EL INSTRUMENTO MATEMATICO EN LA TEORIA DEL DESARROLLO Y CICLO

GENERALIDADES.

Es corriente en la literatura económica el observar cómo diversos economistas han ido evolucionando hacia el estudio de la Teoría del Desarrollo partiendo de la del Ciclo y considerando posteriormente éste como un estudio de las perturbaciones de una economía en crecimiento. Dado el plan de estudios de la Facultad de Ciencias Económicas, nuestros economistas forzosamente deben seguir el mismo clásico itinerario. En Teoría 1.° no se puede pretender dar al estudiante una visión de conjunto, ni siquiera sistemática, de la Teoría Económica; basta con que se le introduzca en una serie de conceptos; en Teoría 2.° se pasa al campo de la microeconomía, que no debe ser, como equivocadamente se entiende, un estudio de conceptos y técnicas al servicio de problemas de empresa, sino el de servir de instrumentos intermedios dentro de una teoría general para bucear en la realidad (ejemplo, función de producción), piénsese en el uso que hacen de la misma SOLOW (1) y LEONTIEF (2) dentro de sus modelos macroeconómicos; Teoría 3.° con el estudio del Dinero, Banca y Comercio Internacional y con el carácter casi exclusivamente keynesiano con que se enfocan dichos estudios producen a la larga en el estudiante que intenta recapitular sus conocimientos un gran confusionismo; Teoría 4.° con el estudio de la Renta Nacional, concepto de 1.° y no de 4.°, perteneciendo el estudio de su técnica a la Estructura Económica, y con el estudio del Ciclo no ha

(1) R. M. SOLOW: *A Contribution to the Theory of Economic Growth.* "The Quarterly Journal of Economics", 1956.

(2) W. LEONTIEF: *Studies in the Structure of the American Economy.* New York, 1953.

dejado de ser una especie de parche en la carrera, lo que tiende a aumentar el confusionismo.

La crítica anterior puede parecer fuera de lugar, porque el fin de este trabajo no es el de proponer un plan mejor y, ni mucho menos, la presentación de un enfoque general de la Teoría Económica al que se deba subordinar el plan de estudios. Pero creyendo que estamos necesitados de un enfoque general que no nos puede venir de las discusiones acerca de los conceptos ahorro-inversión y similares controversias, y sí de una teoría que tome como base el concepto de desarrollo, es por lo que justifico la crítica y me permito escribir este artículo, que no pretende tener otro mérito que el didáctico, es decir, el proporcionar al estudiante el conocimiento de un instrumento matemático, en sí mismo sencillo y que, por lo mismo, es dado casi por conocido por la mayoría de los autores que estudian el problema del crecimiento (3).

Como el fin de este trabajo es presentar el instrumento matemático en su aspecto de lenguaje y no de poderoso instrumento para resolver problemas concretos (4), lo hemos revestido de un ropaje económico encuadrándolo en un modelo donde juegan únicamente el multiplicador, el acelerador y la inversión autónoma. Esto es una heroica abstracción que implica una gran serie de hipótesis acerca del comportamiento del sistema económico, y cada vez que se trabaja más en ello se siente más palpablemente su irrealidad; el levantar estas hipótesis puede ser materia de otros trabajos.

Hipótesis del modelo estacionario.

1.° La inversión autónoma (A) es nula, siendo la inversión bruta igual a la inversión de reposición.

---

(3) Como pequeña nota bibliográfica, véase M. KALECKI: *Theory of Economic Dynamics*, London, 1954. R. F. HARROD: *An Essay in Dinamic Theory*, "Economic Journal", 1939, y *Towards a Dynamic Economics*, London, 1948. W. J. BAUMOL: *Economic Dynamics*, New York, 1951. W. FELLNER: *Trends and Cycles in Economic Activity*, New York, 1956. E. LUNDBERG: *Studies in the Theory of Economic Expansion*, London, 1937. D. M. WRIGHT: *The Economics Disturbance, Democracy and Progress, Capitalism*, New York, 1947, 1948 y 1951. J. R. HICKS: *The Trade Cycle*, London, 1956. P. A. SAMUELSON: *Foundations of Economic Analysis*, Cambrigde, 1953. N. KALDOR: *Essays on Economic Stability and Growth*, London, 1960. E. V. DOMAR: *Essays in the Theory of Economic Growth*, New York, 1957, etc. He mezclado tratadistas de tipo general con otros que estudian problemas particulares. Hay traducciones al español de KALECKI, HICKS y SAMUELSON.

(4) Esto debe ser dejado a los econometristas.

la ecuación [1], empezaremos por el caso más sencillo de una ecuación de primer grado.

1.º Ecuaciones de primer grado:

Ejemplo típico de las mismas son las que rigen el comportamiento de un modelo regido únicamente por el multiplicador.

Admitimos como hipótesis de partida que:

$$Y_t = C_t + A$$

donde

Y_t = Renta en el período *t*,
C_t = Consumo en el período *t*.
A = Inversión autónoma, conocida y dada; no existe inversión inducida (9).

A su vez, admitimos un retraso, de forma que

$$\begin{aligned} C_t &= c\,Y_{t-1} \\ Y_t - c\,Y_{t-1} &= A \end{aligned} \qquad [2]$$

Si admitimos la posibilidad de una renta de equilibrio, $\overline{Y}$, ésta tiene que ser tal que una vez alcanzada no sufra variaciones:

$$\overline{Y} = Y_t = Y_{t-1} = \ldots$$

Luego, en equilibrio

$$\begin{aligned} \overline{Y} &= c\,\overline{Y} + A \\ \overline{Y} - c\,\overline{Y} &= A \\ \overline{Y} &= \frac{A}{1-c} \end{aligned} \qquad [3]$$

expresión de la renta de equilibrio con el multiplicador estático.

Lo que tratamos de obtener es precisamente una ecuación que nos dé los valores de la renta en los diversos períodos, desde que se dio la

(9) El valor del acelerador es cero.

alteración en el valor de A hasta llegar al valor de $\overline{Y}$, y si dicho proceso es posible o existen fuerzas en el sistema que, una vez que nos hayamos apartado de la primitiva solución de equilibrio, nos impidan encontrar una nueva.

Para resolver esto definamos:

$$y_t = Y_t - \overline{Y}$$

$$y_{t-1} = Y_{t-1} - \overline{Y}$$

Restemos [2] de [3] y tendremos

$$y_t - c\, y_{t-1} = 0$$
$$y_t = c\, y_{t-1}$$

forma homogénea de la ecuación en diferencia [2], en que hemos hecho desaparecer el término independiente.

Como la ecuación [2] es válida para cualquier valor de t, por ejemplo

$$Y_{t-1} - c\, Y_{t-2} = A \qquad [4]$$

restando [4] de [3]

$$y_{t-1} - c\, y_{t-2} = 0$$
$$y_{t-1} = c\, y_{t-2}$$

aplicando repetidamente esta fórmula, tenemos:

$$y_t = c\, y_{t-1} = c^2\, y_{t-2} = \ldots = c^t\ y_0 = c^t (Y_0 - \overline{Y})$$

y la solución general es:

$$Y_t = \overline{Y} + c^t (Y_0 - \overline{Y})$$

A simple vista se ve que habrá equilibrio estático si $c < 1$. Las posibles soluciones teóricas son:

$c > 1\ y_t$:	crece o decrece progresivamente sin límite.
$0 < c < 1$	decrece hacia cero.
$-1 < c < 0$	crece y decrece alternativamente hacia cero.
$c < -1$	crece y decrece alternativamente sin límite.

Aun en este caso, en que las dos últimas soluciones son prácticamente imposibles, el tratamiento del problema por ecuaciones en diferencias nos da mayores posibilidades de análisis que el hacerlo por ecuaciones diferenciales.

Vamos a ver esta diferencia siguiendo el modelo de PHILLIPS (10).

La demanda viene definida por

$$D = C + A = cY + A = (1 - s)\,Y + A \qquad [5]$$

donde A es la inversión autónoma, conocida y dada.

La oferta (11), es decir, la producción Y, correspondiente a un empuje de la demanda D, no es automática, sino que viene retardada. Si designamos con r a esta velocidad de respuesta, tendremos que la variación de la producción en el tiempo será:

$$\frac{dY}{dt} = -r\,(Y - D) \;\; (12) \qquad [6]$$

Teniendo en cuenta [5] y [6]

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} + rY &= rD = r\,(1 - s)\,Y + rA \\ \frac{dY}{dt} + rsY &= rA \end{aligned} \qquad [7]$$

Si existe una renta de equilibrio tal que $\overline{Y} = Y = \dfrac{A}{s}$, expresión también de la renta de equilibrio con el multiplicador estático, y definiendo

$$y = Y - \overline{Y}$$

(10) A. N. PHILLIPS: *Stabilitation Policy in a Closed Economy*, "Economic Journal", 64. 1954.

