,7470	159,5480	158,4495	0	157,0750
P_{68}	P_{78}	P_{8}	$P_{0\cdot 14}$	$P_{1\cdot 14}$	$P_{2\cdot 14}$	$P_{3\cdot 14}$	$P_{4\cdot 14}$	$P_{5\cdot 14}$	$P_{6\cdot 14}$	$P_{7\cdot 14}$	P_{14}	$P_{0\cdot 16}$
1,058506	0,771194	0,000720	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0,919911	0,859058	0,901336	0,862199	1	1,430655	1,634066	1,147872	0,001083	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.552065
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
245,9847	179,2166	0,16731	108,1507	100,9964	105,9669	101,3657	117,5665	168,1971	192,1114	134,9512	0,1273	301,5136
+	−	+	+	+	+	+	+					

141,3860	151,5231	170,4875	220,9905	302.3606	546.1560	270,4242	0	48,2179	49,9114	46,4760	51,5144	60,2357	82,0366	109,3344
$P_{1'16}$	$P_{2'16}$	$P_{3'16}$	$P_{4'16}$	$P_{5'16}$	$P_{6'16}$	$P_{7'16}$	P_{16}	$P_{0'18}$	$P_{1'18}$	$P_{2'18}$	$P_{3'18}$	$P_{4'18}$	$P_{5'18}$	$P_{6'18}$
0 0 0,554148 0 0	0 0 0.529379 0 0	0 0 0.541378 0 0	0 0 0.639825 0 0	0 0 0.761737 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0,591549 0 0	0 0 0,000107 0 0	0 0 0 0,860417 0	0 0 0 0,861515 0	0 0 0 0,774232 0	0 0 0 0,822714 0	0 0 0 0,875394 0	0 0 0 1 0	0 0 0 1,344562 0
302,6512	289,1235	297,3153	349,4140	416,0272	546,1560	323,0780	0,2222	70,5805	70,6705	63,5107	67,4877	71,8090	82,0366	110,2952
+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	0	+

105,9227	0	133,2673	133,0072	129,7063	136,0729	175,2918	248,2440	303,4562	131,4687	0	x'	1
$P_{7\cdot 18}$	P_{18}	$P_{0\cdot 19}$	$P_{1\cdot 19}$	$P_{2\cdot 19}$	$P_{3\cdot 19}$	$P_{4\cdot 19}$	$P_{5\cdot 19}$	$P_{6\cdot 19}$	$P_{7\cdot 19}$	P_{19}	P	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	3
1,086003	0,001368	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
0	0	0,742037	0,702671	0,656350	0,646008	0,703911	0,844391	1	0,927716	0,00049035		
89,0854	0,1122	225,1757	213,2298	199,1734	196,0351	213,6061	256,2356	303,4562	281,5211	0,14879	R	4
−	+	+	+	+	+	+	+	0	+	+	W	5

En la fila segunda consignaremos los vectores P correspondientes a cada uno de los coeficientes de la fila primera.

En las columnas de la izquierda (6, 7 y 8) anotaremos respectivamente los coeficientes α', los vectores y los valores de las "landas" que corresponden a la solución inicial [LVIII].

Para calcular los valores de las x del cuadro central 3 recurriremos a las fórmulas [LIII] y [LIV] de 3.4.1. y así hallaremos

$$x_{58.08} = \frac{\beta_{08}}{\beta_{58}} = \frac{1.008,5175}{1.387,8443} = 0,726678$$

$$x_{58.18} = \frac{\beta_{18}}{\beta_{58}} = \frac{1.038,9235}{1.387,8443} = 0,748587$$

$$x_{58.28} = \frac{\beta_{28}}{\beta_{58}} = \frac{1.028,6215}{1.387,8443} = 0,741164$$

... ...

$$x_{58.8} = \frac{1}{\beta_{58}} = \frac{1}{1.378,8443} = 0,000720$$

Valores del primer "escalón" que puede ser no nulo. Del mismo modo continuaríamos hallando los valores del segundo escalón y de los restantes hasta el quinto.

En la fila cuarta anotamos los valores de las R'_{ij} que se forman multiplicando cada coeficiente de 6 por la x correspondiente del cuadro tercero.

Por último, en la fila quinta escribimos los signos de los valores de $W_{ij} = R'_{ij} - \alpha'_{ij}$, diferencia entre las "erres" de la fila cuarta y los coeficientes α' de la primera. Observamos, así, que los signos correspondientes a $W_{7.8}$, $W_{7.14}$, $W_{7.18}$ son negativos.

La solución inicial dada en [LVIII] no es óptima y habremos de buscar otra. Para lograrlo apliquemos el procedimiento que vimos en 3.4.1.1.

Formemos las relaciones

$$\frac{\lambda_{kj}}{x_{kj.pq}}$$

es decir,

$$\frac{\lambda_{58}}{x_{58.78}}; \quad \frac{\lambda_{4.14}}{x_{4.14-7.14}}; \quad \frac{\lambda_{5.18}}{x_{5.18-7.18}}$$

E introduciremos como nuevas soluciones:

$$\lambda_{7.8} = \frac{3.800.000}{1.070,2975} = 3.550,41$$

$$\lambda_{7.14} = \frac{4.000.000}{1.059,9618} = 3.773,72$$

$$\lambda_{7.18} = \frac{2.500.000}{793,5250} = 3.150,49$$

Desechando, por lo tanto, de la solución anterior λ_{58}, $\lambda_{4.14}$ y $\lambda_{5.18}$, formaremos la nueva Tabla de Dantzig [LX] para probar la nueva solución, del mismo modo que lo hicimos anteriormente. Los signos de la fila quinta de esta nueva tabla son todos no negativos, por lo que la solución última de la columna *8* es una óptima.

