MINIMIZACION DE LOS VALORES EXTREMOS DE UN CONJUNTO DE FUNCIONES LINEALES SOMETIDAS A UN CONJUNTO DE DESIGUALDADES LINEALES

Introducción

Se afrontó el problema enunciado al elaborar dos modelos de programación de actividades en la zona del proyecto de regadío del Bajo Ebro, margen derecha (España), extendidas a todo el período de su evolución: veinticinco años aproximadamente (1).

Pese a su origen, el problema desborda los límites de análisis tan particular. Por ello lo hemos estudiado sin vincularlo a ningún caso concreto, aunque sí dedicando algunos párrafos a ciertas peculiaridades de sus aplicaciones (2).

Formulación del problema

Sea:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= w_1\, b_{11} + w_2\, b_{12} + \dots + w_n\, b_{1n} \\
f_2 &= w_1\, b_{21} + w_2\, b_{22} + \dots + w_n\, b_{2n} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_p &= w_1\, b_{p1} + w_2\, b_{p2} + \dots + w_n\, b_{pn}
\end{aligned}
$$

(1) Forman parte de los estudios realizados sobre ese proyecto por la sociedad Torán-Tams, S. L., para la Dirección General de Obras Hidráulicas española, en el que se aplican, *por primera vez en España*, las *técnicas* de la *programación lineal* a problemas de planificación de regadíos.

(2) El autor agradece a S. Vajda, Head of the Mathematical Group of the Admiralty Research Laboratory in Teddington (Great Britain), sus observaciones sobre los epígrafes *Formulación del problema* y *Relaciones entre las soluciones básicas de un dual simétrico y las soluciones básicas de un primal simétrico*, que permitieron mejorar la redacción de éstos.

el conjunto de funciones-objetivo cuyos extremos (f_{max} y f_{min}) se desea minimizar (3) y:

$$\begin{array}{c} a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1n} w_n \leq c_1 \\ a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{2n} w_n \leq c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} w_1 + a_{m2} w_2 + \dots + a_{mn} w_n \geq c_m \\ w_1 \geq 0 \quad , \quad w_2 \geq 0 \dots w_n \geq 0 \\ n > p \end{array}$$

el conjunto de restricciones al que se encuentran sometidas las variables w_i y las funciones-objetivo.

Multiplicando por -1 los dos miembros de las desigualdades tales como:

$$a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + \dots + a_{1n} w_n \leq c_1$$

quedan éstas de la forma

$$a'_{11} w_1 + a'_{12} w_2 + \dots + a'_{1n} w_n \geq c'_1$$

y llamando

$$H = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{p1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{p2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$W = [w_1 \, , \, w_2 \dots w_n], \qquad C = [c_1 \, , \, c_2 \dots c_m]$$

el problema se expresa matricialmente como sigue:

Minimizar los extremos de WH con $WA \geq C$, $W \geq \bar{0}$, $n > p$.

La minimización del extremo inferior (f_{min}) se reduce entonces a un problema trivial aunque enojoso: basta resolver a lo sumo p problemas ordinarios de programación lineal, uno para cada función-objetivo WH_i,

(3) La maximización daría lugar a un problema equivalente en un todo.

$i = 1, 2, \ldots p$; aquel cuya solución W dé lugar al valor de su función-objetivo que sea mínimo entre los mínimos ofrece el resultado buscado.

No ocurre así con el otro extremo (f_{max}) del conjunto funcional. Es posible que la minimización aislada de cada función-objetivo no conduzca a la solución buscada y ni siquiera a aproximaciones satisfactorias (la minimización aislada de las funciones-objetivo puede llevar a p óptimos de los que ninguno es extremo superior). Pero, además, y ello tiene su importancia, tal manera de proceder no representa el procedimiento más idóneo para llegar a los valores extremos.

Como veremos, es preferible un enfoque específico. Además, el enfoque propuesto sirve también para mejorar el proceso operatorio de la minimización del extremo inferior (se emplearían modelos y criterios de selección de vectores completamente semejantes a los expuestos en este trabajo).

Queda en definitiva formulado el siguiente planteamiento:

Minimizar el extremo superior de WH con $\mathrm{WA} \geqq \mathrm{C}$, $\mathrm{W} \geqq \bar{0}$, $n > p$.

Si se utiliza la transformación típica de un juego en un problema de programación lineal, el enunciado anterior podría expresarse así:

Minimizar v

$$\text{con} \quad \begin{array}{l} w_1 b_{11} + w_2 b_{12} + \ldots + w_n b_{1n} \leqq v \\ w_1 b_{21} + w_2 b_{22} + \ldots + w_n b_{2n} \leqq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1 b_{p1} + w_2 b_{p2} + \ldots + w_n b_{pn} \leqq v \\ \text{y} \quad \mathrm{WA} \geqq \mathrm{C}, \quad \mathrm{W} \geqq \bar{0} \end{array}$$

añadiendo p variables de holgura a las p primeras desigualdades se tendría:

Minimizar v

$$\text{con} \quad \begin{array}{l} w_1 b_{11} + w_2 b_{12} + \ldots + w_n b_{1n} + u_1 \qquad\qquad = v \\ w_1 b_{21} + w_2 b_{22} + \ldots + w_n b_{2n} \qquad + u_2 \qquad = v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1 b_{p1} + w_2 b_{p2} + \ldots + w_n b_{pn} \qquad\qquad + u_p = v \\ \text{y} \quad \mathrm{WA} \geqq \mathrm{C}; \quad \mathrm{W} \geqq \bar{0}; \quad u_i \geqq 0, \quad i = 1, 2 \ldots p \end{array}$$

esquema a partir del cual si se resta la primera igualdad de cada una de las $p-1$ siguientes y se hace $b'_{ij} = b_{ij} - b_{1j}$ obtendríamos:

Minimizar

$$w_1\, b_{11} + w_2\, b_{12} + \ldots + w_n\, b_{1n} + u_1$$

$$\begin{array}{llll} \text{con} & w_1\, b'_{21} + w_2\, b'_{22} + \ldots + w_n\, b'_{2n} + u_2 & & -u_1 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & w_1\, b'_{p1} + w_2\, b'_{p2} + \ldots + w_n\, b'_{pn} & + u_p & -u_1 = 0 \end{array}$$

$$\text{y} \quad WA \geqq C; \quad W \geqq O; \quad u_i \geqq 0, \quad i = 1, 2 \ldots p$$

que es un problema ordinario de programación lineal.

El cuadro de restricciones ha sido aumentado respecto a la versión original en $p-1$ filas y en $p-1$ variables de holgura y un vector-columna unitario de elementos negativos, lo que puede resultar incómodo cuando la magnitud de p es elevada.

A continuación efectuamos un nuevo análisis de este problema, en el que se procura hacer mínimo el tamaño del cuadro de restricciones.

Puede observarse que:

Minimizar el extremo superior de WH con $WA \geqq C$; $W \geqq \bar{O}$ y $n > p$

equivale a una serie de p problemas duales simétricos simultáneos, todos ellos con el mismo poliedro convexo representativo de las $n + m$ restricciones de W, es decir, $WA \geqq C$; $W \geqq \bar{O}$.