(11) Se observará que existe una total disociación entre las fuerzas que regulan la oferta y la demanda, tratamiento típicamente keynesiano, pero erróneo, ya que la inversión autónoma, materializada en equipo capital, se enquista en el lado de la oferta, alterando la capacidad de producción y las posibilidades de oferta.

(12) El signo negativo explícito se debe a que tratamos el problema en una situación de crecimiento donde la demanda supera a la oferta.

entonces [3] se convierte en

$$\frac{dy}{dt} + rsy = 0 \text{ (13)} \qquad [8]$$

y sabiendo que

$$\frac{d(\log y)}{dt} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt},$$

la [8] se nos convierte en

$$\frac{d(\log y)}{dt} = -rs$$

$$\log y = -\mathrm{rst} + \text{constante } (k)$$

$$y = k\,e^{-\mathrm{rst}} = y_0\,e^{-\mathrm{rst}}$$

ya que debemos identificar k con los valores iniciales.

Y la solución general es de la forma

$$Y = \overline{Y} + e^{-\mathrm{rst}}$$

esta solución, que es similar a la obtenida por la ecuación en diferencias para valores de $s < 1$, sin embargo, no nos puede ofrecer la posibilidad de un movimiento alternativo, por depender de una función continua exponencial.

Hecha esta disgresión, que nos ha servido para establecer la diferencia entre ambos tipos de ecuaciones, vamos a resolver la primera ecuación en diferencias por el método general y no por el de tanteo que hemos empleado.

La ecuación de tipo general es:

$$Y_t - c\,Y_{t-1} = A,$$

y en forma homogénea,

$$y_t = c\,y_{t-1}$$

---

(13) $\dfrac{dY}{dt} - \dfrac{d\overline{Y}}{dt} = \dfrac{dy}{dt}$

Un método de resolverla es suponer que y_t es igual a un cierto valor u^t, donde el valor u debe ser hallado.

Sustituyendo en la forma homogénea, $u^t = c\,u^{t-1}$, luego $u = c$; pero $u = c$ no es más que una solución particular. La general es $A\,u^t$, que sin duda, es una solución de la forma homogénea, ya que ésta carece de término independiente. Luego, si $u = c$ es una solución particular, de forma que

$$y_t = c\,y_{t-1} = c\,u^{t-1} = c^t,$$

la solución general será de la forma

$$y_t = A\,c^t,$$

donde A depende de los valores iniciales, y en nuestro caso será $A = y_0$, y la solución general será:

$$y_t = c^t\,y_0$$

$$Y = \overline{Y} + c^t\,(Y_0 - \overline{Y})$$

2.° Ecuación de segundo grado:

Habíamos dicho que las discrepancias respecto a la situación estacionaria de partida nos venían dadas por la ecuación en diferencias, en su forma homogénea:

$$y_n = (1 - s + v)\,y_{n-1} + v\,y_{n-2},$$

que vamos a determinar.

Abordaremos el problema con toda generalidad. Así, la inversión inducida, llevada a cabo en el período n, se supone linealmente dependiente de las variaciones en la producción de p períodos anteriores (14), de forma que:

$$\begin{aligned} I_n = v_1\,(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + v_2\,(Y_{n-2} - Y_{n-3}) + \ldots + \\ + v_{p-1}\,(Y_{n-p+1} - Y_{n-p}). \end{aligned}$$

El consumo depende también de las rentas anteriores

$$C_n = c_1\,Y_{n-1} + c_2\,Y_{n-2} + \ldots + c_p\,Y_{n-p}$$

(14) Véase Hicks, obra citada, págs. 95, 254 y 257.

La inversión autónoma es A_n, luego $Y = C_n + A_n + I_n$.

$$Y_n = A_n + \sum_{r=1}^{r=p} C_r Y_{n-r} + \sum_{r=1}^{r=p-1} V_r (Y_{n-r} - Y_{n-r-1})$$

siendo ésta la ecuación fundamental de un modelo donde juegan el multiplicador y el acelerador (15).

Para pasar a la forma homogénea, se aplica el método que hemos visto en las ecuaciones de primer grado, obteniendo:

$$y_n = \sum_{r=1}^{r=p} C_r y_{n-r} + \sum_{r=1}^{r=p-1} V_r (y_{n-r} - y_{n-r-1})$$

Como en el supuesto simplificado que estamos estudiando, el consumo depende sólo de la renta del período anterior, y la inversión inducida, de la variación de la producción del período anterior, tendremos que $C_r = c_1$ y $V_r = v_1$, que, a su vez, serán: $c_1 = c$, $v_1 = v$, y la ecuación general se simplifica:

$$y_n = c\, y_{n-1} + v\, (y_{n-1} - y_{n-2})$$

Como $c = 1 - s$, tenemos:

$$y_n - (1 - s + v)\, y_{n-1} + v\, y_{n-2} = 0 \qquad [9]$$

como antes,

$$y_n = Y_n - \overline{Y}$$

Debemos encontrar las soluciones de [9]. Intentamos:

$$u^n - (1 - s - v)\, u^{n-1} + v\, u^{n-2} = 0$$

Dividiendo por u^{n-2}:

$$u^2 - (1 - s - v)\, u + v = 0$$

Las raíces de esta ecuación (u_1, u_2) serán soluciones de [9], siendo la solución general de la forma:

$$Y_n = \overline{Y} + A_1\, u_1 + A_2\, u^n{}_2$$

donde A_1 y A_2 son constantes arbitrarias que dependen de los valores iniciales.

---

(15) Las diferencias de unos modelos a otros, por ejemplo, de los de HICKS a KALDOR, dependen de la forma de concebir la dependencia del acelerador a la renta.

Un ejemplo ayudará a comprenderlo.

Supongamos que $s = 0{,}10$ y $v = 0{,}40$, y que el valor A, de la inversión autónoma, es 1.000.

La ecuación general en diferencias será:

$$Y_n = 0{,}90\, Y_{n-1} + 0{,}40\, (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + 1.000$$

y la forma homogénea:

$$y_n - (0{,}90 + 0{,}40)\, y_{n-1} + 0{,}40\, y_{n-2} = 0$$
$$y_n - 1{,}30\, y_{n-1} + 0{,}40\, y_{n-2} = 0$$

Decíamos que $y_n = Y_n - \overline{Y}$, siendo $\overline{Y}$ la renta de equilibrio. A este último valor lo denominamos componente estacionaria, y es el valor de la renta que, una vez alcanzado, no sufre variación:

$$\overline{Y} = Y_n = Y_{n-1} = \ldots$$

por tanto.

Componente estacionaria:

$$\overline{Y} = 0{,}90\, \overline{Y} + 0{,}40\, (\overline{Y} - \overline{Y}) + 1.000$$
$$\overline{Y} = 10.000$$

La *componente transitoria* depende del valor y_n de la forma homogénea, ya que, por definición,

$$Y_n = \overline{Y} + y_n$$

Probemos $y_n = u^n$

$$u^n - 1{,}30\, u^{n-1} + 0{,}40\, u^{n-2} = 0$$
$$u^{n-2}\, (u^2 - 1{,}30\, u + 0{,}40) = 0$$

quedándonos como ecuación característica

$$u^2 - 1{,}30\, u + 0{,}40 = 0$$
$$u_1 = 0{,}80$$
$$u_2 = 0{,}50$$

La componente transitoria será

$$y_n = A_1\, 0{,}80^n + A_2\, 0{,}50^n$$

y la solución completa

$$Y_n = 10.000 + A_1\, 0{,}80^n + A_2\, 0{,}50^n \qquad [10]$$

A_1 y A_2 dependen de los valores iniciales, en este caso de dos períodos, por ser una ecuación de segundo orden. Según la hipótesis de partida, las Y_n representan "incrementos de renta" respecto a la situación estacionaria de partida; por tanto, en el período $n = 0$, $Y_0 = 0$, y en el período $n = 1$, el incremento de renta será la inversión autónoma, luego $Y_1 = 1.000$.

De aquí, para $n = 0$

$$0 = 10.000 + A_1\, 0{,}80^0 + A_2\, 0{,}50^0$$

para $n = 1$

$$1.000 = 10.000 + A_1\, 0{,}80^1 + A_2\, 0{,}50^1$$
$$A_1 = -13.333$$
$$A_2 = 3.333$$

Aplicando estos valores en [10] podemos obtener cualquier valor de Y_n.