Es aconsejable, por lo tanto, que la inversión se realice comprando las siguientes acciones en las fechas que se indican.

A principios del año 1957:

1.547	Acciones de la Sociedad	16	por valor de.. ...	3.800.436,1577
1.422	— —	19	— —	2.899.964,8008

A principios del año 1958:

3.550	Acciones de la Sociedad	8	por valor de.. ...	3.799.556,1250
3.773	— —	14	— —	3.999.235,8714
3.150	— —	18	— —	2.499.603,7500

Total de la inversión 16.998.796,7049

TABLA DEL METODO DE DANTZIG (LX)

			116,4447	113,4833	124,6211	135,1768	134,0637	232,3886	223,1481	199,5045	0	105,6243
6	*7*	*8*	P_{08}	P_{18}	P_{28}	P_{38}	P_{48}	P_{58}	P_{68}	P_{78}	P_{8}	$P_{0.14}$
199,5045	$P_{7.8}$	3.550,41	0,942277	0,970685	0,900965	0,929966	0,948021	1,296690	1,372554	1	0,0009343	0
153,4495	$P_{7.14}$	3.773,72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,801406
546,1560	$P_{6.16}$	1.546,94	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
105,9227	$P_{7.16}$	3.150,49	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
303,4562	$P_{6.19}$	1.422,01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			187,9885	193,6562	179,7465	185,5324	189,1344	258,6954	273,8306	199,5045	0,1995	126,9823
			+	+	+	+	+	+	+	0	+	+

97,7208	102,9527	100,394	155,7470	117,5665	159,5480	158,4495	0	157,0750	161,3860	151,5231	170,4875	220.9906	302,3606	546,1560
$P_{1.14}$	$P_{2.14}$	$P_{3.14}$	$P_{4.14}$	$P_{5.14}$	$P_{6.14}$	$P_{7.14}$	P_{14}	$P_{0.16}$	$P_{1.16}$	$P_{2.16}$	$P_{3.16}$	$P_{4.16}$	$P_{5.16}$	$P_{6.16}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,74839	0,785223	0,751128	0,871177	1,246354	1,423561	1	0,0009434	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0,552065	0,554148	0,529379	0,544378	0,639325	0,761737	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
118,5821	124,4181	119,0158	138,0375	197,4841	22,5562	158,4495	0,1495	301,5136	302,6512	289,1235	297,3153	349,444	416,0272	546,1560
+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	0

210,4242	0	48,2179	49,9114	46,4760	51,5144	60,2357	82,0366	109,3344	105,9227	0
$P_{7.16}$	P_{16}	$P_{0.18}$	$P_{1.18}$	$P_{2.18}$	$P_{3.18}$	$P_{4.18}$	$P_{5.18}$	$P_{6.18}$	$P_{7.18}$	P_{18}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,591549	0,0004070	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0,792278	0,793290	0,712919	0,757561	0,806069	0,920807	1,238082	1	0,001260
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
323,0780	0,2222	83,9202	84,0274	75,5143	80,2429	85,3810	97,5343	131,1409	105,9227	0,1334
+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	+

133,2673	133,0072	129,7063	136,0729	175,2918	248,2440	303,4562	131,4687	0	α'	1
$P_{0.19}$	$P_{1.19}$	$P_{2.19}$	$P_{3.19}$	$P_{4.19}$	$P_{5.19}$	$P_{6.19}$	$P_{7.19}$	P_{19}	P	2
0 0 0 0 0,742037	0 0 0 0 0,702671	0 0 0 0 0,656350	0 0 0 0 0,646008	0 0 0 0 0,703911	0 0 0 0 0,844391	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0,927716	0 0 0 0 0,0004903	X	3
225,1757	213,2293	199,1734	196,0351	213,6061	256,2356	303,4562	281,5211	0,1487	R	4
+	+	+	+	+	+	0	+	+	W	5

El rendimiento que obtendrá la sociedad inversora del capital que emplea en 1957 será:

$$R' = 1.547 \,.\, 546{,}1560 + 1.422 \,.\, 303{,}4562 = 1.276.418{,}0484 \text{ pesetas}$$

Como las inversiones de ese año ascienden a 6.700.400,9585 pesetas, la rentabilidad será del 19,049 por ciento.

El rendimiento total que obtendrá en 1958 vendrá dado por:

$$R' = 3.550 \,.\, 199{,}5043 + 3.773 \,.\, 1.059{,}9618 + 1.547 \,.\, 270{,}4242 + \\ + 3.150 \,.\, 105{,}9227 + 1.422 \,.\, 131{,}4687 = 2.245.021{,}4623 \text{ pesetas}$$

lo que supone una rentabilidad del 13,2069 por cien, sobre el capital total invertido 16.998.796,7049 pesetas. Pesetas todas ellas de 1951.

Es de esperar que en años sucesivos se mantengan rentabilidades también altas, siempre que se sigan dando las mismas espectativas, tendencias y supuestos, lo cual es probable que suceda, al menos a corto plazo.

Pretendemos que el método expuesto en este trabajo a título de introducción de las técnicas de programación lineal en el campo financiero sea tan sólo un punto de partida susceptible de numerosos perfeccionamientos.

A primera vista observamos ya que si acortamos los períodos de cuenta y en vez de operar con índices de renta efectiva que representan promedios anuales de dicha renta, operamos con índices trimestrales o mensuales, la aproximación a la realidad es mucho mayor, el estudio de los ciclos mucho más preciso y la determinación de la época de inversión mucho más concreta.

Al hacerlo, sin embargo, se aumenta el número de variables del programa de decisión, de modo tal que se necesita para su resolución el empleo de cerebros electrónicos y de un equipo especializado que maneje las máquinas y desarrolle el método.