RELACIONES ENTRE LAS SOLUCIONES BASICAS DE UN DUAL SIMETRICO Y LAS SOLUCIONES BASICAS DE UN PRIMAL SIMETRICO

Consideremos en particular uno de esos problemas duales, p. ej.:

$$\text{Minimizar } WH_1 \text{, con } WA \geqq C,\ W \geqq \bar{O},\ H_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{1n} \end{bmatrix} \qquad [1]$$

Se demuestra que a este problema le corresponde otro (primal):

$$\text{Maximizar } CX \text{ con } AX \leqq H_1,\ X \geqq O, \qquad [2]$$

En efecto, añadiendo n variables de holgura Y podemos escribir, en lugar del [2]:

$$\text{Maximizar } (C \mid \bar{O}) \left(\frac{X}{Y} \right) \text{ con } (A \mid I) \left(\frac{X}{Y} \right) = H_1,\ X \geqq O,\ Y \geqq O \qquad [3]$$

El dual ordinario de esta última formulación es:

Minimizar WH_1 con $W(A \mid I) \geqq (C \mid \bar{O})$

restricciones que se desdoblan en $WA \geqq C$, $W \geqq \bar{O}$ (4).

---

(4) Las relaciones entre los problemas primal y dual son suficientes para comprobar que el problema dual es sensible al cambio de unidades en cada función-objetivo WH_1; consecuentemente, la introducción de funciones-objetivo combinaciones lineales *de otras funciones previamente establecidas alteraría la minimización* del extremo superior.

En consecuencia, entre [1] y [2] existen las siguientes relaciones:

1) A toda solución básica del primal (n vectores independientes) le corresponde una solución básica del dual (n restricciones se transforman en igualdades). En total hay $\binom{m+n}{n}$ soluciones básicas para cada uno de los dos problemas (5).

2) Sólo hay una solución básica factible del primal que también sea solución básica factible del dual: el óptimo de ambos. Las restantes soluciones básicas factibles del dual sólo son soluciones básicas del primal (no todos los elementos de X son ≥ 0), y las factibles del primal sólo son básicas del dual (no todas las ecuaciones verifican $WA \geq C$), es decir, son vértices del poliedro estrellado que se superpone al convexo.

OBTENCION DE SOLUCIONES BASICAS FACTIBLES EN UN PROBLEMA DUAL

Conocido un vértice del dual es posible, utilizando procedimientos standard, pasar a otro vértice adyacente. El problema equivale a pasar de un punto extremo (factible o no-factible) del primal a otro punto extremo (factible o no-factible) de dicho primal, conservando las condiciones de factibilidad del dual.

Resolvamos [1] con las técnicas del simplex, o análogas, añadiéndole las correspondientes variables de exceso y artificiales. El óptimo nos da un vértice del poliedro convexo de las restricciones. Este óptimo lo es también del primal [3], cuya resolución puede sustituir a la de [1], y en cuya tabla final los $z_j - c_j$ serán todos ≥ 0, lo que representa la condición de factibilidad en el dual: $WP_j \geq c_j$ $j = 1, 2 \ldots m$. (6)

Si retiramos un vector de la base del primal e introducimos otro tal que todos los nuevos $z'_j - c_j$ sean ≥ 0, habremos obtenido otra solución básica factible del dual, es decir, otro vértice del poliedro convexo.

---

(5) Todo vértice del poliedro convexo se caracteriza porque las correspondientes W, $(w_1\, w_2 \ldots w_n)$ cumplen las $m + n$ restricciones con n igualdades y m desigualdades.

(6) En efecto, empleando notaciones usuales se tiene $W^0 = C^0 B^{-1}$ y $W^0 (A \mid I) - (C \mid O) = C^0 B^{-1} (A \mid I) - (C \mid O) = C^0 X - (C \mid O) = Z$ y $Z \geq \bar{O}$ *en el máximo* del primal.

El cambio de un vector por otro puede hacerse de muchas formas.

Como

$$z'_j - c_j = z_j - c_j - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k) ,$$

siendo P_k el vector que entra en la base y P_l el vector que sale de ella, para que todo $z'_j - c_j \geqq 0$, siendo $z_j - c_j \geqq 0$ y $z_k - c_k \geqq 0$ es preciso que

$$\theta_j = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \text{ sea} \leqq \frac{z_j - c_j}{z_k - c_k} ;$$

desde luego, todas las series del tipo $\theta_j \leqq 0$ cumplen con la desigualdad anterior.

Una regla amplia de selección podría ser la siguiente: se toma P_k, vector fuera de la base, de forma que $z_k - c_k$ tenga, relativamente, un pequeño valor, y P_l, vector dentro de la base, de forma que determine un x_{lk} grande respecto a los x_{lj}; se calculan los cocientes:

$$\frac{z_j - c_j}{z_k - c_k}$$

y se comprueban las desigualdades

$$\theta_j \leqq \frac{z_j - c_j}{z_k - c_k} ;$$

de ser favorable la comprobación se habrá obtenido, cambiando en la base P_l por P_k, un nuevo vértice del poliedro convexo representativo de las restricciones del dual.

Si se eligiera P_l con arreglo a un criterio diferencial la determinación de P_k, para que todos los $z'_j - c_j \geqq 0$ no podría ser tan amplia.

Supongamos que, deseando rebajar WH_1, elegimos un P_l con

$x_{1H_1} > 0$; entonces, para que $W^1 H_1 < W^0 H_1$ ha de verificarse $x_{1k} > 0$. (7)

Si $z'_j - c_j \geq 0$, entonces $z_j - c_j \geq \frac{x_{1j}}{x_{1k}} (z_k - c_k)$ desigualdad que conduce,

$$\text{si } x_{1j} > 0 \quad a \quad \frac{z_k - c_k}{x_{1k}} = \min \left(\frac{z_j - c_j}{x_{1j}}\right), \text{ con } x_{1j} > 0$$

$$\text{si } x_{1j} < 0 \quad a \quad \frac{z_k - c_k}{x_{1k}} = \text{cualquier} \left(\frac{z_j - c_j}{x_{1j}}\right), \text{ con } x_{1j} > 0$$

Luego debe elegirse P_k de forma que:

$$\frac{z_k - c_k}{x_{1k}} = \min \left(\frac{z_j - c_j}{x_{1j}}\right), \text{ con } x_{1j} > 0$$

---

(7) Debe mencionarse aquí que para una nueva solución W^1 del dual se verifica:

$$W^1 = W^0 - \frac{z_k - c_k}{x_{1k}} B_l$$

siendo B_l la fila elésima de la matriz B^{-1}, inversa de la base primal, y:

$$W^1 H_1 = W^0 H_1 - \frac{x_{1H_1}}{x_{1k}} (z_k - c_k) \qquad [4]$$

Si deseáramos que $W^1 H_1 < W^0 H_1$, es preciso que:

$$\frac{x_{1H_1}}{x_{1k}} (z_k - c_k) > 0$$

y como $z_k - c_k > 0$, x_{1H_1} y x_{1k} han de ser de igual signo.

Encontraremos lugar de insistir sobre esta última condición (ver demostraciones en LEMKE, C. E., *The Dual Method of Solving the Linear Programming Problem,* Naval Research Logistics Quarterly, vol. 1, núm. 1, 1954).

Supongamos, en otro caso, que deseando rebajar WH_1 se elige un P_l con $x_{lH_1} < 0$; entonces, si $W^1 H_1 < W^0 H_1$, ha de verificarse $x_{lk} < 0$.