Si queremos aislar el efecto que produce el cambio de la inversión autónoma en el proceso transitorio, debemos suponer que el cambio de la inversión autónoma se produce en un período y luego vuelve a anularse. Esto quiere decir que no hay componente estacionaria, sino sólo la transitoria, siendo, por tanto, la solución completa

$$Y_n = A_1\, 0{,}80^n + A_2\, 0{,}50^n$$

Por el mismo razonamiento anterior, los valores de A_1 y A_2 serán: para $n = 0$

$$0 = A_1\, 0{,}80^0 + A_2\, 0{,}50^0$$

para $n = 1$

$$1.000 = A_1\, 0{,}80^1 + A_2\, 0{,}50^1$$
$$A_1 = \quad 3.333$$
$$A_2 = -3.333$$

obteniendo los valores de la serie con facilidad y cuando n sea suficientemente grande tenderá a cero, volviendo el sistema a su situación de partida, estado estacionario.

¿Ocurrirá esto para todos los valores de los parámetros s y v?

3.° Significado económico de las raíces.

Dada nuestra vía de ataque, las posibles soluciones serán las de la ecuación

$$y_n - (1 - s + v)\, y_{n-1} + v\, y_{n-2} = 0$$

resuelta mediante la ecuación auxiliar

$$f(u) = u^2 - (1 - s + v)\, u + v = 0 \qquad [11]$$

y cuya solución nos daba

$$y_n = A_1\, u_1^n + A_2\, u_2^n \qquad [12]$$

Siguiendo a ALLEN (16) y a HICKS (17), el enfoque de SAMUELSON (18) es más complicado, podemos clasificar las soluciones en:

Raíces reales — Solución no cíclica $\begin{cases} v < (1 - \sqrt{s})^2 & \text{tiende hacia cero.} \\ v > (1 + \sqrt{s})^2 & \text{explosiva.} \end{cases}$

Raíces complejas — Solución cíclica $\begin{cases} (1 - \sqrt{s})^2 < v < 1 & \text{Ciclos atenuados.} \\ 1 < v < (1 + \sqrt{s})^2 & \text{Ciclos explosivos.} \end{cases}$

---

(16) R. G. D. ALLEN. Obra citada, págs. 213 y siguientes

(17) J. R. HICKS. Obra citada, pág. 258.

(18) P. A. SAMUELSON: *Fundamentos del Análisis Económico*. Ateneo. Págs. 442 y siguientes.

Veamos esto:

Raíces reales.

Los valores de u_1 y u_2 dependen de s y v, para que sean reales

$$(b^2 > 4\,a\,c),\ (1 - s + v)^2 > 4\,v.$$

A efectos de cálculos económicos, $1 - s$ y v son positivos, luego

$$(1 - s + v) > 2\sqrt{v}, \quad \text{o sea,} \quad (1 - \sqrt{v})^2 > s\,.$$

De aquí,

o $1 - \sqrt{v} > \sqrt{s}$ o

$\sqrt{v} - 1 > \sqrt{s}$;

por tanto,

$$v < (1 - \sqrt{s})^2 \quad \text{o} \quad v > (1 + \sqrt{s})^2\,.$$

Analicémoslo partiendo de los valores $f(u)$ en la ecuación [11].

u	$-\infty$	-1	0	1	∞
$f(u)$	positiva	$2 - s + 2\,v$ positiva	v positiva	s positiva	positiva

[13]

Siendo las raíces de la ecuación [11] los puntos de corte de $f(u)$ con el eje de abscisas, y dado que para los valores citados en [13], $f(u)$ es positiva y en el intervalo entre las dos raíces debe alcanzar valores negativos, si $f(u)$ tiene raíces reales, *ambas* deben estar en cualquiera de los cuatro intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Como

$$u_1 + u_2 = -\frac{b}{a} = 1 - s + v > 0 \qquad [14]$$

se descartan los intervalos negativos y quedan los intervalos $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

Primer caso

$$v < (1 - \sqrt{s})^2$$

Admitamos la hipótesis de que

$$v = (1 - \sqrt{s})^2;$$

entonces

$$1 - s + v = 1 - s + (1 - \sqrt{s})^2 = (1 - \sqrt{s})$$

Como v es menor que la hipótesis, tenemos

$$1 - s + v < 2(1 - \sqrt{s}) < 2 \qquad [15]$$

por ser s positiva; luego, por [14], u_1 y u_2 deben estar en el intervalo $(0, 1)$.

La figura 1 representa este caso.

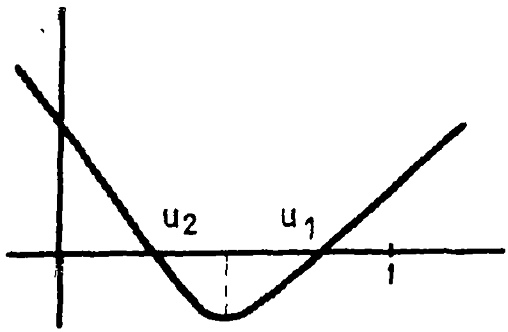

FIG. 1

dado que $f(u) = u^2 - (1 - s + v)\,u + v$.

El mínimo (en este caso) estará donde

$$\frac{d\,f(u)}{d\,u} = 2\,u - (1 - s + v) = 0$$

$$u = \frac{1 - s + v}{2} = \frac{< 2}{2}$$

que, por [15], nos confirma lo anterior.

Si los valores de u_1 y u_2 están en el intervalo (0, 1), nuestra ecuación $y_n = A_1 u_1^n + A_2 u_2^n$ tenderá a cero, y el sistema volverá a la situación de partida; ya hemos visto un ejemplo.

2.° caso $$v > (1 + \sqrt{s})^2$$

Supongamos que $v = (1 + \sqrt{s})^2$, entonces

$$1 - s + v = 1 - s + (1 + \sqrt{s})^2 = 2(1 + \sqrt{s});$$

por tanto,

$$1 - s + v > 2(1 + \sqrt{s}) > 2$$

y los valores de u_1 y u_2 estarán en el intervalo $(1, \infty)$.

Nuestra ecuación [12] tenderá a infinito para n suficientemente grande, y el sistema tendrá una tendencia explosiva.

Raíces complejas

1.° Caso

$$(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$$

Las raíces son conjugadas complejas

$$\alpha \pm i\beta = \frac{1}{2}(-b \pm i\sqrt{4c - b^2})$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}b, \; i\beta = \frac{1}{2} i\sqrt{4c - b^2}$$

Pasando a formas trigonométricas

$$\alpha = r\cos\theta, \qquad \beta = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde r es la raíz cuadrada positiva de $\alpha^2 + \beta^2$ y $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, luego

$$\alpha \pm i\beta = r(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad [16]$$

La solución general será de la forma

$$Y_n = \overline{Y} + B_1(\alpha + i\beta)^n + B_2(\alpha - i\beta)^n$$

donde B_1 y B_2 son constantes arbitrarias que están ligadas a los valores de A_1, A_2, valores arbitrarios que dependen de las condiciones iniciales. Siendo B_1 y B_2 conjugados complejos.

Teniendo en cuenta [16] y aplicando el teorema de DE MOIVRE (19) tenemos:

$$Y_n - \overline{Y} = r^n [B_1 (\cos n\,\theta + i \operatorname{sen} n\,\theta) + B_2 (\cos n\,\theta - i \operatorname{sen} n\,\theta)] =$$

$$= r^n (A_1 \cos n\,\theta + A_2 \operatorname{sen} n\,\theta)$$

donde

$$A_1 = B_1 + B_2 \quad \text{y} \quad A_2 = i (B_1 - B_2)$$

Como A_1 y A_2 están definidos por las condiciones iniciales, el valor $Y_n - \overline{Y}$ es real.

Pasando A_1 y A_2 a coordenadas polares, obtenemos una nueva formulación, de grandes aplicaciones.

$$A_1 = A \cos \varepsilon, \quad A_2 = A \operatorname{sen} \varepsilon$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{A_2}{A_1}$$

Entonces:

$$Y_n - \overline{Y} = A\, r^n (\cos n\,\theta \cos \varepsilon + \operatorname{sen} n\,\theta \operatorname{sen} \varepsilon) = A\, r^n \cos (n\,\theta - \varepsilon)$$

Ejemplo:

Tomemos valores de s y v que cumplen la relación

$$(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2$$

así, $s = 0{,}50$, $v = 0{,}50$ y la inversión autónoma 1.000.

La ecuación en diferencia será:

$$Y_n = 0{,}5\, Y_{n-1} + 0{,}5\, (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + 1.000$$

y su forma homogénea:

$$y_n - y_{n-1} + 0{,}5\, y_{n-2} = 0$$

Como antes, determinaremos las componentes estacionaria y transitoria.

(19) Ver *Análisis Matemático*, REY PASTOR, pág. 137.