RENTA REAL DE LAS ACCIONES DE LAS SOCIEDADES QUE SE CITAN
ANEXO I.—AÑO 1951

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) $r = \frac{r' 100}{I_0}$ %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	95,—	—	—	95,—	2.133,3	4,4532	4,4532	0,044532
2	58,17	196,—	—	254,17	1.506,5	16,8715	16,8715	0,168715
3	35,13	2,—	—	37,13	601,5	6,1727	6,1727	0,061727
4	42,85	—	—	42,85	1.060,0	4,0424	4,0424	0,040424
5	59,—	268,—	—	327,—	1.901,5	17,1969	17,1969	0,171969
Hidroeléctricas:								
6	27,13	—	—	27,13	778,0	3,4870	3,4870	0,034870
7	27,39	—	—	27,39	680,0	4,0279	4,0279	0,040279
8	47,50	97,50	—	145,—	1.005,0	14,4278	14,4278	0,144278
Minero-Metalúrgicas:								
9	54,05	—	—	54,05	402,6	13,4252	13,4252	0,134252
10	55,—	—	—	55,—	1.281,0	4,2861	4,2861	0,042861
11	61,70	—	—	61,70	637,2	9,6829	9,6829	0,096829
Monopolios:								
12	28,80	—	—	28,80	810,0	3,5555	3,5555	0,035555
13	31,14	—	—	31,14	808,0	3,8563	3,8563	0,038563
14	37,14	60,50	—	97,84	846,5	11,5582	11,5582	0,115582
Transportes.								
15	32,88	42,—	—	74,88	870,0	8,6069	8,6069	0,086069
Químicas:								
16	51,90	199,—	—	250,90	1.351,5	18,5645	18,5645	0,185645
17	75,—	660,—	—	735,—	2.406,5	30,5422	30,5422	0,305422
Alimentación:								
18	29,83	—	—	29,83	626,5	4,7614	4,7614	0,047614
19	63,28	—	—	63,28	1.508,0	4,1963	4,1963	0,041963

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media del último trimestre de 1950.

(***) Los valores de L_1 correspondientes a cada año expresan el índice de coste de la vida en el conjunto de las capitales españolas, tomado de los Anuarios del Instituto Nacional de Estadística. Hemos efectuado en ellos el oportuno cambio de base $I_0 = 100$ (1951).

ANEXO II.—AÑO 1952

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) $r = \frac{r' 100}{I_1}$ %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	97,50	—	—	97,50	2.165,—	4,5035	4,5949	0,045949
2	58,17	71,50	—	129,67	1.490,—	8,7027	8,8794	0,088794
3	35,13	—	—	35,13	610,—	5,7588	5,8757	0,058757
4	45,80	—	—	45,80	1.040,—	4,4038	4,4933	0,044933
5	60,—	181,—	—	241,—	1.820,—	13,2417	13,5106	0,135106
Hidroeléctricas:								
6	30,26	129,—	—	159,26	665,—	23,9489	24,4351	0,244351
7	31,33	11,60	—	42,93	675,—	6,3594	6,4885	0,064885
8	50,—	—	—	50,—	1.015,—	4,9261	5,0261	0,050261
Minero-Metalúrgicas:								
9	66,60	—	—	66,60	407,—	16,3636	16,6958	0,166958
10	55,—	130,30	—	185,30	1.280,—	14,4766	14,7704	0,147704
11	61,70	—	—	61,70	640,—	9,6406	9,8364	0,098364
Monopolios:								
12	29,40	—	—	29,40	802,5	3,6635	3,7378	0,037379
13	31,14	6,—	—	37,14	810,—	4,5852	4,6783	0,046783
14	36,46	66,—	—	102,46	775,—	13,2206	13,4890	0,134890
Transportes:								
15	25,—	23,25	—	48,25	805,—	5,9938	6,1154	0,061154
Químicas:								
16	51,90	—	—	51,90	1.330,—	3,9022	3,9815	0,039815
17	75,—	665,—	—	740,—	2,075,—	35,6626	36,3867	0,363867
Alimentación:								
18	38,08	5,—	—	43,08	615,—	7,0049	7,1471	0,071471
19	27,75	81,—	—	108,75	1.400,—	7,7678	7,9256	0,079256

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media último trimestre 1951.

(***) $I_1 = 98,01$.

ANEXO III.—AÑO 1953

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) $r = \frac{r' 100}{I_2}$ %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	108,60	—	—	108,60	2.429,25	4,4700	4,4879	0,044879
2	57,33	115,—	—	172,33	1.496,55	11,5150	11,6313	0,116313
3	35,12	20,50	—	55,62	645,80	8,6126	8,6472	0,086472
4	47,63	—	—	47,63	1.138,60	4,1832	4,2000	0,042000
5	61,—	93,—	—	154,—	1.981,75	7,7700	7,8012	0,078012
Hidroeléctricas:								
6	32,89	100,—	1	134,89	585,15	23,0520	23,1446	0,231446
7	32,88	—	—	32,88	589,80	5,5748	5,5971	0,055971
8	57,50	—	—	57,50	1.020,95	5,6320	5,6546	0,056546
Minero-Metalúrgicas:								
9	50,15	—	—	58,15	478,90	12,1424	12,1911	0,121911
10	55,—	—	—	55,—	1.282,70	4,2878	4,3050	0,043050
11	51,—	—	—	51,—	858,80	5,9385	5,9623	0,059623
Monopolios:								
12	28,70	49,—	—	76,70	785,95	9,8861	9,9259	0,099258
13	38,92	—	—	38,92	800,—	4,8650	4,8845	0,048845
14	36,94	61,—	1	98,94	826,10	11,9767	12,0248	0,120248
Transportes:								
15	40,—	—	—	40,—	714,45	5,5987	5,6212	0,056212
Químicas:								
16	51,90	37,—	1	89,90	1.290,80	6,9647	6,9926	0,069926
17	75,—	—	—	75,—	1.616,35	4,6400	4,6586	0,046586
Alimentación:								
18	38,25	—	1	39,25	561,50	6,9902	7,0103	0,070103
19	20,—	75,—	—	95,—	1.328,55	7,1506	7,1793	0,071793

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media último trimestre 1952.