Para que $z'_j - c_j \geqq 0$ se tendrá:

$$z_j - c_j \geqq \frac{x_{lj}}{x_{lk}} (z_k - c_k)$$

desigualdad que conduce

$$\text{si } x_{lj} < 0 \quad \text{a} \quad \frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \max \left(\frac{z_j - c_j}{x_{lj}}\right), \text{ con } x_{lj} < 0$$

$$\text{si } x_{lj} > 0 \quad \text{a} \quad \frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \text{cualquier} \left(\frac{z_j - c_j}{x_{lj}}\right), \text{ con } x_{lj} < 0.$$

Luego debe elegirse P_k de forma que:

$$\frac{z_k - c_k}{x_{lk}} = \max \left(\frac{z_j - c_j}{x_{lj}}\right), \text{ con } x_{lj} < 0.$$

LOCALIZACION DEL EXTREMO SUPERIOR MINIMO DE UN CONJUNTO DE FUNCIONES LINEALES SOMETIDAS A UN CONJUNTO DE RESTRICCIONES LINEALES

Volviendo al análisis del problema:

Minimizar el extremo superior de WH, con $WA \geqq C$, $W \geqq \bar{O}$ y $n > p$,

tiene el mayor interés estudiar las posibles limitaciones a la localización de ese extremo superior.

En efecto, la metodología de las soluciones factibles en el dual:

Minimizar WH_1 con $WA \geqq C$, $W \geqq \bar{O}$,

sólo será de aplicación en nuestro caso si el extremo superior mínimo de WH se ubica en la superficie del poliedro convexo representativo de las restricciones:

$$WA \geqq C, \; W \geqq \bar{0}$$

La localización en el interior del poliedro anularía toda la potencialidad de los métodos iterativos empleados.

Pues bien, cuando $p \leqq n$ facilmente se comprueba que los extremos funcionales deben encontrarse en la superficie de ese poliedro convexo.

Consideremos un punto cualquier Q $(w_1, w_2, \ldots w_n)$ situado en el interior del poliedro y sean $f_{1Q}\, f_{2Q} \ldots f_{pQ}$ los valores que toman las p funciones-objetivo WH en ese punto con f_{pQ} el extremo superior de tales valores. Siempre puede hacerse pasar por Q una trayectoria lineal donde WH_1, WH_2, ... WH_{p-1} *sean invariantes* y donde WH_p *tome a un* lado de Q valores sucesivamente mayores a partir de f_{pQ} en el punto Q, y al otro lado de Q valores sucesivamente menores a partir de f_{pQ} en dicho punto.

Tales trayectorias cortan a la superficie del poliedro convexo en puntos, uno de los *cuales necesariamente da lugar a valores de* WH_1, WH_2, ... WH_{p-1} iguales a los de esas funciones en el punto Q y a un valor de WH_p menor que el que esta función toma en ese punto.

Ahora bien, la solución, aunque tiene que ser encontrada en la superficie del poliedro, puede situarse fuera de sus vértices (soluciones factibles *no-básicas en el dual*).

La discusión se realiza a partir de las familias de polígonos hiperplanos definidos por (8):

$$\begin{array}{lllll} WH_1 = \lambda_1 & WH_1 \leqq \lambda_2 & & & WH_1 \leqq \lambda_p \\ WH_2 \leqq \lambda_1 \;; & WH_2 = \lambda_2 \;; & \ldots & ; & WH_2 \leqq \lambda_p \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ WH_p \leqq \lambda_1 & WH_p \leqq \lambda_2 & & & WH_p = \lambda_p \end{array}$$

El polígono de cada familia que, con la menor cota posible $\overset{\circ}{\lambda}_i$, toca al poliedro convexo origina soluciones factibles. En efecto, los puntos comunes están en la superficie del poliedro y en el mínimo condicionado

---

(8) El autor expresa su reconocimiento a J. L. Matut Archanco, Ingeniero de la S. G. T. del Ministerio de Obras Públicas, que proporcionó un útil punto de vista para el comienzo de esta discusión.

de la forma lineal $W H_i$ que actúa como dominante ($W H_i \geq W H_j$, $j \neq i$) en el conjunto $W H$ limitativo de la familia de polígonos considerada.

La solución se localiza en aquel polígono hiperplano cuya cota $\lambda_i^{\bullet}$ es la menor entre las p cotas de los polígonos de contacto.

Ocurren dos casos típicos:

1) El contacto del polígono factible de cota mínima y la superficie del poliedro no incluye puntos del contorno de ese polígono. Entonces uno de los vértices del poliedro, por lo menos, será solución, pudiendo haber infinitas de éstas. En particular, cuando el contacto se realiza a través de un solo punto interior del polígono, la solución es única y recae sobre un vértice del poliedro.

2) El contacto del polígono factible de cota mínima con el poliedro incluye puntos del contorno de aquél. La solución puede encontrarse en cualquier región de la superficie del poliedro, incluyendo o no vértices de éste. En general habrá infinitas soluciones, y más de un $W H_i$ *tomará* el valor de f_{max}.

En el primer caso —peculiaridad desconocida *a priori*— cabría alcanzar la solución minimizando sucesivamente $W H_i$ para los distintos $i = 1, 2 \ldots p$, con $W A \geq C$, $W \geq 0$, hasta dar con el punto $(w_1\, w_2 \ldots w_n)$ de $W H_{i_{1\,mín.}}$, tal que en ese punto $W H_{i_1} \geq W H_i$.

Los modelos dual y directo ahora presentados permiten superar ese esquema de cálculo pedestre por un solo proceso iterativo donde, desde el primer instante, se rebaja monótonamente el extremo superior del conjunto de formas lineales con independencia de la peculiaridad de las soluciones.

En el segundo caso los métodos iterativos que se proponen conducen siempre al vértice óptimo. Es decir, a una solución exacta cuando la zona de contacto incluya algún punto extremo, o a la mejor aproximación de vértice cuando no incluya ninguno. Las iteraciones vértice a vértice se limitan a obtener uno de ellos que, teniendo en cuenta los posibles valores de las funciones $W H_1$, $W H_2 \ldots W H_p$, es el que más se aproxima a la solución o soluciones exactas (el que proporciona un extremo superior de menor valor que los de los restantes vértices. En distintos supuestos de este caso se puede demostrar que la minimización aislada de $W H_1$, $W H_2 \ldots W H_p$ no determina al vértice óptimo.

Cuando el valor de m es elevado, lo que parece propio de las situaciones en las que cabe aplicar el problema que ahora se investiga, no sería extraño que el solo conocimiento del vértice óptimo, aun en los casos en que éste no represente una solución exacta, colmara todas las necesidades prácticas.

En general, se demuestra que la solución exacta puede ser alcanzada siempre con combinaciones de a lo sumo $m + p - 1$ valores no nulos de w_i.

DETERMINACION DEL VERTICE OPTIMO

En definitiva, el problema puede considerarse resuelto si se obtiene el vértice óptimo en un número ponderado de iteraciones.

El proceso de resolución se lleva a cabo a través de dos fases:

FASE I

Se resuelve la minimización de un $W H_i$, con $W H \geqq C$, $W \geqq O$, por los procedimientos usuales: simplex, revised method, product form, dual simplex, etc., bien directamente, bien llevando a cabo la *maximización* del primal simétrico (9). La función conductora $W H_{i_1}$ deberá elegirse entre el conjunto de funciones-objetivo WH, más que al azar, por consideraciones apriorísticas o basadas en estudios superficiales.

Dentro del ámbito de las soluciones finitas pueden ocurrir dos casos:

1.° El mínimo de $W H_{i_1}$, $(w^o_1, \dots w^o_n)$, conduce a una serie de valores en $W H_1$, $W H_2 \dots W H_p$, tales que el máximo es precisamente $W H_{i_1\,\text{mín.}}$; ese mínimo es entonces, evidentemente, el vértice óptimo.

2.° El mínimo de $W H_{i_1}$, $(w^o_1, \dots w^o_n)$, conduce a una serie de valores en $W H_1$, $W H_2 \dots W H_p$, tales que el máximo no es $W H_{i_1\,\text{mín.}}$; se hace preciso pasar a la fase II.

