UN NUEVO MODELO DE CICLO CORTO Y LA ESTRUCTURA DE LA PRODUCCION

(Hacia una política de precios agrícolas estables)

1. El propósito de este modesto trabajo es el de idear un esquema teórico de los ciclos cortos de precios que con períodos de un año, por regla general, afectan principalmente a muchos productos agrícolas; esquema o modelo que, a diferencia del clásico de la "telaraña" creado para el mismo fin, permita relacionar fácilmente en determinadas condiciones prácticas el ciclo de precios con ciertas características constantes de la producción y determine cómo debe orientarse a dicha producción (es decir, a la industria de que se trate) para conseguir la estabilidad de precios.

Es sabido que el modelo de la "telaraña" se construye a partir del conocimiento de dos curvas cantidad-precio: *a*) la que liga las cantidades producidas en un cierto año con los precios del producto el año anterior, y *b*) una curva de demanda para tal producto. En la hipótesis de que tales curvas no se modifiquen de un año a otro, el téorema de la "telaraña" demuestra que se llega o no a un precio de equilibrio, según la forma de las curvas. Suponiendo que éstas sean funciones lineales, como suele hacerse para simplificar el problema, es bien conocido que si la pendiente de la función de demanda es más vertical que la de la otra función, no se alcanza un precio de equilibrio, sino que, antes bien, teóricamente se llegaría a un precio nulo, a menos que las funciones no se alterasen en el transcurso del ciclo.

El modelo de la "telaraña" presenta, a nuestro juicio, ciertos inconvenientes, tanto de orden teórico como práctico. De orden teórico, en el caso de ciclo divergente, esto es, si la función de demanda es más vertical; pues la existencia de un tipo tal de ciclo, prolongable hasta el precio nulo, no se acomoda a la realidad; y no es posible aducir que las funciones pueden modificarse en el transcurso del tiempo, pues bien podemos suponer circunstancias en que no se modifiquen. Nótese que este caso puede darse frecuentemente en artículos agrícolas de pequeña elasticidad. De orden práctico, a efectos de lograr una información sobre las reacciones de la cantidad producida a los precios que permita orientar a la industria, ya que el ajuste de las funciones que intervienen en el modelo presenta grandes dificultades; no contándose, además, como no se cuenta, con datos estadísticos suficientemente afinados sobre producciones.

La idea inicial en el modelo que proponemos consiste en acotar los precios. Esto es, se supone que los precios del producto, previamente corregidos del efecto inflacionario, no sobrepasan una cierta cota superior (a la que llamaremos "precio caro"), ni descienden tampoco por debajo de una cierta cota inferior (a la que llamaremos "precio barato"). En estas hipótesis, y mediante la introducción de parámetros con el significado de pesos de los factores de mercado que actúan en el sentido de modificar el "precio caro" y el "precio barato", se establece el modelo como ecuación matricial en diferencias (véase parágrafo 2). La forma matricial no es esencial, pudiéndose haber operado con una sola ecuación en diferencias; pero tiene la ventaja de presentar de un modo claro las relaciones de los pesos de los factores de mercado con los precios. Se determina, a partir del modelo, en qué condiciones se produce el ciclo según la importancia relativa de los pesos de los factores de mercado; y se demuestra también fácilmente, que el modelo conduce, bien a un precio de equilibrio, bien a una oscilación pendular de precios, pero nunca a un ciclo divergente. A partir de una serie de precios de mercado, y bien fijadas las dos cotas, "precio caro" y "precio barato", pueden hallarse los pesos de los factores de mercado (véase parágrafo 4), reconstruyendo así el modelo con el simple conocimiento de series de precios (véase parágrafo 5).

El hecho estadístico de la existencia de cotas para los precios, hecho que hemos tomado como hipótesis para el modelo, puede interpretarse en el sentido siguiente: manteniéndose invariable la función de demanda, el "precio caro" corresponde a una cantidad de producción mínima, y el "precio barato" a una producción máxima. El hecho de que exista un volumen de producción máxima se explica fácilmente por las limitaciones de la industria, sobre todo a corto plazo. Las tierras de regadío o secano fresco aptas para el cultivo de patata en una nación se encuentran en cantidad limitada, por ejemplo. El hecho de que exista un volumen de producción mínimo, es decir, que todos los años pueda asegurarse un mínimo de cosecha de patatas se explica también, en parte, por razones tecnológicas (como la necesidad de respetar ciertas rotaciones de cosechas en ciertos climas que no permiten otro cultivo sustitutivo) y en parte por la existencia en la industria de un cierto número de empresarios "rutinarios" o "tradicionales", enemigos de cambiar su plan de producción.