(***) $I_2 = 99,60$.

ANEXO IV.—AÑO 1954

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) $r = \frac{r' 100}{I_3}$ %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	115,20	—	—	115,20	2.933,25	3,9270	3,8950	0,038950
2	56,55	94,40	—	150,95	1.719,65	8,7770	8,7056	0,087056
3	34,84	—	—	34,84	675,75	5,1557	5,1138	0,051138
4	44,72	—	—	44,72	1.471,35	3,0393	3,0146	0,030146
5	63,—	120,80	—	183,80	2.077,15	8,8480	8,7760	0,087760
Hidroeléctricas:								
6	32,62	—	—	32,62	537,30	6,0767	6,0272	0,060272
7	32,62	—	—	32,62	574,25	5,6804	5,6342	0,056342
8	57,50	111,50	2,5	171,50	1.000,07	17,1480	17,0085	0,170085
Minero-Metalúrgicas:								
9	42,73	—	—	42,73	539,20	7.9245	7.8600	0,078600
10	55,—	33,30	—	88,30	1.172,45	7,5392	7,4699	0,074699
11	60,—	62,—	—	122,—	904,20	13,4925	13,3827	0,133827
Monopolios:								
12	40,—	—	—	40,—	794,50	5,0346	4,9936	0,049936
13	38,25	—	—	38,25	823,30	4,5957	4,5583	0,045583
14	36,45	76,65	—	113,10	799,95	14,1380	14,0230	0,140230
Transportes:								
15	40,—	—	—	40,—	615,50	6,4988	6,4459	0,064459
Químicas:								
16	51,90	77,—	1	129,90	1.343,70	9,6673	9,5887	0,095887
17	75,—	—	—	75,—	1.355,80	5,5318	5,4868	0,054868
Alimentación:								
18	38,25	—	—	40,25	604,40	6,6595	6,6053	0,066053
19	62,25	—	—	62,25	1.323,70	4,7027	4,6644	0,046644

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media último trimestre 1953.

(***) $I_3 = 100{,}82$.

ANEXO V.—AÑO 1955

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) r en %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	122,44	—	—	122,44	3.534,71	3,4600	3,2990	0,032990
2	56,60	112,46	—	169,06	2.213,24	7,6380	7,2826	0,072826
3	34,02	305,07	—	339,09	818,72	41,4170	39,4898	0,394898
4	47,11	1.248,74	—	1.295,85	2.244,64	57,7300	49,3230	0,493230
5	67,24	222,70	—	289,94	2.582,13	11,2200	10,6979	0,106979
Hidroeléctricas:								
6	34,79	10,70	2	47,49	561,07	8,4640	8,0702	0,080702
7	38,21	49,39	—	87,60	604,92	14,4810	13,8072	0,138072
8	57,55	—	—	57,55	1.060,47	5,4260	5,1735	0,051735
Minero-Metalúrgicas:								
9	49,68	—	—	49,68	602,22	8,2494	7,7656	0,077656
10	54,95	101,12	—	156,07	1.256,10	12,4249	11,8467	0,118467
11	51,03	25,64	1	77,67	1.060,57	7,3230	6,9823	0,069823
Monopolios:								
12	39,96	—	—	39,96	856,10	4,6677	4,4505	0,044505
13	38,28	172,25	—	210,53	884,59	23,8000	22,6926	0,226926
14	36,53	134,33	1	171,86	965,10	17,8074	16,9788	0,169788
Transportes:								
15	40,03	—	—	40,03	727,97	5,4980	5,2422	0,052422
Químicas:								
16	50,96	121,01	1	172,97	1.641,50	10,5312	10,0411	0,100411
17	74,92	98,94	—	173,86	1.417,44	12,2600	11,6895	0,116895
Alimentación:								
18	38,26	—	1	39,26	668,56	5,8720	5,5988	0,055988
19	62,28	58,08	—	120,36	1.500,33	8,0200	7,6468	0,076468

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media del último trimestre del año 1954.

(***) Se tiene en cuenta $I_4 = 104,88$.

Sociedades	(*) $d-u$	(*) $c'-g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) r en %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	125,5	—	—	125,50	4.126,15	3,0410	2,7389	0,027389
2	57,55	113,60	—	171,10	2.499,15	6,8460	6,1659	0,061659
3	34,05	—	—	34,05	1.092,50	3,1167	2,8071	0,028071
4	52,20	—	—	52,20	2.873,65	1,8165	1,6360	0,016360
5	65,00	362,—	—	427,00	3.055,65	13,9740	12,5857	0,125857
Hidroeléctricas:								
6	34,80	104,80	—	139,60	751,35	18,5790	16,7333	0,167333
7	43,75	—	—	43,75	877,40	4,9863	4,4909	0,044909
8	60,—	283,—	2.5	351,50	1.535,55	22,8900	20,6160	0,206160
Minero-Metalúrgicas:								
9	53,45	—	—	53,45	710,22	7,5258	6,7781	0,067781
10	55,—	201,10	—	256,10	1.751,45	14,6220	13,1694	0,131694
11	51,—	127,60	—	178,60	1.280,40	13,9487	12,5630	0,125630
Monopolios:								
12	40,—	—	—	40,—	1.197,55	3,3401	3,0083	0,030083
13	38,25	—	—	38,25	1.091,20	3,5053	3,1571	0,031571
14	36,25	199,—	—	235,25	1.461,70	16,0942	14,4953	0,144953
Transportes:								
15	40,—	43,—	1	84,—	892,45	9,4122	8,4772	0,084772
Químicas:								
16	51,—	121,20	—	173,20	2.070,50	8,3651	7,5341	0,075341
17	75,—	104,20	—	179,20	1.867,40	9,5962	8,2792	0,082792
Alimentación:								
18	38,25	70,—	2	110,25	808,50	13,6363	12,2816	0,122816
19	62,25	251,—	—	313,25	1.905,30	16,4409	14,8076	0,148076

(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media del último trimestre de 1955.