---

(9) Como el número de filas de las tablas operatorias determina ordinariamente el tamaño de los problemas de programación lineal que pueden ser resueltos con máquinas electrónicas, una de las dos posibilidades permitirá en ocasiones resolver problemas que con la otra aparecerían como inabordables. En general, se debe elegir la posibilidad cuyos cálculos vectoriales tengan el menor número de filas.

FASE II

Se trata de efectuar iteraciones moviéndose desde un vértice del poliedro convexo a otro (de una solución vectorial básica de los p problemas primal, $C X$ con $AX \leq H$, a otra solución vectorial básica) de forma que el extremo superior de W H decrezca monótonamente.

Los criterios de selección de vectores que vamos a proponer se rigen por los principios fundamentales siguientes:

1.° El primero es optativo y preconiza la extracción de un vector P_l de la base y la introducción en su lugar de otro vector P_K, de manera que, conservándose la factibilidad general, todas las funciones de W H resulten disminuídas en relación con los valores de ellas que implica la base anterior.

2.° El segundo expresa que, si tales cambios no se realizan (10), procede determinar una mutación entre dos vectores, uno dentro de la base y otro fuera de ella, de manera que, conservándose la factibilidad general, el nuevo extremo superior tenga un valor más reducido que el del extremo superior de la precedente iteración.

El análisis de una iteración con el método simplex permitirá formular los criterios algebraicos implicados en los principios anteriores.

La tabla vectorial puede representarse con las notaciones usuales según el cuadro siguiente (suponemos que la base única de los problemas primal que corresponden a los p problemas duales de W H es $P_1\, P_2 \ldots$ $\ldots P_n$):

(10) Por ejemplo, forzosamnte no se realizarían en la iteración con que comienza la fase II, ya que WH_1 min. no puede rebajarse ulteriormente.

MODELO DUAL

TABLA I.—ESQUEMAS DE CÁLCULOS VECTORIALES EN LAS ITERACIONES

i	Base	W^0	Vectores H				Vectores P						
			H_1	H_2	...	H_p	P_1	P_2	...	P_n	P_{n+1}	...	P_{n+m}
1	P_1	$w^0{}_1$	h_{11}	h_{12}		h_{1p}	1	0	.	0	$x_{1,\ n+1}$	.	$x_{1,\ n+m}$
2	P_2	$w^0{}_2$	h_{21}	h_{22}	.	h_{2p}	0	1	.	0	$x_{2,\ n+1}$	.	$x_{2,\ n+m}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	P_n	$w^0{}_n$	h_{n1}	h_{n2}	.	h_{np}	0	0	.	1	$x_{n,\ n+1}$	.	$x_{n,\ n+m}$
W H y Z:			WH_1	WH_2	...	WH_p	0	0	...	0	$z^*{}_{n+1}$	...	$z^*{}_{n+m}$

donde para abreviar:

$$h_{ij} = x_{iH_j}\ ,\ \overset{*}{z}_j = z_j - c_j$$

y donde se ha de verificar:

$$Z = [z^*{}_1,\ z^*{}_2 \dots z^*{}_{n+m}] \geq \bar{O},\ W^1 = W^0 - \frac{z_k - c_k}{x_{lk}} B_l\ ,\ \ W^1 H_i = W^0 H_i - \frac{h_{li}}{x_{lk}} z^*{}_k$$

deduciéndose que, como se ha operado con n variables de holgura vectorialmente distintas (cada una actúa a p niveles diferentes, número de los problemas primal que realmente se plantean) la tabla ofrece siempre las columnas de B^{-1}, matriz inversa de la base de cada iteración.

CRITERIOS DE SELECCION VECTORIAL

a) Reglas correspondientes al principio 1) de la fase II.

Es fácil observar, en lo que se refiere al principio 1), que la disminución sistemática de todas las funciones-objetivo WH_i en una iteración exige el mantenimiento de la correspondencia

$$x_{1k} > 0 \text{ ———————— } h_{1i} > 0$$

$$x_{1k} < 0 \text{ ———————— } h_{1i} < 0$$

para todas las $i = 1, 2 \ldots p$. (11).

Basta, pues, fijarse en las posibles filas h_{1i}, $i = 1, 2 \ldots p$, cuyos elementos tengan todos el mismo signo. La existencia de estas series señala la oportunidad de aplicar el principio 1).

Una cualquiera de ellas implica un posible vector P_1 a salir de la base. El vector a entrar en la base es preciso que se determine respetando la factibilidad general señalada por el vector $Z \geq \bar{O}$.

En consecuencia, conocidas la fila 1 y el signo de las h_{1j} debe elegirse como P_k el vector que verifique:

$$\frac{\overset{*}{z}_k}{x_{1k}} = \min \left(\frac{\overset{*}{z}_j}{x_{1j}} \right)$$

con $x_{1j} > 0$, si el signo de h_{1i}, $i = 1, 2 \ldots p$ es $+$, y

$$\frac{\overset{*}{z}_k}{x_{1k}} = \max \left(\frac{\overset{*}{z}_j}{x_{1j}} \right)$$

con $x_{1j} < 0$, si el signo de h_{1i}, $i = 1, 2 \ldots p$ es $-$ (12).

---

(11) Repásese la nota (7).

(12) Aplíquense los razonamientos del epígrafe *Obtención de soluciones básicas factibles en un problema dual.*

Determinados P_l y P_k es inmediato el cálculo de la nueva tabla (matrices HX y vectores-fila WH y Z).

b) Reglas correspondientes al principio 2) de la fase II.

Disponiendo de WH_i max, p. ej.: WH_m, queda determinada la expresión vectorial de H_m en función de la base $P_1\ P_2 \ldots P_n$.

En esta columna de H_m elegimos el elemento $|h_{lm}|$ máx. que localiza un posible vector a salir de la base P_l.

Para ese vector se obtiene P_k, vector a entrar en la base, tal que se conserve la factibilidad general $Z \geqq \bar{O}$, esto es:

$$\text{si } h_{lm} > 0, \quad \frac{\overset{*}{z}_k}{x_{lk}} = \min\left(\frac{\overset{*}{z}_j}{x_{lj}}\right), \text{ con } x_{lj} > 0$$

$$\text{si } h_{lm} < 0, \quad \frac{\overset{*}{z}_k}{x_{lk}} = \max\left(\frac{\overset{*}{z}_j}{x_{lj}}\right), \text{ con } x_{lj} < 0$$

A continuación es preciso contrastar la rebaja del f_{max}, extremo superior del conjunto funcional, en la iteración planteada.

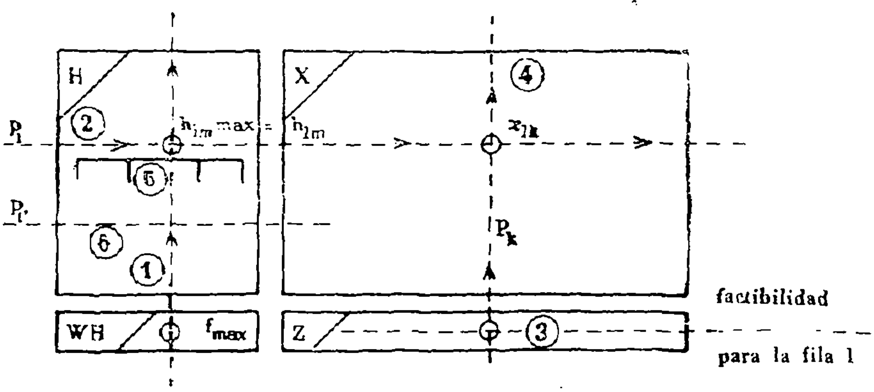
Si denominamos $\overset{m}{\Delta}_1, \overset{m}{\Delta}_2 \ldots \overset{m}{\Delta}_p$ a las diferencias de los valores de las funciones-objetivo $WH_1\ WH_2 \ldots WH_p$ respecto al valor máximo, WH_m de partida, se ha de verificar:

$$\overset{m}{\Delta}_i \leqq \frac{h_{li}}{x_{lk}} \cdot \overset{*}{z}_k, \quad i = 1, 2 \ldots p \qquad [5]$$

Como los $\overset{*}{z}_k$ son positivos o nulos y x_{lk} tiene signo y magnitud conocidos, sólo hay que tantear los cocientes $\frac{h_{li}}{x_{lk}}$ negativos.