Componente estacionaria:

$$\overline{Y} = \overline{Y} - 0{,}5\,\overline{Y} + 1.000$$

$$\overline{Y} = 2.000$$

Componente transitoria:

Intentemos $y_n = u^n$:

$$u^n - u^{n-1} + 0{,}5\,u^{n-2} = 0$$

$$u^{n-2}\,(u^2 - u + 0{,}5) = 0$$

Ecuación característica:

$$u^2 - u + 0{,}5 = 0$$

$$u_1 = \alpha + i\,\beta = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$u_2 = \alpha - i\,\beta = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

La componente transitoria será de la forma:

$$y_n = B_1\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^n + B_2\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)^n$$

Pasando las raíces a la forma trigonométrica, tenemos:

$$y_n = r^n\,\{B_1\,(\cos n\,\Theta + i \operatorname{sen} n\,\Theta) + B_2\,(\cos n\,\Theta - i \operatorname{sen} n\,\Theta)\} =$$

$$= r^n\,\{(B_1 + B_2)\cos n\,\Theta + (B_1 - B_2)\,i \operatorname{sen} n\,\Theta\}$$

donde

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\Theta = \frac{\alpha}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\Theta = \frac{\beta}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

luego

$$\Theta = 45^0 = \frac{\pi}{4}$$

Haciendo

$$B_1 + B_2 = A_1$$
$$i(B_1 - B_2) = A_2,$$

tenemos

$$y_n = r^n (A_1 \cos n\,\Theta + A_2 \operatorname{sen} n\,\Theta) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \left(A_1 \cos n \frac{\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen} n \frac{\pi}{4}\right)$$

Determinemos A_1 y A_2.

Según la hipótesis inicial, las Y_n representan "incrementos de renta"; por tanto, en el período $n = 0$, $Y_0 = 0$ y en el período $n = 1$, $Y_1 = 1.000$, incremento que sufre la renta de la economía estacionaria por el importe de la inversión autónoma igual a 1.000.

En consecuencia,

$$Y_0 = 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 \left(A_1 \cos 0 \frac{\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen} 0 \frac{\pi}{4}\right) + 2.000 =$$
$$= A_1 + \quad 2.000$$
$$A_1 = -2.000$$

$$Y_1 = 1.000 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 \left(A_1 \cos 1 \frac{\pi}{4} + A_2 \operatorname{sen} 1 \frac{\pi}{4}\right) + 2.000 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(A_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + A_2 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2.000 =$$

$$= \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_2 + 2.000$$

$$A_2 = 0,$$

luego la solución general será

$$Y_n = 2.000 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \quad (-2.000 \cos n\, 45^0)$$

Al mismo resultado llegaremos pasando A_1 y A_2 a coordenadas polares.

$$A_1 = A \cos \varepsilon \qquad A_2 = A \operatorname{sen} \varepsilon$$

$$A = \sqrt{(-2.000)^2 + 0} = -2.000$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{0}{-2.000} = 0, \qquad \varepsilon = 0$$

y la solución general

$$Y_n = 2.000 - 2.000 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cos (n\, 45^0 + 0)$$

Para discutir el significado de la componente transitoria conviene estudiar, aunque sea ligeramente, las características de una función sinusoidal.

La componente transitoria como función sinusoidal.

Nuestra ecuación

$$y_n = A\, r^n \cos (n\, \Theta - \varepsilon)$$

es una función sinusoidal. Para ver sus propiedades comencemos estudiando el tipo más sencillo.

$$y = A \cos (n\, \Theta - \varepsilon)$$

Sabemos, por ejemplo, que el desarrollo de una función tal como $y = \cos\Theta$ gráficamente es

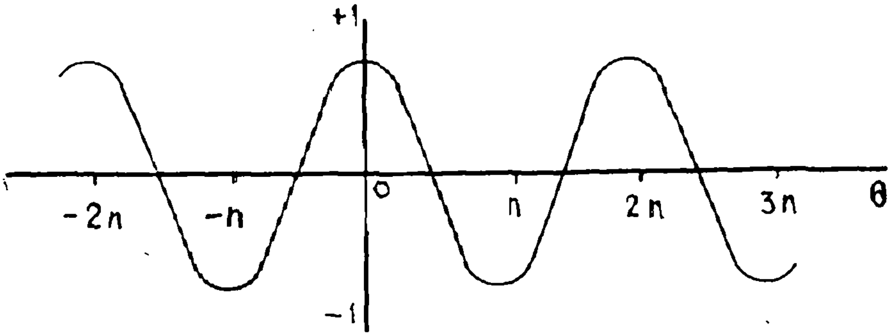

FIG. 2

En toda función sinusoidal debemos distinguir (20):

Período: Intervalo en el cual se produce un ciclo completo: para $y = \cos\Theta$ será 2π.

Amplitud: Valor de la ordenada en la cima; en nuestro ejemplo $y = 1$.

Fase: Viene determinada por el valor de ε, y nos indica el valor donde la primera "cima" es alcanzada; en el ejemplo, 0.

Por tanto, en [16]:

Período: Como una "cima" se dará para el valor

$$\cos(n\,\Theta - \varepsilon) = 1, n\,\Theta - \varepsilon = 0,$$

luego $n = \dfrac{\varepsilon}{\Theta}$, las sucesivas cimas se darán igualando a valores tales como $-4\pi, -2\pi, 0, 2, 4 \ldots$, siendo los valores de n

$$-\frac{4\pi - \varepsilon}{\Theta}, \quad -\frac{2\pi - \varepsilon}{\Theta}, \quad \frac{\varepsilon}{\Theta}, \quad \frac{2\pi + \varepsilon}{\Theta} \quad \frac{4\pi + \varepsilon}{\Theta}$$

y el intervalo será $\dfrac{2\pi}{\Theta}$, número de períodos que dura un ciclo completo.

---

(20) Véase Rey Pastor, pág. 420, y Allen, pág. 117. Obras citadas.

Amplitud $= A$.

Fase: según lo anterior, será para $\Theta = \dfrac{\varepsilon}{n}$.

Si pasamos a la forma más general

$$y_n = A\, r^n \cos (n\, \Theta - \varepsilon)$$

ı amplitud depende de los parámetros (A, r), continuando el período la fase como antes. Fácilmente se ve que si la amplitud depende del alor $A\, r^n$, siendo $n = 0, 1, 2 \ldots$, indicando la variable tiempo, entonces i $r < 1$ los ciclos se atenuarán; si $r = 1$, los ciclos serán periódicos; si > 1, la tendencia será explosiva:

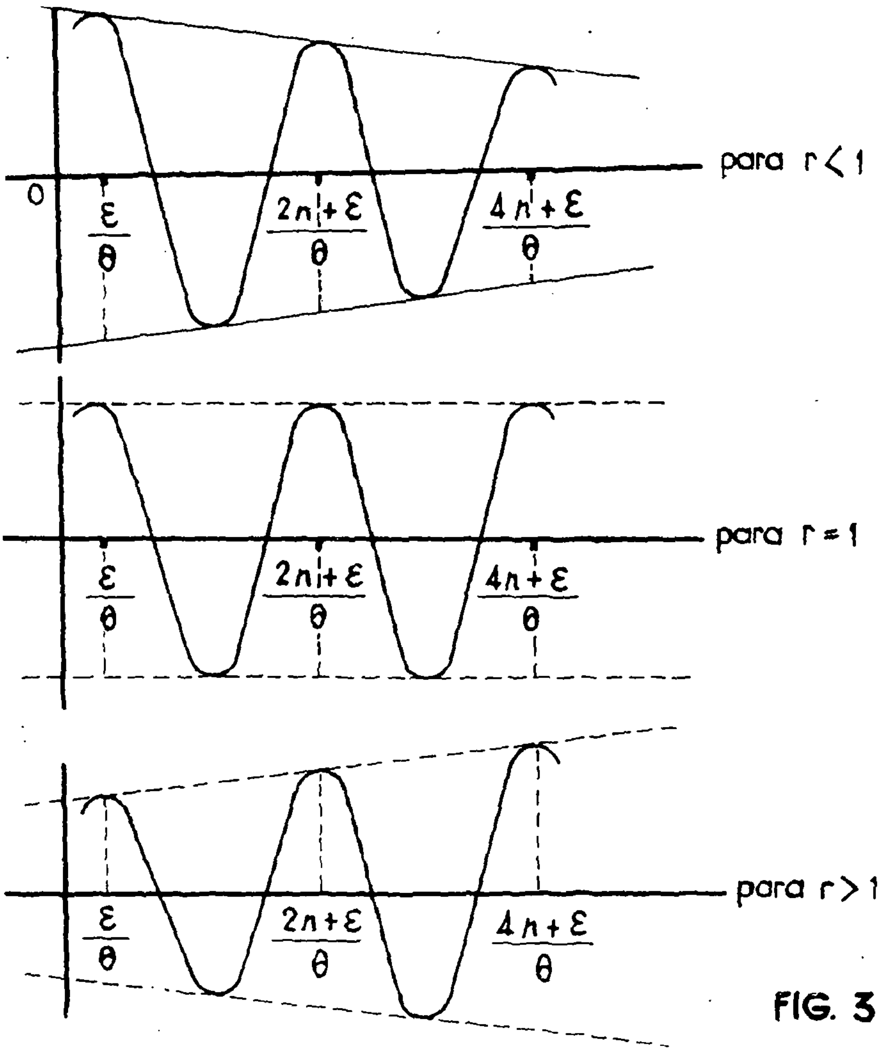

FIG. 3

Como las raíces de la ecuación característica son:

$$\alpha \pm i\beta = r(\cos\Theta \pm i \operatorname{sen}\Theta),$$

donde

$$\alpha = \frac{1 - s + v}{2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4v - (-1 + s - v)^2}$$

de la suma y el producto de las raíces obtenemos, respectivamente,

$$2r\cos\Theta = 1 - s \pm v \quad \text{y} \quad r^2 = v,$$

luego

$$\cos\Theta = \frac{1 - s + v}{2\sqrt{v}}$$

a) Período: El período o tiempo de oscilación es dado por $\dfrac{2\pi}{\Theta}$; por consiguiente, la duración del ciclo depende de Θ, y será tanto más corto cuanto mayor sea Θ. El intervalo es por lo menos 4 períodos, ya que Θ puede oscilar de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$.

Como $\cos\Theta$ depende de los valores s y v, nos va a ser útil dar s como dado. Derivemos con respecto a v

$$\frac{d}{dv}\cos\Theta = \frac{v + s - 1}{4v\sqrt{v}},$$

luego

$$\frac{d}{dv}\cos\Theta \begin{cases} < 0 \text{ para } v < 1 - s \\ = \quad \text{"} \quad v = 1 - s \\ > 0 \quad \text{"} \quad v > 1 - s \end{cases}$$

tiene un mínimo para $v = 1 - s$.

Dado que estamos estudiando el caso donde v está en el intervalo

$$(1 - \sqrt{s})^2 < v < (1 + \sqrt{s})^2,$$

tenemos:

1.° Límite inferior $v = (1 - \sqrt{s})^2$

valor $$\cos \Theta = \frac{1 - s + v}{2\sqrt{v}} = 1$$

$\Theta = 0$ y el número de períodos muy grande.

2.° Límite superior $v = (1 + \sqrt{s})^2$

valor $$\cos \Theta = \frac{1 - s + v}{2\sqrt{v}} = 1$$

nuevamente $\Theta = 0$, y el número de períodos infinitamente grande.

3.° Valor mínimo de $\cos \Theta$ para $v = 1 - s$

$$\cos \Theta = \frac{1 - s + v}{2\sqrt{v}} = \sqrt{1 - s}$$

para el valor correspondiente de Θ, el número de períodos es el mínimo. El límite es $\Theta = \frac{\pi}{2}$; cuando $\cos \Theta = 0$, cuatro períodos.

Resumiendo, el período de oscilación es muy largo para valores correspondientes al límite inferior, decrece hasta un mínimo para el valor de Θ correspondiente a $v = 1 - s$ y vuelve a ser largo para valores correspondientes al límite superior.

Se observa que si s es pequeña, $\cos \Theta$ tenderá a 1, y para darse un ciclo completo se necesitará un número de períodos considerable.

b) La amplitud y la fase dependen de los parámetros A, r y ε; A y ε vienen fijados por los valores iniciales. Dado que $r = \sqrt{v}$, y sabiendo que las oscilaciones serán amortiguadas si $r < 1$, y explosivas, si $r > 1$, el carácter de la oscilación nos vendrá dado por el valor de v (acelerador). Si $v < 1$, amortiguadas; si $v > 1$, explosivas.

La propensión al ahorro como factor depresivo.

Antes de entrar en el tema, debemos recordar que las conclusiones que obtengamos están unidas a las hipótesis de partida, que han sido:

el aceptar un modelo en el cual el consumo depende de las rentas de los períodos anteriores, mediante una serie de coeficientes c_1, c_2 ..., que en el modelo simplificado los resumimos en c; que la inversión inducida depende de las diferencias en la producción entre dos períodos consecutivos, a través de los coeficientes v_1, v_2 ...; v, en el simplificado; que hemos designado por A a la inversión autónoma, y no nos preguntamos de dónde, cómo y cuándo procede y actúa.

En el caso simplicísimo del multiplicador sin inversión inducida, cuya expresión es $\frac{1}{1-c} = \frac{1}{s}$, modelo estático a corto plazo, *cuanto mayor* sea s, menor será la potencia expansiva del sistema. A corto plazo, s actúa como freno. Naturalmente, esto se da en un modelo donde la única regla de comportamiento y equilibrio es que el ahorro planeado sea igual a la inversión planeada, y donde se estudia las variaciones de la renta ante un incremento de la inversión, $\Delta Y = \frac{1}{s} \Delta I$.

Pero nada tiene que ver con el problema económico, más realista, de una economía con necesidad de una gran formación de capital como base de un posterior desarrollo y donde un alto coeficiente de ahorro es base de la expansión. Pero este problema, parte fundamental de la teoría del desarrollo, no lo estudiaremos aquí; para el fin que nos proponemos, nos basta saber que el tratamiento matemático que estamos desarrollando es fundamental para su adecuada comprensión.

El caso simple (*multiplicador sin inversión inducida*) *lo podemos* incluir en el más general de inversión inducida, considerando que $v = 0$.

Veamos dos casos, dentro del supuesto: en un período inicial se produce un incremento en la inversión autónoma por valor de A, anulándose en el siguiente período.

1.° $\quad s = 0, \; v = 0$

modelo tipo KAHN, que nos da un equilibrio permanente al nivel de A. Se da un incremento en la renta por valor de A en el primer período, y no existe fuerza en el sistema que lo modifique.

2.° $\quad s = 0{,}10, \; v = 0$

Este coeficiente de ahorro obligará al sistema a recorrer un camino que le llevará al equilibrio primitivo (fig. 4.).

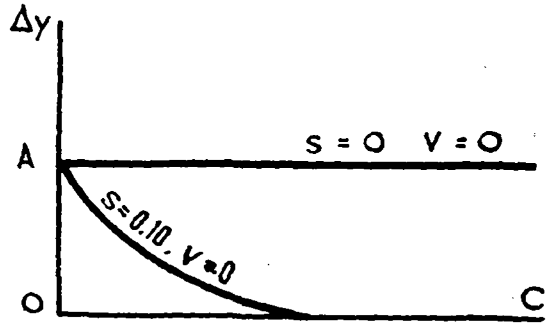

FIG. 4

El ahorro tiene, por tanto, una tendencia depresiva.

En el caso de que v tenga valores distintos de cero, se puede observar también la influencia del ahorro; supongamos, con Hicks (21), que $v = 0{,}75$ y que s alcanza alternativamente los valores 0 y 0,10.

1.° $\quad v = 0{,}75, \ s = 0$

Nuestra ecuación auxiliar

$$f(u) = u^2 - (1 - s + v)\, u + v = 0$$

tomará la forma

$$f(u) = u^2 - (1 + v)\, u + v = (u - 1)\,(u - v) = 0$$

donde las raíces son 1 y v.

La solución, por no existir componente estacionaria (la inversión autónoma vuelve a cero), será:

$$\Delta Y_n = A_1\, 1^n + A_2\, 0{,}75^n$$

si suponemos $A = 1.000$, por el razonamiento de la pág. 114; para $n = 0$:

$$0 = A_1\, 1^0 + A_2\, 0{,}75^0;$$

para $n = 1$:

$$1.000 = A_1\, 1^1 + A_2\, 0{,}75^1$$

de aquí,

$$A_1 = 4.000, \ A_2 = -4.000$$

(21) J. R. Hicks. Obra citada, pág. 99.

y la solución:

$$\Delta Y_n = 4.000 - 4.000 \cdot 0{,}75^n;$$

luego el sistema tenderá hacia el valor de A_1.

$$2.^\circ \qquad v = 0{,}75, \; s = 0{,}10$$

como

$$(1 - \sqrt{0{,}1})^2 < 0{,}75 < (1 + \sqrt{0{,}1})^2$$

La tendencia será cíclica, pero, como $v < 1$, amortiguada. El gráfico número 5 nos permite comparar ambos casos y observar cómo el ahorro tiene una tendencia depresiva.