(***) Se tienen en cuenta $I_5 = 111{,}03$.

ANEXO VII—AÑO 1957

Sociedades	(*) $d - u$	(*) $c' - g'$	(*) p	ρ	(**) $\frac{c \cdot v}{100}$	r'	(***) r en %	r en tanto por 1
Bancarias:								
1	136,—	—	—	136,—	4.333,17	3,1386	2,5517	0,025517
2	56,55	—	—	56,55	2.758,33	2,0501	1,6668	0,016668
3	37,90	—	—	37,90	1.376,97	2,7524	2,2377	0,022377
4	57,18	—	—	57,18	2.974,88	1,9221	1,5627	0,015627
5	69,50	255,16	—	324,66	4.396,78	7,3840	6,0033	0,060033
Hidroeléctricas:								
6	36,50	150,60	—	187,10	1.169,16	16,0029	13,0105	0,130105
7	50,—	53,12	—	103,12	1.390,78	7,4145	6,0281	0,060281
8	60,—	176,94	1	237,94	1.800,62	13,2143	10,7434	0,107434
Minero-Metalúrgicas:								
9	100,—	—	—	100,—	641,28	15,5938	12,6779	0,126779
10	55,—	238,51	—	393,51	2.474,79	15,9007	12,9274	0,129274
11	40,80	—	—	40,80	1.382,88	2,9504	2,3987	0,023987
Monopolios:								
12	40,—	324,66	—	364,66	1.208,24	30,1811	24,5375	0,245375
13	38,25	—	—	38,25	1.002,20	3,8166	3,1029	0,031029
14	35,53	99,75	1	136,31	1.849,50	7,3701	5,9919	0,059919
Transportes:								
15	40,—	—	—	40,—	1.090,72	3,6673	2,9815	0,029815
Químicas:								
16	50,85	773,50	—	824,35	3.011,14	27,3767	22,2574	0,222574
17	75,—	99,69	—	174,69	2.113,64	8,2649	6,7194	0,067194
Alimentación:								
18	42,50	77,52	—	120,02	1.204,21	9,9667	8,1030	0,081030
19	97,25	238,46	5	340,71	2.499,66	13,6302	11,0815	0,110851

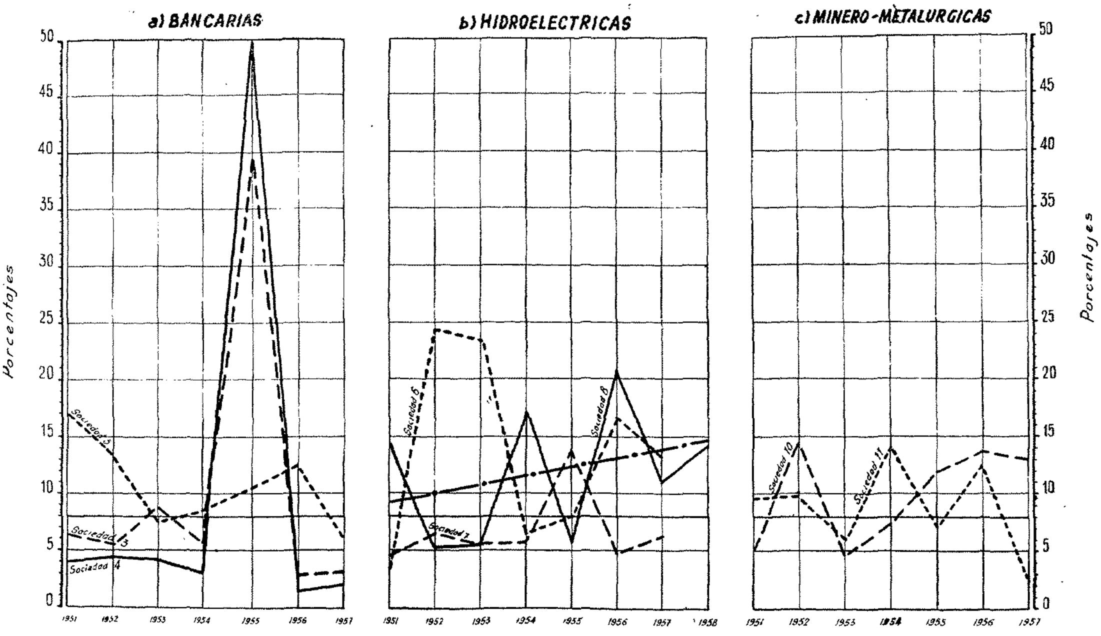
(*) Datos facilitados por el Servicio de Estudios del Banco Urquijo.

(**) Cotización media del último trimestre de 1956.