Si no se cumple la desigualdad [5] para $i = 1, 2 \ldots p$, cabe partir de otro vector, p. ej.: $P_{l'}$ con $|h_{l'm}| < |h_{lm}|$ max y $|h'_{lm}| > |h_{jm}|$, $j \neq l$.

El proceso ordenado en sus sucesivas etapas con los números 1, 2, 3, 4, 5, se sintetiza en el diagrama siguiente:



$$\overset{*}{z}_k = \frac{\overset{*}{z}_j}{x_{1j}} \min$$

FINAL DE LAS ITERACIONES

El vértice óptimo habrá sido alcanzado cuando:

1) No se pueda disminuir el valor del extremo superior (f_{max}) de la precedente iteración, es decir, cuando no existan h_{lm} y x_{lk} del mismo signo en toda la tabla (es preciso, para tal disminución, que se verifique:

$$\frac{h_{1m}}{x_{1k}} > 0)$$

2) No se cumplan todas las desigualdades $\Delta_i^m \leq \frac{h_{1i}}{x_{1k}} \overset{*}{z}_k, i = 1, 2 \ldots p$ para ningún $P_l, l = 1, 2 \ldots n$, (contraste de las situaciones extremas en que h_{li} y x_{lk} tienen signos distintos).

Los casos 1) y 2) estudiados en el epígrafe "Localización del extremo superior mínimo de un conjunto de funciones lineales sometidas a un conjunto de restricciones lineales" se reflejan al final de las iteraciones de la forma siguiente:

Caso 1) Se obtiene siempre una solución exacta, destacándose porque en la última iteración la función conductora WH_m no puede ser rebajada ulteriormente.

Caso 2) Supuestos de soluciones exactas (que incluyen vértices).

a) No se puede rebajar ulteriormente el valor de la función conductora WH_m (el vértice óptimo es el de la minimización aislada de esta forma lineal).

b) Se puede rebajar ulteriormente el valor de la función conductora WH_m, pero a costa de pasar a otra forma conductora con un extremo superior más elevado.

(En el supuesto *b*), el valor final del extremo superior es alcanzado a la vez por más de una función-objetivo, lo que también es posible en el supuesto *a*).)

Caso 2) Supuesto de soluciones aproximadas (que no incluyen vértices). En la última iteración se puede rebajar el valor de la WH_m precedente, pero a costa de elevar el valor de f_{max} por medio de otra forma lineal (generalmente los valores tomados en el vértice óptimo por las p funciones-objetivo serán diferentes unos de otros).

El número de iteraciones en la que hemos llamado fase II es del mismo orden de magnitud que en los problemas ordinarios, superando en promedio al de estos últimos tanto más cuantos más cambios de función conductora WH_m se realicen; la cercanía del vértice óptimo al mínimo de la función tratada en la fase I se traduce en un efecto de signo contrario al anterior.

UTILIZACION DEL REVISED SIMPLEX METHOD

Repasemos la información necesaria para llevar a cabo las reglas del principio 2.°. Es preciso disponer (véase diagrama anterior):

1) De la serie de valores de WH.
2) De los elementos h_{im} de la columna 1.
3) De los elementos x_{ij} de la fila 2.
4) De los elementos $\frac{z_j^*}{x_{ij}}$, con x_{ij} del mismo signo que h_{im}.

Todo el cálculo puede realizarse a partir del solo conocimiento de la matriz B^{-1} ampliada, matriz U, propia de cada iteración, y de la inicial A ampliada. Por tanto, pueden emplearse el Revised Simplex Method, o su variante la Product Form of the Inverse (13).

INTERPRETACION DEL PROBLEMA COMO UNA OPTIMIZACION DIRECTA

Al estudiar la fase I de la determinación del vértice óptimo se hizo referencia a las dos posibilidades de resolver tal fase: bien directamente, bien tomándola como un dual. En ambos casos se obtenía la minimización de $W H_{i_1}(w_1^0 w_2^0 \ldots w_n^0)$, vértice del poliedro de restricciones que se suponía, cuando menos, una primera aproximación al vértice óptimo.

Sin embargo, la fase II se estudió considerando solamente al problema dado como una serie de duales —es indudable que esto da lugar a la versión geométrica más natural— apoyándonos en los primal de estos duales para realizar las sucesivas iteraciones. Obteníamos así cálculos de $n + 1$ filas (ver tabla I), y criterios de selección específicos de tal planteamiento.

Tiene interés desarrollar el problema interpretándolo en su formulación directa, con el mismo conjunto de restricciones. Si eso es posible, nos conducirá a cálculos vectoriales de $m + p$ filas (14), tal vez más adaptados a las peculiaridades de las máquinas electrónicas y, en general, a un proceso más sencillo.

Es preciso demostrar previamente que abordando el problema general directamente, las soluciones básicas factibles de esta serie corresponden a soluciones básicas factibles de la interpretación dual (es decir, a vértices del poliedro convexo) y recíprocamente.

---

(13) Ver ORCHARD-HAYS, W., *Background, Development and Extensions of the Revised Simplex Method*, RAND Report RM-1433, The RAND Corporation, Santa Mónica, California, 1954; DANTZIG, G. B., *Computational Algorithm of the Revised Simplex Method*, RAND Report RM 1266, The RAND Corporation, Santa Mónica, California, 1953.

En general, debe emplearse el Revised Simplex Method cuando el número de columnas de las tablas vectoriales es superior o igual a tres veces el número de filas.

(14) Esto puede ser importante cuando $m < n$; ver nota (9).

Examinemos las formulaciones extendidas de tales interpretaciones al caso de una sola función-objetivo. Minimizar $W\,b$ sometido a $W\,A \geqq C$, $W \geqq O$ pasa a ser:

Interpretación directa

Minimizar $w_1\, b_1 + w_2\, b_2 + \ldots + w_n\, b_n$

con

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \quad a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{bmatrix}, \quad w_i \geqq 0, \quad i = 1, 2 \,.\, n \qquad [6]$$

Interpretación dual

Minimizar $w_1\, b_1 + w_2\, b_2 + \ldots w_n\, b_n$

$$\text{con } [w_1\, w_2 \ldots w_n] \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn} \end{bmatrix} \geqq [c_1\, c_2 \ldots c_m],$$

$$w_i \geqq 0\,, \quad i = 1,\ 2 \ldots n \qquad [7]$$

La resolución de [6] implica:

a) Que las restricciones se han transformado, multiplicando si es necesario por -1 a algunas de ellas, de manera que todos los $c_i \geqq 0$.

b) Que se añaden n variables de holgura (desigualdades $\leqq$) y de exceso (desigualdades $\geqq$).

Dejando a un lado las variables artificiales que correspondan a las variables de exceso y que se utilizan en una etapa especial de las iteraciones, la interpretación directa pasa a ser expresada por medio de las siguientes fórmulas (15).