Más adelante se verá cómo la hipótesis de un volumen máximo y mínimo de producción, unida a la de no modificación de la función de demanda lineal determinan completamente el modelo con independencia de la función de demanda.

2. Supongamos que los precios varían entre las cotas K' (a la que llamaremos "precio caro") y K (a la que llamaremos "precio barato"). Así pues, si p es un precio cualquiera alcanzado por el sistema, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} p - K \geq 0 \\ K' - p \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

para todos los valores de p.

Establezcamos ahora la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

cuyos elementos miden los pesos de los factores de mercado, que influyen en la modificación del precio. Su significado será el siguiente:

a_{11}: Peso de los factores que tienden a mantener el "precio caro".
a_{22}: Peso de los factores que tienden a mantener el "precio barato".
a_{12}: Peso de los factores que tienden a hacer bajar el "precio caro".
a_{21}: Peso de los factores que tienden a hacer subir el "precio barato".

Sean:

p_i: Precio de mercado en una cierta etapa i (por ejemplo, en un cierto año i)

p_{i+1}: Precio del mercado en la etapa siguiente $i+1$ (por ejemplo, en el año siguiente $i+1$).

Las desviaciones del precio p_i respecto a las cotas "precio barato" y "precio caro" K, K' vienen dadas por el vector fila:

$$(p_i - K, \quad K' - p_i)$$

En nuestro modelo, las desviaciones análogas del precio p_{i+1} quedan relacionadas con las anteriores por la ecuación matricial:

$$(p_{i+1} - K, K' - p_{i+1}) = (p_i - K, K' - p_i)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{(II)}$$

Los elementos de la matriz A, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, no son independientes. En efecto, la ecuación matricial (II) se desdobla en las dos ecuaciones:

$$p_{i+1} - K = a_{11}(p_i - K) + a_{21}(K' - p_i) \qquad \text{(III)}$$
$$K' - p_{i+1} = a_{12}(p_i - K) + a_{22}(K' - p_i) \qquad \text{(IV)}$$

de las que la segunda ha de ser consecuencia de la primera.

Sumando (III) y (IV)

$$K' - K = [(a_{11} + a_{12}) - (a_{21} + a_{22})]\, p_i + (a_{21} + a_{22})\, K' - (a_{11} + a_{12})\, K$$

Lo que exige:

$$\left.\begin{array}{l} a_{12} = 1 - a_{11} \\ a_{21} = 1 - a_{22} \end{array}\right\} \qquad \text{(V)}$$

Para obtener los elementos de la matriz A basta dar en (III) a p_i los valores extremos K y K'. Se tiene:

Para $p_i = K$

$$\overset{K}{p}_{i+1} - K = a_{21}(K' - K)$$

$$a_{21} = \frac{p_{i+1} - K}{K' - K} \qquad \text{(VI)}$$

donde p_{i+1} designa el precio correspondiente a la etapa $i + 1$ que sigue a la etapa i cuyo precio es $p_i = K$.

De manera semejante dando en (III) a p_i el valor extremo máximo:

$$p_i = K'$$

$$\overset{K'}{p}_{i+1} - K = a_{11}(K' - K)$$

$$a_{11} = \frac{\overset{K'}{p}_{i+1} - K}{K' - K} \qquad \text{(VII)}$$

Los otros dos elementos a_{12}, a_{22}, resultan naturalmente de (V).

Como, según (I).

$$p_{i+1}^{K} - K \leq K' - K \qquad\qquad p_{i+1}^{K} \geq K$$

$$p_{i+1}^{K'} - K \leq K' - K \qquad\qquad p_{i+1}^{K'} \geq K$$

las fórmulas (VI) y (VII), unidas a las (V), muestran que los cuatro elementos de la matriz A son positivos y menores o iguales que la unidad. Esto se halla de acuerdo con el carácter de "pesos de los factores de mercado" que hemos dado a dichos elementos, los cuales pueden considerarse, teniendo en cuenta (V), como medidos en tantos por uno. En general, al "precio caro" sucede un precio:

$$p_{i+1}^{K'} = K + a_{11}(K' - K) = K' - a_{12}(K' - K)$$

y al "precio barato" sucede un precio:

$$p_{i+1}^{K} = K + a_{21}(K' - K) = K' - a_{22}(K' - K)$$

confirmándose así el significado de los pesos a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, anteriormente señalado.