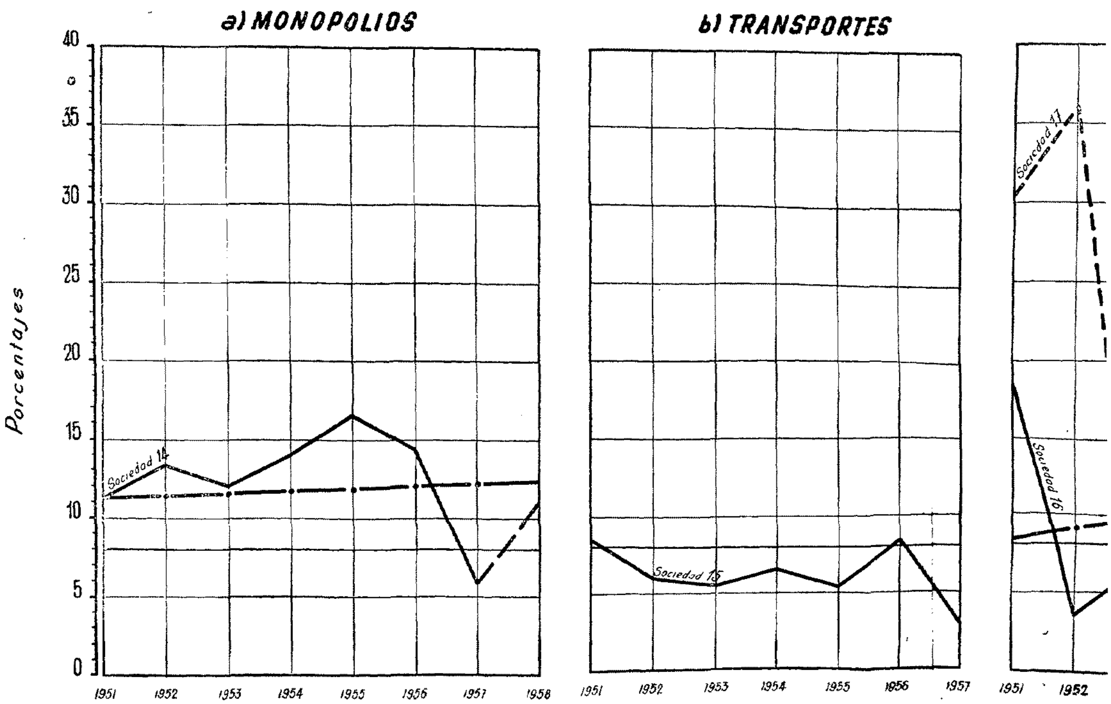
(***) Se tienen en cuenta $I_6 = 123$.

ANEXO
N.º VIII

Renta real por cada 100 ptas. invertidas en acciones de cada Sociedad

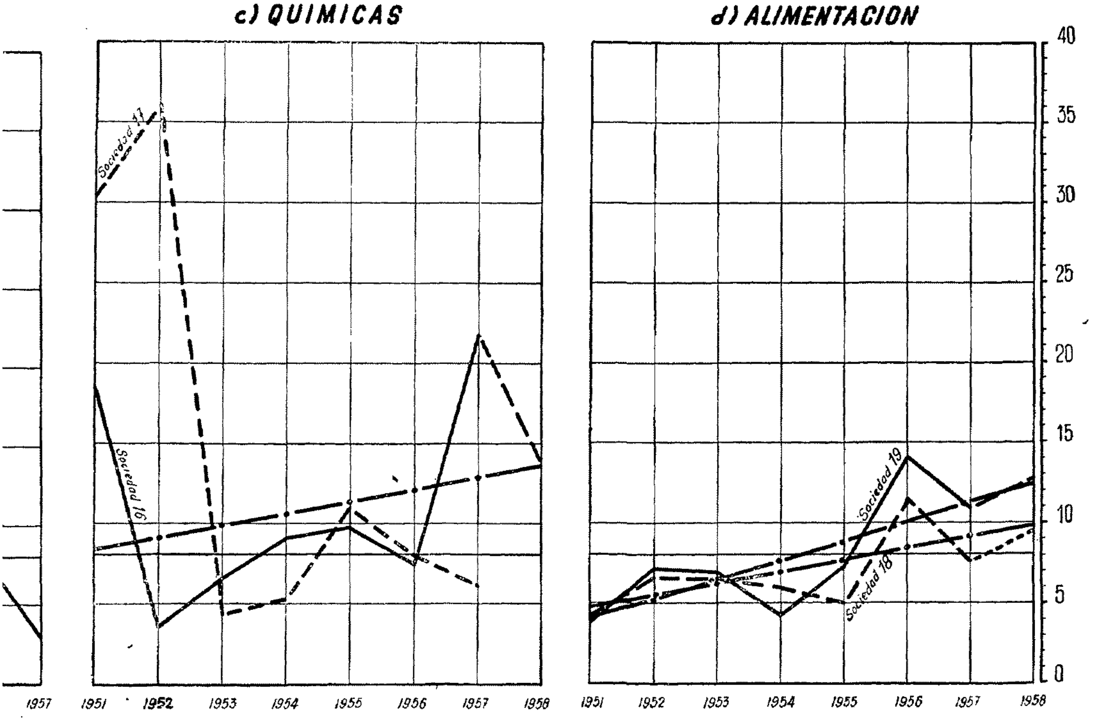


Renta real por cada 100 ptas. invertidas



invertidas en acciones de cada Sociedad

ANEXO N.º IX



ANEXO X

CONTRASTE NO PARAMETRICO DE HIPOTESIS PARA LAS TENDENCIAS DE LAS SERIES DE RENTA EFECTIVA CONTENIDAS EN EL ANEXO XII

Sociedad 8.

Años	Renta efectiva %	Rango	s_i (*)
1951	14,4278	6	2
1952	5,0261	1	6
1953	5,6546	3	4
1954	17,0085	7	1
1955	5,1535	2	3
1956	20,6160	8	0
1957	10,7434	4	1
1958	14,0421	5	0

$11 = \sum s_i = P$

$$S = 2\,P - \frac{1}{2}(n + 1)\,n = 34 - 28 = 6\,.$$

$$\tau = \frac{2\,S}{(n + 1)\,n} = \frac{3}{14} = 0{,}214\,.$$

Las tablas de Kendall (**) nos dan, para $S = 6$ y $n = 8$, una probabilidad de 0,274.

Sociedad 14.