Minimizar $w_1 b_1 + w_2 b_2 + \ldots + w_n b_n$

$$\text{con} \quad \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & -1 & 0 \ldots & 0 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & 0 & +1 \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} & 0 & 0 \ldots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{bmatrix} \qquad [8]$$

$$w_i \geqq 0, \quad i = 1, 2 \ldots n; \quad y_j \geqq 0, \quad j = 1, 2 \ldots m.$$

donde los y_j son las variables de holgura y de exceso.

Pueden compararse ahora con toda precisión una solución básica factible de la interpretación directa con una solución básica factible de la interpretación dual.

En el primer caso —véase [8]— esas soluciones están formadas por m valores de las $n + m$ variables; $w_1\, w_2 \ldots w_n\, y_1\, y_2 \ldots y_m$, distintos de cero (soluciones no-degeneradas) y por n valores de las $n + m$ variables anteriores iguales a cero. Los valores no-nulos verifican las m igualdades

$$(A'|D) \left(\frac{W'}{Y}\right) = C'$$

y m desigualdades de las $m + n$, $W' \geqq O$, $Y \geqq O$; y los nulos las n restantes restricciones anteriores, evidentemente como igualdades.

(15) Suponemos una sucesión arbitraria de signos $+$ $-$ en los valores primitivos de c_i, $i = 1, 2 \ldots m$.

Si particularizamos el número de variables de holgura y de exceso no-nulas haciéndolo igual a $r\ (r \leq m)$, se tienen:

$m - r$ valores de $w_1\, w_2 \ldots w_n$ no-nulos (solución no-degenerada).

r valores de $y_1\, y_2\ \ldots\ y_m$ no-nulos.

Volviendo a [6] —formulación sin variables de holgura ni de exceso— se verificarán como igualdades $m - r$ ecuaciones de las $A'\,W' \geq C'$ y $n - m + r$ ecuaciones de las n $W' \geq O$. Las restantes restricciones se verifican como desigualdades.

Consideremos el dual —véase [7]—. Las soluciones básicas factibles están formadas por n valores de las variables $w_1\ w_2 \ldots w_n$ que satisfacen las $m + n$ restricciones verificando n igualdades y m desigualdades.

Supóngase ahora una solución concreta con $m - r$ valores no-nulos de las variables $w_1\, w_2 \ldots w_n$. Entonces se verifican como igualdades $m - r$ ecuaciones de las m $W\,A \geq C$ y $n - m + r$ ecuaciones de las n $W \leq \bar{O}$ Las restantes m restricciones se verifican como desigualdades.

Habida cuenta de la absoluta identidad de las restricciones en los dos casos, cualquier solución básica factible de uno lo será también en el otro. Es decir, las dos interpretaciones dan lugar a las mismas soluciones básicas factibles, $w_1\, w_2 \ldots w_n$.

Esta propiedad se generaliza inmediatamente a la minimización del extremo superior de un conjunto de funciones lineales sometidas a un conjunto de restricciones lineales. Basta comparar los problemas simples determinados por cada función lineal.

ITERACIONES EN EL MODELO DIRECTO

La minimización a desarrollar es la de:

$$\text{Mín. } H'\,W' \text{ con } A'\,W' \geq C',\ W' \geq O$$

Completando esas fórmulas con variables de holgura, de exceso y artificiales puede pasarse al proceso operatorio.

En este modelo la fase I no debe prolongarse hasta la obtención del mínimo de una de las funciones-objetivo. Se limita exclusivamente a obtener una solución básica-factible para el problema (base con $W' \geq O$) en cuyo momento debe comenzar la fase II.

La tabla de los elementos vectoriales en una iteración se incluye seguidamente, suponiendo que la base única está formada por los vectores P_1, $P_2 \dots P_m$, ahora de m elementos.

MODELO DIRECTO

TABLA II.—ESQUEMA DE CÁLCULOS VECTORIALES EN LAS ITERACIONES

i	Base	$W^{1,0}$	Vectores P						
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_{m+n}
1	P_1	w_1^0	1	0	.	0	$x_{1,\,m+1}$	.	$x_{1,\,m+n}$
2	P_2	w_2^0	0	1	.	0	$x_{2,\,m+1}$	.	$x_{2,\,m+n}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	P_m	w_m^0	0	0	.	1	$x_{m,\,m+1}$	.	$x_{m,\,m+n}$
		$H'_1\,W'$	0	0	.	0	$z^*_{1,\,m+1}$	.	$z^*_{1,\,m+n}$
		$H'_2\,W'$	0	0	.	0	$z^*_{2,\,m+1}$	.	$z^*_{2,\,m+n}$
		.	.	.	.	.	.	.	.
		$H'_p\,W'$	0	0	.	0	$z^*_{p,\,m+1}$	.	$z^*_{p,\,m+n}$

donde $\overset{*}{z}_{ij} = z_{ij} - b_{ij}$, verificándose además:

$$W^0 = \left[w^0_1 ; w^0_2 \dots w^0_n\right] \geqq 0, \; W'^{,1} = W'^{,0} - \frac{\overset{0}{w_l}}{x_{lk}} X_k .$$

$$H'_i \, . \, W'^{,1} = H'_i \, . \, W'^{,0} - \frac{w_l}{x_{lk}} \overset{*}{z}_{ik}$$

Teniendo en cuenta las variables de holgura y de exceso incluidas en el problema la tabla ofrece con facilidad las columnas de B^{-1}, matriz inversa de la base en cada iteración.

CRITERIOS DE SELECCION VECTORIAL

Son de aplicación en este modelo los mismos principios y enfoques de la interpretación dual por lo que escribiremos:

a) Reglas correspondientes al principio 1) de la fase II.

La disminución general de todas las funciones-objetivo $H'_i \; W'$, $i = 1, 2 \ldots p$, mediante el cambio en una cierta iteración, del vector P_l (dentro de la base) por el vector P_k (fuera de la base), implica los siguientes requisitos:

1) Como $w_l^0 \geq 0$, $w'_l \geq 0$ (elementos ele-ésimos de la base antes y después de la iteración) y $w'_l = \dfrac{w_l}{x_{lk}}$, necesariamente se ha de verificar $x_{lk} > 0$.

2) Como

$$H'_i \, W'^{,1} = H'_i \, W'^{,0} - \frac{w_l}{x_{lk}} \overset{*}{z}_{ik} \, , \, i = 1, 2 \ldots p$$

para que

$$H'_i \, W'^{1} \geq H'_i \, W'^{\,.0}$$

es preciso que, adicionalmente a 1), $\overset{*}{z}_{ik} \geq 0$.

En consecuencia, las reglas de selección pueden expresarse así:

1) Se localiza el vector P_k por medio del hallazgo, en la tabla, de una columna

$$\overset{*}{z}_{ik} \geq 0 \, , \, i = 1, \, 2 \ldots p$$

2) Se localiza el vector P_1 de forma que

$$\frac{w_l^0}{x_{lk}} = \min \frac{w_i^0}{x_{ik}}, \text{ con } x_{ik} > 0,$$

(regla ordinaria del simplex method).

Disponiendo de P_k y P_l es inmediato el cálculo de la nueva tabla (vectores-columna $W'^{,1}$, $H'_i W'^{,1}$, matriz X), por medio de las usuales fórmulas de transformación:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik}, \text{ y complementarias.}$$

b) Reglas correspondientes al principio 2) de la fase II.

La tabla de partida señala el $H'_i W'$ max, p. ej., $H'_m W'$, que va a ser la función conductora en la iteración; los pasos son los siguientes:

1) Se elige P_k como el vector cuyo $\overset{*}{z}_{mk} = \overset{*}{z}_{mj} \max \geqq 0$.