Como casos particulares tenemos:

1.°) El precio pasa de "precio caro" a "precio barato".

$$p_i = K'$$

$$p_{i+1}^{K'} = K$$

La fórmula (VII) da:

$$a_{11} = \frac{K - K}{K' - K} = 0$$

Y la (V):

$$a_{12} = 1$$

La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2.°) El precio pasa de "precio barato" a "precio caro":

$$p_i = K$$
$$p^{K}_{i+1} = K'$$

Las fórmulas (VI) y (V) dan:

$$a_{21} = 1$$
$$a_{22} = 0$$

Y la matriz es en este caso:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.°) Se cumplen a la vez 1.°) y 2.°). La matriz queda ahora:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.°) De forma parecida, si al "precio caro" sucede el mismo "precio caro":

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si al "precio barato" sucede el mismo "precio barato":

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y si ambas cosas se verifican:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos visto que si todos los precios están comprendidos entre las dos cotas K, K', los elementos de la matriz A son positivos y menores (o iguales) a la unidad. Recíprocamente, si los elementos a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} de la matriz A son positivos y menores o iguales a la unidad, a todo precio p_i tal que

$$K \leq p_i \leq K'$$

sucede, según el modelo (II), un precio p_{i+1}, que verifica también:

$$K \leq p_{i+1} \leq K'$$

Esto es inmediato, pues el máximo valor de p_{i+1} se obtiene, según (III), cuando:

$$a_{11} = a_{21} = 1$$

y es:

$$\text{Máx. } p_{i+1} = K'$$

El mínimo se obtiene cuando:

$$a_{11} = a_{21} = 0$$

y es:

$$\text{Min. } p_{i+1} = K$$

3. Tras estas consideraciones, vamos a ver en qué condiciones el modelo (II) representa un ciclo de precios y cuándo este ciclo alcanza un precio de equilibrio.

Dividiendo los dos vectores que aparecen en ambos miembros de (II) por el escalar K' — K, podemos representar el modelo (II) en la forma más sencilla:

$$(h_{i+1}, m_{i+1}) = (h_i, m_i) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad [\text{VIII}]$$

donde:

$$\left.\begin{aligned} h_i &= \frac{p_i - K}{K' - K} & 0 \leq h_i \leq 1 \\ m_i &= \frac{K' - p_i}{K' - K} & 0 \leq m_i \leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad [\text{IX}]$$

$$h_i + m_i = 1$$

Y expresiones análogas para h_{i+1} m_{i+1}.

El vector correspondiente al "precio caro" adoptará la forma (1,0) y el correspondiente al "precio barato" la forma (0,1).

Partiendo ahora de un precio p_1, al que corresponderá un vector $(h_1\ m_1)$ dado por (IX), el vector correspondiente al año *n* será:

$$(h_n\ m_n) = (h_1\ m_1)\ A^n$$

Sean tres años consecutivos, *n*, *n + 1*, *n + 2* y sus vectores correspondientes:

$$\begin{aligned} (h_n\ m_n) &= (h_1\ m_1)\ A^n \\ (h_{n+1}\ m_{n+1}) &= (h_1\ m_1)\ A^{n+1} = (h_n\ m_n)\ A \\ (h_{n+2}\ m_{n+2}) &= (h_1\ m_1)\ A^{n+2} = (h_{n+1}\ m_{n+1})\ A \end{aligned}$$

Existirá un movimiento cíclico de ondas amortiguadas en los precios cuando:

a) $h_n < h_{n+2} < h_{n+1}$ si $h_n < h_{n+1}$

b) $h_{n+1} < h_{n+2} < h_n$ si $h_{n+1} < h_n$

Supongamos primero el caso a), es decir $h_n < h_{n+1}$

$$
\begin{aligned}
h_{n+1} &= a_{11} h_n + a_{21} m_n > h_n \\
h_{n+1} &= a_{11} h_n + a_{21} m_n = h_n + d & \qquad d > 0 \\
m_{n+1} &= 1 - h_{n+1} = 1 - h_n - d = m_n - d \\
h_{n+2} &= a_{11} h_{n+1} + a_{21} m_{n+1} = a_{11}(h_n + d) + a_{21}(m_n - d) \\
h_{n+2} &= h_{n+1} + (a_{11} - a_{21})\, d & \qquad d > 0
\end{aligned}
$$

Luego la condición para que $h_{n+2} < h_{n+1}$ es:

$$a_{11} - a_{21} < 0 \qquad [X]$$

Por otra parte:

$$h_{n+2} = h_n + d + (a_{11} - a_{21})\, d = h_n + d\,(1 + a_{11} - a_{21})$$

luego:

$$h_{n+2} > h_n$$

ya que $1 + a_{11} - a_{21} > 0$

De modo similar se probaría el caso b), con la misma condición (X), que es, por tanto, la condición necesaria y suficiente para que se produzca el ciclo. *Esta condición (X) significa que el peso de los factores de mercado que tienden a mantener el "precio caro" ha de ser menor que el peso de los factores que tienden a hacer subir el "precio barato"*. Claro es que (X) es equivalente a:

$$a_{12} - a_{22} > 0$$

cuyo significado es que el *peso de los factores de mercado que tienden a mantener el "precio barato" ha de ser menor que el peso de los factores que tienden a hacer bajar el "precio caro"*.