Años	Renta efectiva %	Rango	s_i
1951	11,5582	3	5
1952	13,4890	5	3
1953	12,0248	4	3
1954	14,0230	6	2
1955	16,9788	8	0
1956	14,4953	7	0
1957	5,9919	1	1
1958	11,2612	2	0

$14 = \sum s_i = P$

$S = 0\,.$
$\tau = 0\,.$

Las tablas nos dan, para $n = 8$ y $S = 0$, una posibilidad de 0,548.

(*) Ver 4.2.
(**) Tablas de Kendall en *Rank Correlation Methods*, Londres 1955, página 171.

ANEXO XI

Sociedad 16.

Años	Renta efectiva %	Rango	s_i
1951	18,5645	7	1
1952	3,9815	1	6
1953	6,9926	2	5
1956	9,5887	4	3
1955	10,0411	5	2
1956	7,5341	3	2
1957	22,2574	8	0
1958	14,0183	6	0
			$19 = \sum s_i = P$

$S = 10$.

$$\tau = \frac{5}{14} = 0{,}357\,.$$

Las tablas nos dan, para $n = 8$ y $S = 10$, una probabilidad de 0,138.

Sociedad 18.

Años	Renta efectiva %	Rango	s_i
1951	4,7614	1	7
1952	7,1471	5	3
1953	7,0183	4	3
1954	6,6053	3	3
1955	5,5988	2	3
1956	12,2816	8	0
1957	8,1030	6	1
1958	10,0557	7	0
			$20 = \sum s_i = P$

$S = 12$.
$\tau = 0{,}428$.

Las tablas nos dan, para $n = 8$ y $S = 12$, una probabilidad de 0,089.

Sociedad 19.

Años	Renta efectiva %	Rango	s_i
1951	4,1963	1	7
1952	7,9256	5	3
1953	7,1793	3	4
1954	4,6644	2	4
1955	7,6468	4	3
1956	14,8076	8	0
1957	11,0815	6	1
1958	13,1983	7	0
			$22 = \sum s_i = P$

$S = 16$.
$\tau = 0{,}333$.

Las tablas nos dan, para $n = 8$ y $S = 16$, una probabilidad de 0,031.

ANEXO XII

Rentabilidad efectiva de las acciones seleccionadas, en tanto por ciento

$$r = \frac{r' . 100}{I_1}$$

Sociedades	Años							
	1950-0	1952-1	1953-2	1954-3	1955-4	1956-5	1957-6	1958-7 (*)
8	14,4278	5,0261	5,6546	17,0085	5,1735	20,6160	10,7434	14,0421
14	11,5582	13,4890	12,0248	14,0230	16.9788	14,4953	5.9919	11,2612
16	18,5645	3,9815	6,9926	9,5887	10,0411	7,5341	22,2574	14,0183
18	4,7614	7,1471	7,0103	6,6053	5.5988	12,2816	8,1030	10,0557
19	4,1963	7,9256	7,1793	4,6644	7,6468	14,8076	11,0815	13,1983

(*) Valores extrapolados linealmente.

ANEXO XIII a)

Coeficientes de las funciones de rendimiento.
(Renta efectiva media por acción en pesetas de 1951.)

$$\alpha'_{ij} = \frac{c_{ij} \cdot v_j}{100} \cdot \frac{\sum_{i=h}^{n} r_{ij}}{n - h + 1}$$

Sociedades	Años 1951-0	1952-1	1953-3	1954-3	1955-4	1956-5	1957-6	1958-7
8	116,4447	113,4833	124,6211	135,1768	134,0837	232,3886	223,1481	199,5045
14	105,6243	97,7208	102,9527	100,3950	117,5665	155,7470	159,5480	158,4495
16	157,0750	141,3860	151,5231	170,4875	220,9906	302,3606	546,1560	270,4242
18	48,2179	49,9114	46,4760	51,5144	60,2357	82,0366	109,3340	105,9227
19	133,2693	133,0072	129,7063	136,0729	175,2918	248,2440	303,4561	131,4687

Para hallar los valores de las "alfas primas" del cuadro, hemos procedido de la siguiente forma:

$$\alpha'_{08} = \frac{c_{08} \cdot v_8}{100} \; \frac{(r_{08} + r_{18} + r_{28} + r_{38} + r_{48} + r_{58} + r_{68} + r_{78})}{8} =$$

$$= 1.005 \cdot \frac{14,4279 + 5,0261 + 5,6546 + 17,0085 + 5,1735 + 20,6160 + 10,7436 + 14,0421}{8} = \frac{1.005 \cdot 92,6923}{8} = 116,4447$$

$$\alpha'_{18} = \frac{c_{18} \cdot v_8}{100} \; \frac{(r_{18} + r_{28} + r_{38} + r_{48} + r_{58} + r_{68} + r_{78})}{7} =$$

$$= 1.015 \cdot \frac{5,0261 + 5,6546 + 17,0085 + 5,1735 + 20,6160 + 10,7436 + 14,0421}{7} = \frac{1.015 \cdot 78,2644}{7} = 113,4833$$

ANEXO XIII b)

Coeficientes de las funciones de coste

$$\beta_{ij} = \left(\frac{c_{ij} \cdot v}{100} + g_{ij}^{(*)} \right) \frac{100}{I_i\,(**)}$$

Sociedades	Años 1951-0	1952-1	1953-2	1954-3	1955-4	1956-5	1957-6	1958-7
8	1.008,5175	1.038,9235	1.028,6215	955,3409	1.014,6652	1.387,8443	1.469,0421	1.070,2975
14	849,4600	793,2667	842,3073	796,1672	923,4145	1.321,0877	1.058,9211	1.059,9211
16	1.356,2302	1.361,3481	1.300,4990	1.337,3460	1.570,5989	1.871,3226	2.456,6491	1.453,2289
18	628,6927	629,4955	565,7191	601,1438	639,6360	730,6835	982,4493	793,5250
19	1.513,2780	1.432,9980	1.317,4406	1.317,4406	1.435,5264	1.722,0144	2.039,3564	1.891,9442

(*) Como todos los valores considerados exceden a las 500 pesetas efectivas, calculamos en un 3,5 por 1.000 los gastos originados por la compra del valor (póliza, timbre y corretaje de agente).