2) Se elige P_l como el vector, tal que

$$\frac{w_l^0}{x_{lk}} = \min \frac{w_i^0}{x_{ik}}, \; x_{ik} > 0.$$

3) Se determinan las diferencias entre el valor de cada función-objetivo $H'_i W'$ y el de $H'_m W'$ que, conservando las notaciones del modelo dual, serán:

$$\Delta_1^m \Delta_2^m \dots \Delta_p^m$$

4) Por los mismos motivos que entonces se ha de verificar:

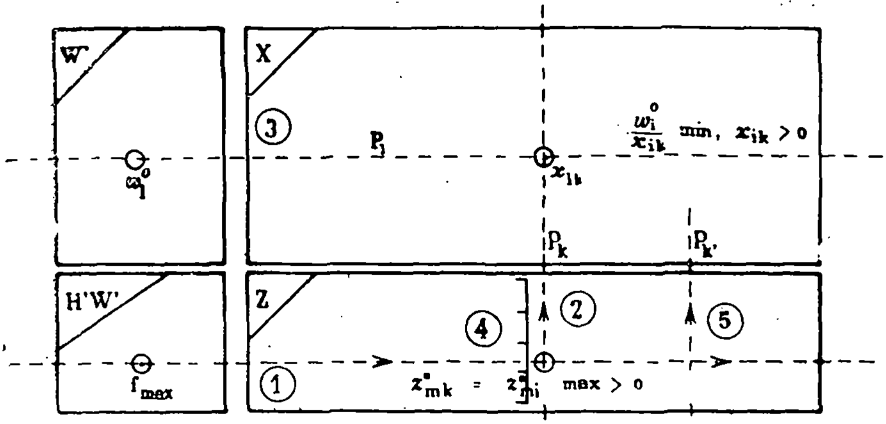
$$\Delta_i^m \leqq \frac{w_l^0}{x_{lk}} \overset{*}{z}_{ik}, \; i = 1, 2 \dots p \qquad [9]$$

y como $\dfrac{w_l^0}{x_{lk}} > 0$ basta comprobar la desigualdad anterior para los $z_{ik} < 0$.

5) Si no se cumple [9] se elige $P_{k'}$, vector cuyo $\overset{*}{z}_{mk'}$, verifica:

$$0 \leq \overset{*}{z}_{mk'} \leq \overset{*}{z}_{mk} \; ; \; \overset{*}{z}_{mk'} > \overset{*}{z}_{mj} \; ; \; j \neq k \, .$$

Gráficamente, los pasos se sintetizan en el diagrama adjunto.



OBSERVACIONES FINALES SOBRE LA INTERPRETACION DIRECTA

El final de las iteraciones con esta interpretación tiene lugar en la misma forma que con el dual. Basta parafrasear, adaptándolos, los párrafos que sobre ese final incluimos en el epígrafe correspondiente.

En cuanto al empleo del revised simplex method, se trata ahora de su utilización más normal, por lo que no insistiremos sobre la misma.

COMPARACION DE LOS CUADROS DE CALCULO EN LAS DISTINTAS POSIBILIDADES

Dejando a un lado los variables artificiales, se observa fácilmente que:

a) la reducción del problema al clásico de la programación lineal (una función-objetivo) conduce a un esquema de $m + p$ filas y $m + n + p + 1$ columnas;

b) la resolución del problema por el modelo dual precisa de un esquema con $m + n + p + 1$ columnas y $n + 1$ filas;

c) la resolución del problema por el llamado modelo directo implica un esquema de $m + p$ filas y $m + n + 1$ columnas.

Por tanto, los procedimientos desarrollados en este trabajo sólo tienen interés cuando p es grande respecto a m.

ANEJO

Se expone en este lugar la estructura de un modelo de planificación de regadíos que puede resolverse según el método investigado y que ilustra sobre algunas de las condiciones de aplicación de este último.

El modelo se planteó como guía indirecta para las actividades de la zona de riegos del Bajo Ebro, margen derecha (España), de forma que, dividida el área de cultivos en numerosas subzonas, de características homogéneas en cuanto a clase de suelo y fecha de la puesta en riego,

1) se alcanzase en una de las subzonas, y como máximo en el vigésimoquinto año a partir de la fecha de comienzo de las obras, el nivel de inversión previsto como de "pleno desarrollo";

2) la distribución de cultivos fuese, lo más tarde en el año vigésimoquinto a partir de la fecha de comienzo de las obras, la considerada en la programación a largo plazo como de "pleno desarrollo";

3) se minimizase el valor máximo del total de los préstamos del sector privado a la zona, pendientes de reintegro en el período de evolución del regadío (la financiación del sector público y del exterior están fijados en cuantía y distribución, así como el régimen de su amortización).

Tales objetivos, que incluyen la influencia de las limitaciones financieras en la actividad de los regantes, han de provocar algunas distorsiones en las magnitudes del plan con el que se conseguiría un desarrollo equilibrado óptimo en la zona, por lo que se consideró importante determinar aquéllas en un estudio detallado.

La expresión algebraica del modelo es la siguiente:

Hallar el extremo superior mínimo de

$$w_{1,1}\, e_{1,1,1} + w_{1,2}\, e_{1,2,1} + \dots + w_{2,1}\, e_{2,1,1} + w_{2,2}\, e_{2,2,1} + \dots + w_{n,j}\, e_{n,j,1} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{1,1}\, e_{1,1,t_s} + w_{1,2}\, e_{1,2,t_s} + \dots + w_{2,1}\, e_{2,1,t_s} + w_{2,2}\, e_{2,2,t_s} + \dots + w_{n,j}\, e_{n,j,t_s} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{1,1}\, e_{1,1,p} + w_{1,2}\, e_{1,2,p} + \dots + w_{2,1}\, e_{2,1,p} + w_{2,2}\, e_{2,2,p} + \dots + w_{n,j}\, e_{n,j,p} + \dots$$

donde w_{ij} es el nivel de actividad del tratamiento plurianual j_i en la subzona i y e_{i,j,t_s} es el volumen de préstamos pendientes de devolución a que se llegaría durante el año t_s en la subzona i al aplicarle el tratamiento plurianual j_i a nivel unidad (toda la subzona sometida a un mismo tratamiento).

Las variables w_{ij}, $i = 1, 2, \dots n$, $j = 1, 2, \dots j_i$ max., están sometidas a las restricciones tecnológicas (consumo de agua y demandas limitadas):

Años		Subzonas y tratamientos plurianuales												Límites globales
		Sub. 1			...		Sub. 2			...		Sub. i		
0		$a_{1,1,0}$ $b_{1,1,0}$ $c_{1,1,0}$		$a_{1,2,0}$ $b_{1,2,0}$ $c_{1,2,0}$			$a_{2,1,0}$ $b_{2,1,0}$ $c_{2,1,0}$		$a_{2,2,0}$ $b_{2,2,0}$ $c_{2,2,0}$			$a_{i,j,0}$ $b_{i,j,0}$ $c_{i,j,0}$		$R_{a,0}$ $R_{b,0}$ $R_{c,0}$
. . .		. . .		. . .			. . .		. . .			. . .		. . .
t_s	$w_{1,1}$	$a_{1,1,t_s}$ $b_{1,1,t_s}$ $c_{1,1,t_s}$	$+ w_{1,2}$	$a_{1,2,t_s}$ $b_{1,2,t_s}$ $c_{1,2,t_s}$	$+ \dots + w_{2,1}$		$a_{2,1,t_s}$ $b_{2,1,t}$ $c_{2,1,t_s}$	$+ w_{2,2}$	$a_{2,2,t_s}$ $b_{2,2,t_s}$ $c_{2,2,t_s}$	$+ \dots w_{i,j}$		a_{i,j,t_s} b_{i,j,t_s} c_{i,j,t_s}	$\dots \leqq$	R_{a,t_s} R_{b,t_s} R_{c,t_s}
. . .		. . .		. . .			. . .		. . .			. . .		. . .
25		$a_{1,1,25}$ $b_{1,1,25}$ $c_{1,1,25}$		$a_{1,2,25}$ $b_{1,2,25}$ $c_{1,2,25}$			$a_{2,1,25}$ $b_{2,1,25}$ $c_{2,1,25}$		$a_{2,2,25}$ $b_{2,2,25}$ $c_{2,2,25}$			$a_{i,j,25}$ $b_{i,j,25}$ $c_{i,j,25}$		$R_{a,25}$ $R_{b,25}$ $R_{c,25}$

donde $b_{1,\, j,\, t_s}$ representa la cuantía del bien o servicio económico limitado $R_{b,\, t_s}$ adscrita el año t_s al tratamiento j_i :