Es fácil ver que el modelo (II) conduce a una situación de equilibrio de precios cuando los elementos de la matriz A son distintos de cero, ya que entonces la matriz A es ergódica, y según el conocido teorema de las cadenas de MARKOV A^n tiende a una matriz límite formada por dos filas idénticas, es decir:

$$\lim_{n \to \infty} (h_n\ m_n) = (h_1\ m_1) \lim_{n \to \infty} A^n = (h_1\ m_1) \begin{pmatrix} a & 1-a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\lim_{n \to \infty} (h_n\ m_n) = (a,\ 1-a)$$

El precio de equilibrio es, pues, según (IX):

$$p_E = K + (K' - K)\ a \qquad [XI]$$

Téngase en cuenta que los elementos de la matriz A no representan probabilidades y, por tanto, la cadena de precios originada por el modelo (II) no debe considerarse como cadena de MARKOV, pues no se trata aquí de un proceso estocástico, sino puramente causal. Sin embargo, el teorema del límite de A , independiente de la naturaleza probabilística o no de los elementos de la matriz, puede aplicarse.

Cuando uno solo de los elementos de A es nulo, también existe equilibrio, puesto que entonces A^2 tiene todos sus elementos distintos de cero, como fácilmente puede comprobarse. Por último, es evidente que en los tres casos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se llega inmediatamente a una situación de equilibrio. Si la matriz es A_1 se llega en la primera etapa al "precio barato", que se conserva ya indefinidamente. Si la matriz es A_2 se llega asimismo en la primera etapa al "precio caro" como precio de equilibrio. Si la matriz es A_3 el precio inicial se conserva en las etapas sucesivas.

La fórmula (XI) sigue cumpliéndose en los casos $A = A_1$, $A = A_2$.

Queda el caso de la matriz periódica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [XI']$$

con la cual es evidente que no se llega a equilibrio, alternándose los precios en la serie:

$$p_i,\ (K' + K) - p_i,\ p_i,\ (K' + K) - p_i,\ \ldots\ldots\ldots$$

Se suceden, pues, precios simétricos respecto al precio medio del "precio caro" y del "precio barato".

En resumen:

El modelo (II) conduce a un precio de equilibrio siempre que los pesos de los factores de mercado que tienden a conservar el "precio caro" y el "precio barato" no sean nulos ambos a la vez.

4. El modelo (II) puede ser puesto en la forma:

$$p_{t+1} = (a_{11} - a_{21})\, p_t + a_{21}K' + a_{12}K \qquad \text{(XII)}$$

y ser tratado como una ecuación en diferencias finitas de primer orden. Dados los elementos de la matriz y las cotas K', K, la ecuación (XII) conduce a un precio de equilibrio cuando $|a_{11} - a_{21}| < 1$, lo que siempre sucede por la naturaleza de los elementos de la matriz (salvo en el caso trivial $a_{j1} = 1$ $a_{j,1} = 0$. Se sabe, en efecto, que la solución de (XII) es:

$$p_n = C\,(a_{11} - a_{21})^n + \frac{a_{21}K' + a_{12}K}{1 - (a_{11} - a_{21})}$$

siendo el precio límite:

$$p_E = \frac{a_{21}K' + a_{12}K}{1 - (a_{11} - a_{21})}$$

Recíprocamente, dada una ecuación en diferencias de la forma:

$$p_{t+1} = ap_t + b \qquad |a| < 1 \qquad \text{(XIII)}$$

¿Podremos identificar a partir de (XIII) el modelo (II)? Esto equivaldría a poder encontrar valores para a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, K, K', que cumplan todas las condiciones impuestas a dichos coeficientes y verifiquen además la ecuación (XIII), identificada con (XII). La identificación nos da:

$$a_{11} = \frac{aK' + b - K}{K' - K} \qquad \text{(XIV)}$$

$$a_{21} = \frac{aK + b - K}{K' - K} \qquad \text{(XV)}$$

Y es preciso probar que:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq a_{11} \leq 1 \\ 0 \leq a_{21} \leq 1 \end{array}\right\} \qquad \text{(XVI)}$$

siempre que escojamos K', K, de modo que tengan el significado económico que les hemos impuesto, es decir:

$$K' > K > 0 \qquad \text{(XVII)}$$

y además:

$$K' \geq p_i \geq K \text{ para todo valor de } i \qquad \text{(XVIII)}$$

En efecto, las condiciones (XVI), teniendo en cuenta (XVII), equivalen a estas otras cuatro:

$$\left.\begin{array}{l} aK' + b \geq K \\ aK' + b \leq K' \\ aK + b \geq K \\ aK + b \leq K' \end{array}\right\} \qquad \text{(XIX)}$$

las cuales se cumplen si K', K, se han escogido de manera que verifiquen (XVIII), puesto que:

$$aK + b = p_{i+1}^{K}$$
$$aK' + b = p_{i+1}^{K'}$$

Si recordamos ahora el clásico modelo de la "telaraña" resulta patente que este modelo y el (II) nos llevan al mismo tipo de ecuación resolvente dado por (XIII) en el caso de ondas amortiguadas, que es cuando se produce el equilibrio; y también en el caso periódico, descrito por la matriz (XI)'. En efecto, siendo:

p_t = precio de mercado en la etapa t
q_t = cantidad,

el modelo de la "telaraña" es:

$$\left.\begin{array}{l} p_t = r + sq_t \\ q_t = u + vp_{t-1} \end{array}\right\} \qquad \text{(XX)}$$

Las ecuaciones (XX) se han considerado lineales, según suele hacerse en la forma simplificada del modelo de la "telaraña".

La ecuación resolvente de (XX) es:

$$p_t = sv p_{t-1} + r + su \qquad \text{(XXI)}$$

debiendo verificarse:

$$|sv| < 1$$

para que (XXI) sea convergente; y además:

$$sv < 0$$

para que la recta de (XX):

$$p_t = r + sq_t$$

tenga pendiente negativa, y la recta:

$$q_t = u + vp_{t-1}$$

tenga pendiente positiva, lo cual es necesario si ha de producirse el ciclo.

Vemos, pues, que (XXI) y (XII) son del mismo tipo, según habíamos indicado.

5. Supongamos ahora que conocemos una relación tal como la (XIII) que ligue los precios de dos años consecutivos. Es obvio que a partir de dicha ecuación no podemos encontrar las ecuaciones (XX), es decir, no podemos construir el modelo de la "telaraña". En cambio, podemos a partir de (XIII) reconstruir nuestro modelo (II), siempre que establezcamos un criterio para fijar las cotas K', K de un modo único y bien definido. En efecto, las ecuaciones (XIV) y (XV), unidas a las (V), permitirán entonces determinar unívocamente los elementos a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, de la matriz. Con ello lograremos reconstruir (II), que nos proporciona una información sobre la estructura del mercado, al conocer los pesos de los factores que actúan sobre los precios.

Para explicar con más detalle lo anterior, vamos a introducir un sencillo tipo de series de precios que podemos designar con el nombre de "series fragmentadas de precios cíclicos".

Llamamos "serie fragmentada de precios cíclicos" a un conjunto S de series parciales:

$$S_1, S_2, \ldots\ldots, S_i, \ldots\ldots, S_m$$

compuestas cada una de ellas por precios; es decir:

$$S_i \left\{ p_1^i p_2^i \ldots\ldots p_{ni}^i \right\}$$

siendo:

$$p_1^i \text{ un precio arbitrario}$$

$$p_2^i, p_3^i, \ldots\ldots, p_{ni}^i \text{ precios deducidos a partir de } p_1^i \text{ por la ley:}$$

$$p_{t+1} = ap_t + b \qquad -1 < a < 0 \qquad \text{(XXII)}$$

ley que es la misma para todas las series parciales S_i.

Por ejemplo, es posible que los precios de un cierto mercado vengan dados por la siguiente ley cíclica:

$$p_{t+1} = -0{,}8\, p_t + 5 \qquad \text{(XXIII)}$$

Esta es una ley de la forma (XXII), la cual engendra precios cíclicos por ser $a < 0$; precios que tienden además a un precio límite de equilibrio, por ser $a > -1$. Pero podemos suponer que la ley (XXIII) deja de cuando en cuando de cumplirse, apareciendo súbitamente en algunos años precios p_1^i que rompen la ley (XXIII). Estos precios p_1 son los precios iniciales de cada serie parcial S_i.

La serie total de precios S se nos presenta así "fragmentada" en series parciales S_i, cada una de las cuales se engendra por la ley (XXIII), salvo en los años de discontinuidad, en que aparecen por la causa que sea, los precios irregulares p_1^i, a partir de los cuales se origina la nueva serie parcial.