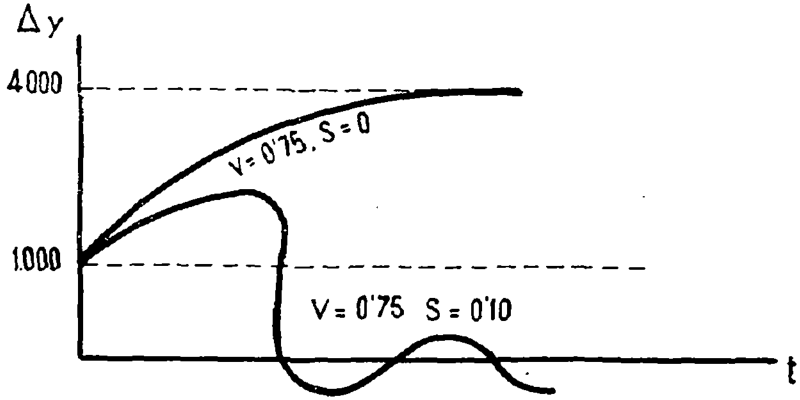

FIG. 5

Pero al lado de esta tendencia, característica de un modelo estático a corto plazo, vamos a ver cómo tiene una característica más favorable, que es la de ser un elemento atenuante del ciclo. Pero tampoco podemos afirmar esto con plena generalidad; existen posibles excepciones, y el verlas nos va a permitir establecer, de paso, las distintas características que presenta el modelo, según las leyes que rijan la inversión inducida.

Inversión concentrada, distribuida y aplazada.

El caso de la inversión concentrada es el simple que hemos estudiado; la inversión inducida es el 0,75 (en el ejemplo anterior) del incremento de la producción entre dos períodos.

La inversión distribuida se caracteriza porque la inversión inducida en un período n depende de los cambios en las rentas de p períodos anteriores.

La inversión aplazada se caracteriza porque los cambios más cercanos de la renta no afectan a la inversión inducida; se puede decir que hay un aplazamiento en el efecto impacto del cambio de renta.

El caso de la inversión concentrada ya lo hemos estudiado; *la distribuida* responde a la ecuación general, que puesta en forma homogénea es:

$$y_n = \sum_{r=1}^{p} c_r \, y_{n-r} + \sum_{r=1}^{p-1} v_r \, (y_{n-r} - y_{n-r-1})$$

y la ecuación característica correspondiente:

$$f(u) = u^p - \sum_{r=1}^{p} c_r \, u^{p-r} - (u-1) \sum_{r=1}^{p-1} v_r \, u^{p-r-1}$$

Veremos los mismos casos que en la concentrada.

1.° $s = 0$ y v puede tomar diferentes valores.

Dado que $c = 1 - s$ (22), la ecuación característica se convertirá:

$$f(u) = u^p - u^{p-1} - (u-1) \sum_{r=1}^{p-1} v_r \, u^{p-r-1} =$$

$$= u^{p-1}(u-1) - (u-1) \sum_{r=1}^{p-1} v_r \, u^{p-r-1} =$$

$$= (u-1)\,(u^{p-1} - v_1 \, u^{p-2} - v_2 \, u^{p-3} - \ldots - v_{p-1}) = 0$$

Una raíz es la unidad; las otras dependerán de la ecuación

$$\varphi(u) = u^{p-1} - v_1 \, u^{p-2} - v_2 \, u^{p-3} \ldots - v_{p-1} = 0$$

Hicks nos habla de una ecuación similar, al tratar, en el apéndice matemático, el caso general de la teoría del multiplicador. Su método es aplicable a este caso (23) y es similar al aplicado por nosotros al estudiar las raíces de la ecuación característica.

---

(22) Respecto a la propensión al consumo seguimos con el supuesto más simple.

(23) Ver Hicks. Obra citada, págs. 251 y siguientes.

La ecuación forzosamente *debe tener una raíz positiva real*, porque:

$\varphi(u) > 0$ para $u > 0$ y suficientemente grande

$\varphi(u) < 0$ " $u = 0$

luego corta al eje de abscisas entre estos dos valores.

No lo corta más que *una sola vez*

$$\varphi'(u) = (p-1)\, u^{p-2} - v_1\,(p-2)\, u^{p-3} - v_2\,(p-3)\, u^{p-4} \ldots = 0$$

$$u\,\varphi'(u) = (p-1)\, u^{p-1} - v_1\,(p-2)\, u^{p-2} - v_2\,(p-3)\, u^{p-3} \ldots = 0 \qquad [17]$$

Ahora bien,

$$(p-1)\,\varphi(u) = (p-1)\, u^{p-1} - v_1\,(p-1)\, u^{p-2} - v_2\,(p-1)\, u^{p-3} \ldots -$$
$$-(p-1)\, v_{p-1} = 0; \qquad [18]$$

restando [17] de [18]

$$u\,\varphi'(u) - (p-1)\,\varphi(u) = v_1\, u^{p-2} + 2\, v_2\, u^{p-3} + 3\, v_3\, u^{p-4} + \ldots +$$
$$+ (p-1)\, v_{p-1}$$

si $u > 0$, la expresión anterior es positiva;

si $u > 0$ y suponemos $\varphi(u) = 0$, $\varphi'(u)$ debe ser > 0.

Luego la curva, en el punto de intersección con el eje u (parte positiva), tiene pendiente positiva y esto no podía ocurrir si le cortara más de una vez.

Podemos decir todavía algo más acerca del *valor de esta raíz*. Designemos por $v = \sum_{r=1}^{p-1} v_r$.

$$\text{si } u = 1\ \varphi(u) = 1 - v \begin{cases} > 0 \text{ si } v < 1 \\ < 0 \text{ si } v > 1 \end{cases}$$

$$\text{si } u = v\ \varphi(v) = v^{p-1} - v_1\, v^{p-2} - v_2\, v^{p-3} \ldots - v_{p-1} =$$
$$= (v_1 + v_2 \ldots + v_{p-1})\, v^{p-2} - v_1\, v^{p-2} - v_2\, v^{p-3} \ \ldots - v_{p-1} =$$
$$= v_2\,(v^{p-2} - v^{p-3}) + v_3\,(v^{p-2} - v^{p-4}) + \ldots + v_{p-1}\,(v^{p-2} - 1)$$

Si $v < 1$, la última expresión es forzosamente negativa, luego el valor de la raíz está entre 1 y $v < 1$.

Si $v > 1$, la expresión anterior es positiva y la raíz estará entre 1 y $v > 1$.

Dado que la solución general es del tipo

$$y_n = A_1 u_1^n + A_2 u_2^n \ldots$$

donde $u_1, u_2 \ldots$ son las raíces de la ecuación característica, si el módulo de la mayor raíz es $\gtreqless 1$, la solución será amortiguada, tenderá hacia un valor fijo (el dado por el valor de A correspondiente a $u = 1$) o explosiva.

Por tanto, si $V < 1$, la raíz buscada será menor que la unidad y no podrán existir raíces positivas, negativas o imaginarias de módulo mayor, porque entonces la solución no sería amortiguada; si $v > 1$, no podemos afirmar lo mismo, pero en cualquier caso conocemos que la raíz mayor es > 1, y esto nos basta por ahora.

Volviendo a nuestro punto de partida, en que veíamos que las soluciones de [17] eran $u_1 = 1$, y las otras dependientes de la expresión $u^{p-1} - v_1 u^{p-2} \ldots - v_{p-1} = 0$ ya estudiada. Luego:

Si $v < 1$, la raíz de mayor módulo es la unidad y el sistema convergerá hacia un valor que depende de los valores iniciales. Caso similar al que estudiábamos en el gráfico núm. 4 para $s = 0$ y $v = 0{,}75$, luego en este caso no hay diferencia en cuanto a los resultados finales entre la inversión concentrada y la distribuida.

Si $v > 1$, la raíz de mayor módulo es superior a la unidad y el proceso será explosivo; tampoco existen diferencias en cuanto a los resultados finales.

2.° $S > 0$.

Partiendo de la ecuación característica

$$f(u) = u^p - \sum_{r=1}^{p} c\, u^{p-r} - (u-1) \sum_{r=1}^{p-1} v_r\, u^{p-r-1}$$

y, dado que $c = 1 - s$, dependiendo el consumo de la renta del período anterior, es decir, sin considerar por ahora retardos en el consumo, tendremos, como antes, que la ecuación característica se nos convertirá en una expresión tal como la siguiente:

$$(u-1)\,(u^{p-1} - \Sigma\, v_r\, u^{p-r-1}) + s\, u^{p-1} = 0$$

Con HICKS, designemos a esta expresión por $F(u)$, conservando $\varphi(u)$ para la primera parte de la ecuación, luego

$$F(u) = \varphi(u) + s\,u^{p-1}$$

La diferencia con el caso anterior reside en el término $s\,u^{p-1}$; ¿qué significa esto? A primera vista vemos que las diferencias las va a producir un término en el que interviene el ahorro, lo que nos va a permitir completar lo dicho anteriormente sobre la influencia suavizadora del ahorro.