(**) Se tienen en cuenta para los respectivos años las mismas I_i que en los anexos de I al VII. La I_7 se ha estimado tomando el promedio de los índices de coste de vida en capitales, que publica el Instituto Nacional de Estadística en su Boletín mensual, para el primer cuatrimestre del año 1958.

APENDICE I

UN CONTRASTE DE ALEATORIEDAD PARA LOS CICLOS

Cuando no se pueden hacer, *a priori*, suposiciones acerca de la distribución de las series cronológicas, atribuyendo a dicha distribución una forma conocida —normal, binomial, de Poison, etc.— juzgamos necesario efectuar un contraste no perámétrico para los ciclos, con el fin de contrastar la hipótesis de aleatoriedad de los datos.

El método propuesto por W. A. Wallis y G. H. Moore (1) se basa exclusivamente en consideraciones combinatorias del número de fases y puntos de retorno observados. A partir de los signos de las primeras diferencias de las desviaciones entre los valores de la serie inicial (datos) y los valores de la serie ajustada o suavizada, se forman rachas de distintas longitudes.

Si la serie observada tiene distribución aleatoria independiente, el número esperado de rachas de longitud i debe ser:

$$\mu = \frac{2\,(i^2 + 3\,i + 1)\;\;(n - i - 2)}{(i + 3)\;!}$$

$$\text{para } i = 1;\; \mu_1 = \frac{5\,(n - 3)}{12}$$

$$\text{''}\quad i = 2;\; \mu_2 = \frac{11\,(n - 4)}{60}$$

$$\text{''}\quad i > 2;\; \mu_3 = \frac{4\,n - 21}{20}$$

Comparando las frecuencias empíricas deducidas de la serie inicial, con las frecuencias esperadas (que se expresan en las fórmulas anteriores), podemos establecer un contraste.

$$\chi^2_p = \frac{(v_1 - \mu_1)^2}{\mu_1} + \frac{(v_2 - \mu_2)^2}{\mu_2} + \frac{(v_3 - \mu_3)^3}{\mu_3}$$

(1) "A significance test for time series analysis". Journal of the American Statistical Association.—Vol. 36.—Ayo 1941, págs. 401 y sigs.

donde,

v_1 es el número de rachas de longitud 1 observado en las series empíricas.

v_2 es el número de rachas de longitud 2 observado en las series empíricas.

v_3 es el número de rachas de longitud mayor de 2 observado en las series empíricas.

Si $\chi^2_p < 6{,}3$ se distribuye como $6/7\ \chi^2$ con 2 grados de libertad.

Si $\chi^2_p > 6{,}3$ se distribuye como χ^2 con 2,5 grados de liberad.

JOSÉ MARÍA IÑIGO SERRANO SANCHEZ

BIBLIOGRAFIA

ARROW. K. J.: "Mathematical models in the Social Sciences". *The Policy Sciences* (a cargo de Larner y Harold D. Lasswell). 1951.

BARANKIN, E. W.: "On Systems of Linear Equations with Application to Linear Programming and the Theory of Test of Statistical Hypotheses". *University of California Press.* 1951.

CASTAÑEDA, J.: "Introducción a la Programación Lineal", en *Revista de Ciencia Aplicada.* Mayo-junio 1954. Vol. 38.

— "Lecciones de Teoría Económica", Madrid 1947. 1.ª edición.

COWLESSE COMMISSION (Trabajos de la), en *Revista de Economía Política.* Vol. septiembre a diciembre 1957.

COLMEIRO, V. (y otros): "Investigación Operativa". *C. S. de Invest. Científicas,* Pat. Juan de la Cierva. Madrid 1952.

DANTZIG, G. B.: "Programming in a Linear Structurs", en *Econométrica.* Vol. 17, 1949.

DORFMANS, SAMUELSON Y SOLOW: "Linear Programming and Economic Analysis". Nueva York, Londres, Toronto 1958.

GIARDINA, LONGO Y RICOSA: "La Programmazione Lineare nell'industria". Turín 1954.

HITCHCOCK, F. L.: "The Distribution of a Product from Several Sours in Noumerus Localities". *Journal of Mathematics and Phisics.* Vol. 20. 1941.

HURWICZ, L.: "The Theory of Economic Behavior". Revista *American Economic.* 1945.

KENDALL, G.: "Rank Correlation Methods. Londres 1955.

KOOPMANS, T. C.: "Activity Analysis of Productions and Allocation". Nueva York 1951.

ROBERT, TRHALL y TORNHEIN: "Vector Spaces and Matrices". Nueva York-Londres 1957.

SAMUELSON, P. A.: "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming", *The American Economic Review.* XLII, 3.

SAN JUAN: "El Método del Simplex de la Programación Lineal", en *Revista de Ciencia Aplicada,* núm. 41, 1955.

SERRANO, J. M.: "Aplicaciones de la Programación Lineal al estudio de costes y rendimientos de una Biblioteca o Archivo estadístico", en Suplemento *al Boletín de Estadística núm. 9 I. N. E.* 1957.

SOLOW, R.: "On the Structure of Linear Models". *Econométrica.* Vol. 20. 1952.

TINTNER, G.: "Econometrics". Londres-Nueva York 1952.

VAJDA, S.: "Theory of Games and Linear Programming". Londres 1956.

WALD, A: "On some Systems of Ecuations of Mathematical Economic". *Econométrica.* Octubre 1951.