Así, por ejemplo, sea la serie S:

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} p_1^1 = 3{,}50 \\ p_2^1 = 2{,}20 \\ p_3^1 = 3{,}24 \\ p_4^1 = 2{,}41 \end{array} \right\} \quad \text{(XXIV)}$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
S_2 \left\{ \begin{array}{l} p_1^2 = 4{,}80 \\ p_2^2 = 1{,}16 \\ p_3^2 = 4{,}07 \\ p_4 = 1{,}74 \\ p_5 = 3{,}61 \end{array} \right. \\[2ex]
S_3 \left\{ \begin{array}{l} p_1^3 = 1{,}00 \\ p_2^3 = 4{,}20 \\ p_3^3 = 1{,}64 \end{array} \right.
\end{array}
\right\} \qquad \text{(XXIV)}
$$

Los precios de esta serie se han ido engendrando en virtud de la ley (XXIII), excepto los precios iniciales de cada serie parcial:

$$p_1^1 = 3{,}50 \qquad p_1^2 = 4{,}80 \qquad p_1^3 = 1{,}00$$

cuya aparición no obedece a ninguna ley conocida.

Las cotas máxima y mínima de los precios son aquí:

$$K' = 4{,}80$$
$$K = 1{,}00$$

y los valores de los elementos de la matriz, deducidos de las fórmulas (XIV) y (XV) son:

$$a_{11} = 0{,}04$$
$$a_{21} = 0{,}84$$

Teniendo en cuenta (V), la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}96 \\ 0{,}84 & 0{,}16 \end{pmatrix}$$

que nos dice cuáles son los pesos de los factores de mercado que actúan sobre los precios "barato" y "caro", de la manera anteriormente expuesta.

Naturalmente, las series de precios obtenidos por observación en el mercado no serán series engendradas al modo de la (XXIV), es decir, no vendrán exactamente engendradas por una ecuación, sino que tendrán el carácter de series temporales aleatorias. Pero, a partir de ellas, puede ajustarse una ecuación del tipo (XXII) y deducir luego la matriz A de dicha ecuación y de las cotas de precios. En el parágrafo siguiente veremos que en determinadas condiciones de mercado (la más importante de las cuales es que la ley de demanda, sea cual sea, no varíe de un año a otro) los elementos de la matriz A pueden deducirse *a priori* a partir del conocimiento de las reacciones de la producción, es decir, de la industria; y que, recíprocamente, el conocimiento de A puede informarnos de la estructura de dicha industria.

6. Sea el mercado de un producto W, producido por cierta industria. Establezcamos las siguientes hipótesis:

1.°) La demanda de W viene dada por una ecuación lineal:

$$p_t = uq_t + v \qquad u < 0$$

donde:

q_t = cantidad producida de W en el año t

p_t = precio de mercado de W en el año t

u, v, coeficientes constantes, independientes de t

2.°) La industria no puede ofrecer una cantidad de producto W superior a Q. Es decir:

$$\text{Máx } q_t = Q$$

3.°) La industria no puede ofrecer una cantidad de producto W inferior a Q'. Es decir:

$$\text{Mín } q_t = Q'$$

Acerca del significado de estas hipótesis, remarcaremos lo siguiente:

Siendo limitada la capacidad de producción a corto plazo de una industria, es natural el establecimiento de la hipótesis 2.ª.

La hipótesis 3.ª se justifica por el hecho comprobado de la existencia en la industria de un cierto número de empresas que ofrecen globalmente todos los años una cantidad mínima Q' de W (véase la explicación de este hecho con más detalle en el parágrafo 1).

La hipótesis 1.ª es análoga a la que se establece en la forma lineal del teorema de la "telaraña"; exige que la función de demanda no varíe de un año a otro, en el período de tiempo en que se estudia el ciclo.

Notaremos que la cantidad producida por la industria en un cierto año *t* podrá expresarse en la forma:

$$q_t = Q' + \lambda_t (Q - Q') \qquad 0 \leq \lambda_t \leq 1 \qquad \text{(XXV)}$$

En la anterior fórmula (XXV), el término:

$$\lambda_t (Q - Q')$$

representa el volumen de producción "móvil" que se incorpora a la oferta en el año *t*. Llamando *producción móvil* o (*producción flotante*) a la cantidad $Q - Q'$ en que, como máximo, puede incrementarse la cantidad mínima Q ofrecida, el factor λt representa el tanto por uno de incorporación a la oferta de W de la *producción móvil* en el año *t*. Si el precio de mercado en el año *t-1* ha sido bajo, es de esperar que λt sea bajo, es decir, que se incorpore a la oferta en el año *t* una fracción pequeña de la *producción móvil*. Si el precio ha sido alto en el año *t-1*, es de esperar que, por el contrario, λt sea alto. Pero no es necesario hacer ninguna hipótesis particular de este tipo respecto a los valores que tome λt en un año o en otro.