Seguiremos en el resto del razonamiento a ALLEN (24), por ser más sistemático que HICKS.

En el caso que la distribución de la inversión inducida se realizara en dos períodos, $v = v_1 + v_2$, siendo $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ (si $v_1 = 0$ la inversión sería aplazada, tercer caso; y si $v_2 = 0$, concentrada, primer caso), la ecuación en diferencias sería:

$$y_n = c\,y_{n-1} + v_1(y_{n-1} - y_{n-2}) + v_2(y_{n-2} - y_{n-3})$$

Estudiaremos el caso de que $v < 1$ (25).

La ecuación característica, como anteriormente hemos visto, haciendo

$$v_1 = v - v_2 \text{ y } c = 1 - s,$$

es

$$u^3 - (v - v_2 + 1 - s)\,u^2 + (v - 2\,v_2)\,u + v_2 = 0 \qquad [19]$$

y la solución será del tipo

$$y_n = A_1\,u_1^n + A_2\,u_2^n + A_3\,u_3^n,$$

caso cúbico.

En el modelo simple la solución era

$$y_n = A_1\,u_1^n + A_2\,u_2^n$$

y su ecuación característica

$$u^2 - (1 - s + v)\,u + v = 0$$

---

(24) ALLEN. Ver obra citada, págs. 234 y siguientes.

(25) También consideraremos a v_1 y v_2 positivas. Caso normal.

La ecuación [19] podemos transformarla fácilmente como sigue:

$$u^2 - (1 - s + v)\, u + v = - v_2 \frac{(u - 1)^2}{u}$$

$$f(u) = \varphi(u)$$

La intersección de las dos funciones anteriores nos dará la solución de nuestro caso cúbico.

La función $f(u)$ ya la hemos representado en el gráfico 1.°; reproduzcámoslo para estudiar qué sucede cuando varía s, con v dado.

La representación de $u^2 - (1 - s + v)\, u + v = 0$, será:

1.° *Raíces reales y menores de* s

para $v < (1 - \sqrt{s})^2$

2.° *Raíces complejas*

$$(1 - \sqrt{s})^2 < v < 1$$

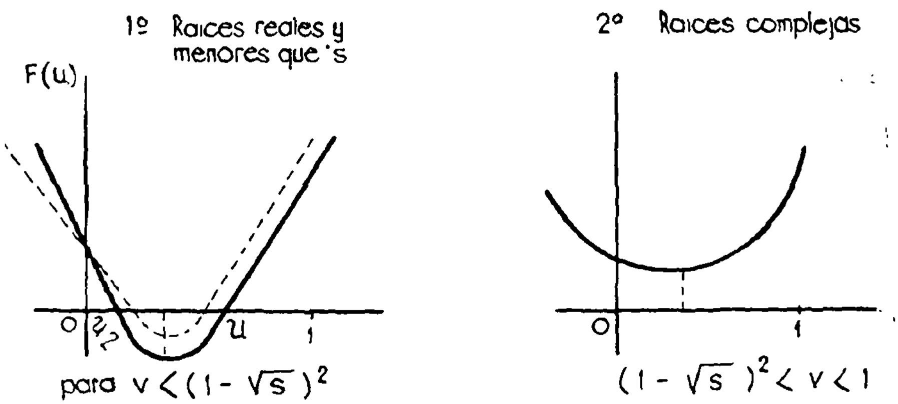

FIG 6

Cuando s aumenta, la curva se desplaza hacia arriba y a la izquierda, lo que es fácil comprobar. Tienen un punto de corte para $u = 0\, f(u) = v$.

La función $\varphi(u)$ tiene como representación una hipérbola:

u	-2	-1	0	1	2
φ $v_2 = 1$	4,5	4	∞	0	$-0{,}5$
φ $v_2 = \frac{1}{2}$	2,25	2	∞	0	$-0{,}25$

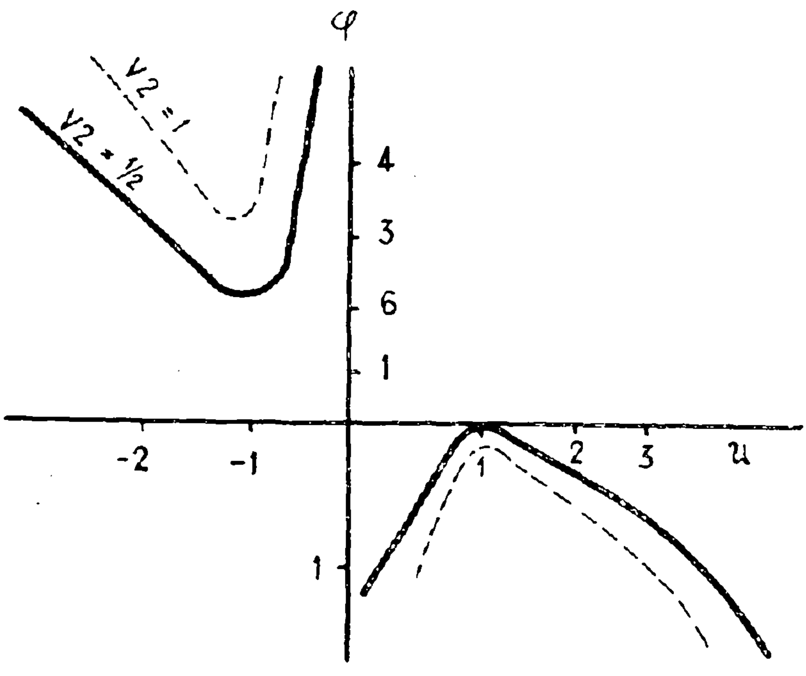

FIG. 7

Representémoslas juntas, y para un valor de s que origine para el caso simple raíces imaginarias, y $v_2 = \frac{1}{2}$. Sabemos que para un valor de s pequeño, $f(u)$ cortará al eje ou entre 0 y 1 y, por tanto, cortará a $\varphi(u)$ en dicho intervalo.

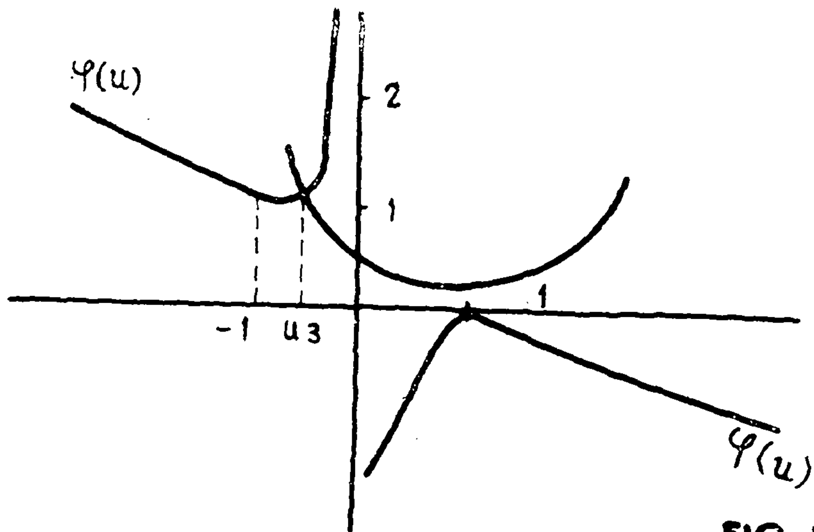

FIG. 8

Por tanto, de las tres raíces que son la solución de la ecuación cúbica, dos serán positivas o imaginarias, y la tercera forzosamente negativa.

Si la solución es del tipo:

$$y_n = A_1 u_1^n + A_2 u_2^n + A_3 u_3^n, \qquad u_3 < 0$$

podemos asegurar a simple vista dos cosas:

— que la raíz negativa $-u_3$ introduce una oscilación o ciclo corto de período 2.

— que cuando $(u_3) > 1$, la oscilación será explosiva.

Veíamos en el gráfico que $f(u)$ tiende hacia arriba y a la izquierda cuando s aumenta. Por otra parte, el mínimo de la función $\varphi(u)$ se encuentra en la parte negativa para el valor -1, siendo el valor de $\varphi(u) = 4\, v_2$ (26).

Dado que la raíz negativa nos vendrá dada por la intersección de ambas curvas en el segundo cuadrante, podemos afirmar:

— que cuando s aumenta, el punto de corte está cada vez más a la

(26) Véase tabla de valores; compruébese analíticamente.

izquierda, lo cual aumenta la amplitud de las oscilaciones de período 2.