Y a las restricciones expresivas de la presencia de las n subzonas y de no-negatividad en los niveles $w_{i,\, j}$:

$$w_{1,\,1} + w_{1,\,2} + \dots + w_{1,\,j} + \dots + w_{1,\,j_{max}} = 1; \quad w_{1,j} \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots j_1{}^{max}$$

$$w_{2,\,1} + w_{2,\,2} + \dots + w_{2,\,j} + \dots + w_{2,\,j_{max}} = 1; \quad w_{2,j} \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots j_2{}^{max}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{i,\,1} + w_{i,\,2} + \dots + w_{i,\,j} + \dots + w_{i,\,j_{max}} = 1; \quad w_{i,j} \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots j_i{}^{max}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$w_{n,\,1} + w_{n,\,2} + \dots + w_{n,\,j} + \dots + w_{n,\,j_{max}} = 1; \quad w_{n,j} \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots j_n{}^{max}$$

Las restricciones tecnológicas correspondientes al vector R deben completarse con las correspondientes variables de holgura, y las restricciones de presencia con n variables artificiales, una en cada ecuación de presencia.

En resumen se obtiene:

Minimizar el extremo superior de WE con $WA = b$, $W \geq 0$.

Interesa detallar, por último, algunas propiedades de los tratamientos o vectores plurianuales empleados y de las contabilidades económicas prospectivas que los originan.

1. Cada vector, adscrito a una cierta subzona, se elabora a partir de dos características fundamentales:

a) Ritmo de las inversiones de transformación hasta alcanzar a la inversión de "pleno desarrollo".

b) Sucesión de cultivos, que finaliza enlazando con los de "pleno desarrollo".

Las alternativas implican, por lo tanto, distintos ritmos de inversión (se aislan las magnitudes correspondientes en función de un parámetro que determina el ritmo) y distintas sucesiones de cultivos (se agrupan los cultivos según el decalaje inicial o tiempo comprendido entre la dedicación de la tierra y la primera obtención, de resultados muy variables de unos cultivos a otros; por ejemplo: alfalfa, naranjos, etc., suponiendo cuotas de cultivos específicos en cada agrupación y porcentajes de actividades "dependientes", tales como otros cultivos con distintos decalajes, ganadería, etc.).

En un problema distinto es obvio que los tratamientos plurianuales podrían caracterizarse con arreglo a otros criterios de evolución cronológica, siempre que dejasen al proceso bien aprisionado.

2. La consideración integrada de una subzona, un ritmo de inversiones de transformación y una sucesión de cultivos permite abrir una *completa contabilidad prospectiva* de las corrientes cronológicas de actividades. Se estima así:

a) Consumo de agua en la subzona, año tras año.

b) Consumo de energía, fertilizantes, equipos de maquinaria, materiales de construcción, etc.

c) Producciones anuales por clases de cultivos.

d) Nivel de capitalización.

e) Evolución financiera, capital circulante y movimiento de préstamos, etc.

Tales contabilidades proporcionan, consecuentemente, los elementos

$$a_{i,\,j,\,t_s}\ ,\quad b_{i,\,j,\,t_s}\qquad c_{i,\,j,\,t_s}\ ,\qquad e_{i,j,t_s}$$

que caracterizan las funciones-objetivo y el cuadro de restricciones del modelo de programación lineal ya expuesto. En nuestro problema no es provechoso tomar todos los elementos año a año, bastando con disponer de indicadores más dispersos. Puede observarse que si se aumentan las filas del cuadro de restricciones, permaneciendo invariable o disminuyendo el número de funciones-objetivo, aumentará la precisión del vértice óptimo en relación con el problema algebraico y disminuirá la frecuencia de los casos en los que el mínimo del extremo superior es *alcanzado a la vez por más de una función-objetivo*; naturalmente que la precisión del problema real no se ve afectada por estas consideraciones.

En definitiva, la contabilidad económica prospectiva, necesaria para determinar los elementos del modelo, debe partir de una proyección cronológica suficientemente enfocada en todo el proceso evolutivo.

3. La contabilidad prospectiva incluye partidas de actividades "dependientes" o *complementarias*, y *en conjunto estima la evolución económica* de toda una subzona.

Partiendo de un número de subzonas suficientemente elevado (dividiendo, en su caso, a subzonas homogéneas (y aumentando convencionalmente el número de tratamientos en cada una) y disponiendo de una tipología de granjas o empresas agrarias es bien fácil distribuir los resultados globales por subzonas entre el conjunto poblacional de granjas que se considere según módulos de viabilidad institucional y de explotación; se puede comprobar que se dispondría de sistemas de ecuaciones lineales con muchas más incógnitas que ecuaciones.

4. Se observa en la formulación de este caso la rigidez total de cada vector que abarca con elementos no-nulos todo el período evolutivo de la puesta en riego. Sin duda el modelo sería más flexible si se utilizasen vectores del tipo:

$$
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_s \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ d_{s+1} \\ d_{s+1+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_z \end{bmatrix} \quad \text{etc.}
$$

enlazados por coeficientes "input-output" negativos de los vectores de arranque, que desempeñarían el papel de recursos para los vectores de recepción.

Pero la existencia de alternativas con distintos procesos acumulativos de inversión y de cultivos con decalajes muy heterogéneos (de seis meses a más de siete años) hace impracticable una selección suficientemente completa de alternativas con tales vectores.

Sin embargo, en problemas más simples cabría dar preferencia a los vectores de encaje intertemporal, tales como los descritos en este apartado.

5. La minimización del extremo superior del conjunto de funciones-objetivo puede adquirir un significado más operativo mediante una pon-

deración cronológica de las magnitudes de préstamos reales, reflejada en un reajuste de los coeficientes e_{i,j,t_s}.

En nuestro caso parece razonable rechazar la igualdad entre el techo de préstamos alcanzable por la zona en los primeros años de la puesta en riego y el techo de préstamos en el período cercano a la plena puesta en explotación, cuando ya se dispone de una elevada corriente de productos. Por tanto, procede una ponderación de los coeficientes representativos, rebajando progresivamente según leyes lineales tales elementos conforme se avanza en el proceso de evolución.

En otros problemas en los que la minimización no afectase a los préstamos del sector privado, sino que, por ejemplo, se relacionase con los efectos en la balanza de pagos o con el nivel total del capital circulante formado con recursos ajenos, o con el consumo de productos escasos (mano de obra especializada, maquinaria, etc.), es verosímil que tales ponderaciones también serían muy útiles.

Madrid, 15 de mayo de 1962.

A. LOPEZ NIETO