Llamaremos a λt "*nivel de movilización*" de la oferta en el año *t*.

Por otra parte, las hipótesis 1.ª, 2.ª y 3.ª muestran que existe una cota máxima K' y una cota mínima K para los precios. El precio máximo K' corresponderá a la cantidad mínima Q', y el precio K a la cantidad máxima Q. Así pues, el conjunto de las hipótesis 1.ª, 2.ª y 3.ª es equivalente a éste:

Hipótesis H1): Es la misma que la anterior hipótesis 1.ª.

Hipótesis H2): Existe un precio máximo de mercado K' ("precio caro").
Hipótesis H3): Existe un precio mínimo de mercado K ("precio barato"). } (H)

Sean:

r' = valor numérico del "nivel de movilización" de la oferta, λt, en el año siguiente al *t-1* en que se produjo el "precio caro" K'.

r = valor numérico del "nivel de movilización" de la oferta, λt, en el año siguiente al *t-1* en que se produjo el "precio barato" K.

Si se cumplen las hipótesis (H) y el modelo (II) es aplicable, vamos a demostrar:

El modelo (II) queda determinado con independencia de la función de demanda. Su ecuación es:

$$(p_{i+1} - K,\ K' - p_{i+1}) = (p_i - K,\ K' - p_i)\begin{pmatrix} 1 - r' & r' \\ 1 - r & r \end{pmatrix} \qquad \text{(XXVI)}$$

cuya expresión muestra que el modelo depende exclusivamente de las cotas de precios K, K' y de los "niveles de movilización" de la oferta r, r', en los años siguientes al "precio barato" y al "precio caro".

En efecto, sean:

$q^{Q'}_{i+1}$ = cantidad producida el año $i + 1$ siguiente al año i en que se produjo la cantidad mínima Q'.

q^{Q}_{i+1} = cantidad producida el año $i + 1$ siguiente al año i en que se produjo la cantidad máxima Q.

Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} q^{Q'}_{i+1} &= Q' + r'(Q - Q') \\ q^{Q}_{i+1} &= Q' + r\,(Q - Q') \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXVII)}$$

La función de demanda puede escribirse:

$$p_t - K' = \frac{K' - K}{Q' - Q}(q_t - Q') \qquad \text{(XXVIII)}$$

Los precios siguientes al "precio caro" y al precio barato" se obtienen sustituyendo (XXVII) en (XXVIII), y son:

$$\left.\begin{aligned} p^{K'}_{i+1} &= K' - r'(K' - K) \\ p^{K}_{i+1} &= K' - r\,(K' - K) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIX)}$$

Los elementos a_{21}, a_{11}, de la matriz A del modelo se obtienen de las fórmulas (VI) y (VII) unidas a la (XXIX). Resultan ser:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - r' \\ a_{21} &= 1 - r \end{aligned}$$

La matriz A es, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - r' & r' \\ 1 - r & r \end{pmatrix}$$

quedando determinado el modelo por la ecuación (XXVI), como se quería demostrar.

Para que se produzca el ciclo de precios ha de verificarse la condición (X), que es, en este caso:

$$r' > r \qquad \text{(XXX)}$$

Esta condición (XXX) significa:

Para que se produzca ciclo de precios es necesario y suficiente que el "nivel de movilización" de la oferta en el año siguiente al "precio caro" sea mayor que el "nivel de movilización" de la oferta en el año siguiente al "precio barato".

Aplicando la propiedad del final del parágrafo 3, o bien directamente, resulta:

Existe un precio de equilibrio, independiente de la demanda, excepto en el caso de que el "nivel de movilización" de la oferta en el año siguiente al "precio caro" sea igual a la unidad y el "nivel de movilización" de la oferta en el año siguiente al "precio barato" sea, a la vez, igual a cero.

El precio de equilibrio viene dado por

$$p_E = \frac{r'K + (1 - r)\,K'}{1 - r + r'} \qquad \text{(XXXI)}$$

El "nivel de movilización" de la producción flotante necesario para mantener la estabilización del precio es:

$$\lambda_E = 1 - a \qquad \text{(XXXII)}$$

donde a es elemento de la matriz límite de A^n:

$$\begin{pmatrix} a & 1 - a \\ a & 1 - a \end{pmatrix} \qquad \text{(XXXIII)}$$

En efecto, siendo q_E la producción de equilibrio, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} q_E &= Q' + \lambda_E (Q - Q') \\ p_E &= K + (K' - K) a \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXXIV)}$$

Esta última ecuación es la fórmula (XI) del parágrafo 3.