— que $u_3 > -1$, supone que si

$$f(-1) = 2 - s + 2v$$

$$\varphi(-1) = 4v_2$$

La intersección debe ser a la izquierda de -1, luego

$$2 - s + 2v < 4v_2$$

de aquí:

$$s > 2(1 + v - 2v_2)$$

$$v_2 > \frac{1}{2}(1 + v - \frac{1}{2}s)$$

Luego tenemos dos alternativas para que el ciclo corto se convierta en predominante y explosivo: que s sea grande, o que, para cualquier s, la inversión aplazada alcance un valor tal que cumpla la segunda desigualdad (27).

Como cualquiera de estas dos condiciones es difícil de cumplir, podemos opinar que el ciclo corto irá atenuándose y que el caso de la inversión distribuida se asemejará al caso simple, aunque las cimas serán de menor amplitud.

Nos queda por ver el caso de la *inversión aplazada*. Lo examinaremos para el caso donde

$$v = v_1 + v_2, \text{ siendo } v_1 = 0 \text{ y } v_2 = v \quad (28)$$

La ecuación característica [19] se convertirá en:

$$u^3 - (1 - s)\,u^2 - v\,u + v = 0$$

que se transforma fácilmente.

$$(u - 1)(u^2 - v) + s\,u^2 = 0 \qquad [20]$$

(27) HICKS examina también el caso de cuarto grado, obteniendo similares resultados. Por ahora no es necesario complicar más la exposición. Ver obra citada, página 267.

(28) Ver ALLEN. Obra citada, págs. 230 y siguientes.

Como antes, en el caso de $s = 0$, desaparece el segundo término $s\,u$, y las soluciones deducibles a simple vista son:

$$u_1 = 1;\; u_2 = \sqrt{v};\; u_3 = -\sqrt{v}$$

La solución será:

$$y_n = A_1 (1)^n + A_2 (\sqrt{n})^n + A_3 (-\sqrt{v})^n$$

Si $v < 1$, la raíz de mayor módulo es la unidad y el sistema, como en los casos de inversión concentrada y distribuida, convergerá hacia un valor que depende de los valores iniciales. Pero la presencia de una raíz negativa, $u_3 = \sqrt{v}$, nos introduce un ciclo corto de período 2, que en este caso se atenúa, pudiendo llegar a producir una especie de dientes de sierra en el camino de convergencia.

Si $v > 1$. El sistema será explosivo y el camino parece que presentará los mismos dientes de sierra.

En el caso de $s > 0$, no desaparece el término $s\,u^2$, y la ecuación característica la podemos expresar:

$$(u - 1)\,(u^2 - v) = -s\,u^2$$

$$f_1(u) = \varphi_1(u)$$

Las soluciones las encontraremos en la intersección de ambas funciones.

La representación gráfica de $f_1(u)$ es sencilla, ya conocemos sus tres raíces: 1, $\sqrt{v}$ y $-\sqrt{v}$, y fácilmente deducibles su máximo y mínimo.

La representación de $\varphi_1(u)$ es una parábola con vértice en 0 y que se hace más convexa a medida que s aumenta.

La figura nos muestra las raíces cuando $v < 1$.

Está claro que cuando s aumenta, u_1 y u_2 se acercan cada vez más, con valores entre $\sqrt{v}$ y 1, y u_3 se hace cada vez mayor.

Lo que a continuación vamos a exponer, siguiendo los pasos de ALLEN, nos permitirá ver el cambio de perspectiva que introduce la inversión aplazada, pudiéndose convertir una tendencia amortiguada ($v < 1$) en una tendencia explosiva a través del ciclo corto.

Cuando s alcanza ciertos valores, dos cosas pueden suceder:

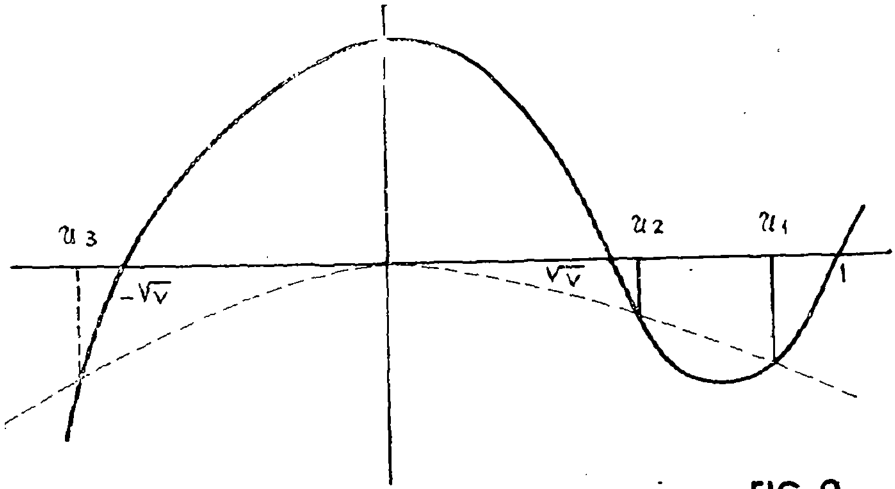

FIG. 9

1.ª Que la función $\varphi_1(u)$ no corte a $f_1(u)$; entonces u_1 y u_2 son maginarias y su influencia cíclica, siendo de la forma $r(\cos\Theta \pm i \operatorname{sen}\Theta)$. Para que esto suceda, el valor de s no tiene por qué ser muy grande; para fijar sus límites tendríamos que desglosar la ecuación cúbica, como o hemos hecho anteriormente con la cuadrática; es decir, estudiar los ímites dentro de los que las soluciones serán reales o imaginarias; no o haremos, pero el lector que desee hacerlo puede basarse en la soución de la ecuación cúbica de REY PASTOR (29).

Pero podemos decir algo más acerca de la influencia de s.

El producto de las raíces complejas $u_1 u_2 = r^2$, y como a la vista de a ecuación, sabemos que $u_1 . u_2 . u_3 = -v$, tenemos que

$$u_1 . u_2 . = -\frac{v}{u_3}$$

Como u_3 aumenta a medida que crece s, el punto de corte se desplaza hacia la izquierda, $u_1 . u_2$ disminuirá y la tendencia se amortiguará más. Luego, bajo esta faceta, la influencia del ahorro es antioscilante. Pero hemos dicho que u_3, la raíz negativa, se hace más grande, ésta es la segunda de las cosas que pueden suceder al variar s.

2.ª Si $(-u_3) > 1$, se supone que

$$f_1(-1) = -2(1-v)$$
$$\varphi_1(-1) = -s$$

La intersección debe ser a la izquierda de -1.

$$-s > -2(1-v)$$

$$s > 2(1-v) \qquad [21]$$

lo cual no es imposible si v tiene un valor mayor que 0,5, y la raíz negativa mayor que -1 introduce un ciclo corto de carácter explosivo que será el dominante.

Resumiendo, para pequeños valores de s, la solución será

$$y_n = A_1 u_1{}^n + A_2 u_2{}^n + A_3 u_3{}^n$$

donde la presencia de u_3 negativa introducirá en la marcha del sistema pequeños dientes de sierra; para valores de s suficientemente grandes, u_1 y u_2 serán imaginarias y u_3 negativa; la solución será

$$y_n = A r^n (\cos n\,\Theta - \varepsilon) + B(-u_3)^n$$

donde A, B y ε son constantes que dependen de los valores iniciales. El sistema, aunque cíclico, puede ser amortiguado, pero si s alcanza valores tales que se cumpla [21], el ciclo corto se convertirá en dominante y explosivo.

Las opiniones sobre la influencia del ciclo corto son diversas; recojamos las de los tratadistas que continuamente estamos manejando, ALLEN y HICKS.

ALLEN (30) dice:

"La nueva posibilidad no debe ser menospreciada. La inversión aplazada puede ser la regla más que la excepción. El período unidad es elegido de forma que coincida con el retardo (el más corto) del lado del consumo. El período para tomar la decisión de las inversiones debe ser más largo y los retardos en las inversiones y producción de equipo capital más largos aún. Por tanto, debe ser esperado que la inversión inducida no será realizada hasta el segundo período después del cambio en la producción. Una moderada propensión marginal al ahorro puede, por consiguiente, producir una oscilación explosiva, o período corto, en la producción."

---

(29) REY PASTOR. Obra citada, págs. 251 y siguientes.

(30) ALLEN. Obra citada, pág. 233.

HICKS (31) dice:

"Me cuesta trabajo creer que estos ciclos cortos puedan tener mucha significación. Sólo pueden surgir como resultado de la agrupación extrema de la inversión tras un retardo. Parece mucho más probable que los ciclos a que nos referimos sean los ciclos relativamente largos asociados a las raíces mayores (32), que los ciclos cortos asociados a las raíces menores (33)."

Francisco CELAYA

---

(31) HICKS. Obra citada, pág. 267.
(32) Las positivas o imaginarias.
(33) Las negativas.