Sustituyendo (XXXIV) en (XXVIII) resulta (XXXII).

7. A continuación veremos a modo de ejemplo aclaratorio dos sencillos problemas a los que puede aplicarse lo anteriormente expuesto.

Problema 1.°—La oferta de un producto agrícola W viene determinada en el año *t* por el número de parcelas, supuestas todas iguales, sembradas de W. No se conoce la función de demanda, pero se supone que dicha función cumple la hipótesis H1. Por observación de los precios de mercado, se sabe que oscilan entre el "precio barato" K = 1'50 y el "precio caro" K = 5'00. Se sabe también por encuestas a los agricultores que existe un cierto número de parcelas (desconocido) que se siembran todos los años del producto W; y que del número restante de parcelas hasta llegar al máximo de tierra disponible, se siembran de W un 80 por 100 en el año que sigue a aquél en que se presenta el "precio caro", mientras solamente se siembran un 30 por 100 en el año que sigue a aquél en que se presenta el "precio barato". Se pide: demostrar la existencia de un ciclo de precios convergente y hallar el precio de equilibrio, supuesto que puede aplicarse el modelo (II). Hallar también el tanto por ciento de las parcelas de reserva (comprendidas entre el mínimo sembrado anualmente y el máximo sembrable) que es preciso cultivar anualmente de W para lograr la estabilidad del precio.

Según los datos del problema, tenemos:

$$\begin{aligned} r &= 0{,}30 \\ r' &= 0{,}80 \end{aligned}$$

El modelo (II) se escribe, conforme (XXVI):

$$(p_{t+1} - 1{,}50,\ p_{t+1} - 5{,}00) = p_t - 1{,}50,\ p_t - 5{,}00) \begin{pmatrix} 0{,}20 & 0{,}80 \\ 0{,}70 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

Siendo r' > r, queda demostrada la existencia de ciclo, que es convergente por ser $r \neq 0$.

El precio de equilibrio es, según (XXXI):

$$p_E = \frac{0,80 \,.\, 1,50 + 0,70 \,.\, 5,00}{1 - 0,30 + 0,80} = 3,13$$

Al alcanzarse el equilibrio, la matriz (XXXIII) límite de A^n es, según se deduce fácilmente de (XI):

$$\begin{pmatrix} 0,47 & 0,53 \\ 0,47 & 0,53 \end{pmatrix}$$

Luego para obtener la estabilización del precio es preciso que el 53 por 100 de la "producción móvil" se incorpore a la producción de W. Es decir, que se siembren de W el 53 por 100 de las parcelas de reserva, comprendidas entre el mínimo de parcelas sembradas todos los años y el máximo de parcelas susceptibles de sembrarse de W.

Problema 2.°—(Inverso del anterior.) La oferta de un producto agrícola W viene determinada como en el problema 1.°, pero ahora no se conocen los "niveles de movilización" de la oferta, ni ningún dato acerca de las reacciones de la producción, excepto una serie de precios de mercado, con un precio máximo de 5,00 y mínimo de 1,50.

La demanda, también desconocida, se supone que cumple H1 como en el problema anterior. Se pide una información acerca de la estructura de la producción (ajustando la serie de precios se ha obtenido la ecuación de autorregresión):

$$p_{j+1} = -0,80\ p_j + 5,50$$

Los coeficientes de la matriz A se obtienen por las fórmulas (XIV) y (XV). Resultan:

$$a_{11} = 0$$
$$a_{21} = 0,80$$

La matriz es, por tanto:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}$$

Esta matriz nos indica:

El año siguiente al de "precio alto" los agricultores siembran de W todas las parcelas de reserva.

En cambio, el año siguiente al de "precio bajo" los agricultores siembran de W un 20 por 100 por encima de la siembra mínima.

Se pasa, pues, más fácilmente de producciones bajas a altas que a la inversa.

La matriz de equilibrio (XXXIII) es:

$$\begin{pmatrix} 0{,}45 & 0{,}55 \\ 0{,}45 & 0{,}55 \end{pmatrix}$$

matriz que se deduce fácilmente de (XI), una vez obtenido el precio de equilibrio de la ecuación de autorregresión.

Así pues, para lograr la estabilidad del precio es preciso que se siembren de W el 55 por 100 de las parcelas de reserva. Cuando, como en este ejemplo, se parte de una ecuación *ajustada* para determinar los coeficientes de la matriz, puede ocurrir que alguno de ellos resulte negativo. Procede entonces asignarle valor nulo, a menos que no se adopte otro criterio para la fijación de cotas de precios.

Enrique BALLESTERO PAREJA