La elasticidad de sustitución entre factores de producción(*)

ANDRES VAZQUEZ PEREZ

I. CONCEPTO DE ELASTICIDAD DE SUSTITUCION

1.1. *Introducción.*

No es tarea fácil ofrecer una síntesis de la abundante literatura que ha dado origen al nacimiento de la elasticidad de sustitución. La idea de la sustitución, tan familiar a von Thünen y cuya formulación explícita se debe a Menger, puede decirse que ya fue observada por los primeros tratadistas de la ciencia económica [1]. Ello no es de extrañar, ya que el principio básico de la utilización óptima de los escasos recursos disponibles descansa en la posibilidad de reemplazar o sustituir en alguna medida unos recursos por otros. Sin embargo, hubo que esperar a la escuela marginalista para que el mecanismo de la sustitución mereciera un análisis más riguroso, que cristalizó finalmente en la aparición del concepto de elasticidad de sustitución como una medida del grado de sustituibilidad o posibilidad técnica de sustitución de unos bienes de consumo o factores de producción por otros.

El abandono de las construcciones basadas en la utilidad marginal decreciente y su fundamentación sobre el concepto de la relación marginal de sustitución, afirma Hicks [2], plantea la pregunta de la rapidez con que varía ésta, cuestión que habría de conducir a la formulación de la elasticidad técnica de sustitución.

(*) Este trabajo constituye la tesis doctoral presentada en la Facultad de Ciencias Políticas, Económicas y Comerciales de la Universidad de Madrid. El autor expresa su agradecimiento al profesor don José Castañeda, director de la tesis, por su orientaciones y críticas, y a la Fundación Juan March, por la concesión de una Beca de Estudios en el Extranjero.

[1] Sobre este aspecto, puede consultarse la magnífica obra de Joseph A. SCHUMPETER: *History of Economic Analysis*, quinta edición en George Allen and Unwin, Ltd., Londres, 1963, y asimismo el artículo de René LAMY: *Esquisse d'une analyse du phénomène de substitution*, en "Bulletin de l'Institut de Recherches Economique et Sociales de l'Université de Louvain", septiembre, 1948, especialmente págs. 108-129.

[2] John R. HICKS y R. G. D. ALLEN: *A Reconsideration of the Theory of Value*, parte primera, en "Economica", febrero, 1934, pág. 58.

El nuevo instrumento de análisis aparece originariamente en la obra de este autor "The Theory of Wages", en relación con la distribución de la renta nacional entre el trabajo y el capital [3]. Joan Robinson lo utiliza casi paralelamente para explicar los efectos originados en la industria por la modificación del precio de uno de dichos factores sobre la demanda de los mismos y la oferta del producto [4]. Sin embargo, la forma en que estos dos autores definieron la elasticidad de sustitución no es idéntica y está caracterizada en ambos casos por una falta de precisión, cuyas consecuencias se acusan incluso en la literatura económica de nuestros días.

Aparte de otras consideraciones que serán analizadas más adelante, la definición de Hicks se refiere únicamente al caso particular de las funciones de producción homogéneas de primer grado, a la vez que su explicación en términos literarios es poco precisa y no está clara su correspondencia con la formulación matemática [5]. Esta última, según frase de Kahn [6], parece haber surgido más bien por los requerimientos del álgebra que por necesidades económicas. Joan Robinson, por su parte, propone dos definiciones de la elasticidad de sustitución [7], que son igualmente poco precisas, y cuya equivalencia con la definición de Hicks ha sido objeto de no pocos comentarios. La falta de rigor característica de estas primeras formulaciones no tardó en acusarse en las revistas económicas de los años treinta, principalmente anglosajonas, que contienen importantes puntualizaciones al respecto, aunque no todas ellas acertadas. Entre éstas destaca el intento poco afortunado de Fritz Machlup de ofrecer una síntesis elemental del concepto [8].

---

[3] John R. HICKS: *The Theory of Wages,* MacMillan and Co., Londres, 1932, págs. 117-135 y 244-247.

[4] Joan ROBINSON: *The Economics of Imperfect Competition,* MacMillan and Company, Londres, 1933, págs. 256-262. Hay versión castellana, a la que se refieren siempre las citas sucesivas, con el título *La Economía de la Competencia Imperfecta,* Aguilar, S. A., Madrid, 1946, págs. 299-308. Sobre el origen de la elasticidad de sustitución, Joan Robinson afirma en el prólogo de su obra citada: "El concepto de "elasticidad de sustitución" ofrece otro ejemplo de estas coincidencias entre varios autores, pues Mr. J. R. Hicks lo formuló en su *Theory of Wages* algún tiempo después de que yo lo hubiese utilizado por primera vez". Esta afirmación no parece haber sido desmentida en los escritos posteriores de John R. Hicks.

[5] *Ibid.,* págs. 117 y 244-245, respectivamente.

[6] Richard F. KAHN: *Notes on Elasticity of Substitution.* III. *The Elasticity of Substitution and the Relative Share of a Factor,* en "Review of Economic Studies", octubre, 1933, pág. 72.

[7] *Ibid.,* págs. 299 y 387 nota, respectivamente.

[8] Fritz MACHLUP: *The Commonsense of the Elasticity of Substitution,* en "Review of Economic Studies", junio, 1935, págs. 202-213.

En el terreno de las estimaciones empíricas es notorio el considerable esfuerzo encaminado preferentemente a determinar la elasticidad de sustitución entre las demandas interrelacionadas del consumo y en el comercio internacional. Pero también en este sentido hay que señalar que tales estimaciones son de muy dudoso valor. La mayoría de ellas están caracterizas por la extensión y aplicación de este instrumento de análisis sin el adecuado reconocimiento de los supuestos que se establecen en la formulación teórica, cuya consideración, por otra parte, hace extremadamente difícil la estimación empírica directa, ni de los problemas adicionales relativos al método de estimación utilizado.

Por ello no es extraño que al entusiasmo inicial siguiera un período de pesimismo respecto a la utilidad del concepto como instrumento de análisis; pesimismo que, iniciado por Pigou [9], llevaría incluso a Morrissett [10] a interpretar el silencio que se observa en la obra posterior de Hicks, "Valor y Capital", como una tácita refutación de la predicción de este autor sobre el importante papel que el principio del decrecimiento de la relación marginal de sustitución, tal como este concepto se define más adelante, y que constituye el factor básico de la elasticidad de sustitución, jugaría en el desarrollo de la teoría [11].

Ahora bien, aunque en un sentido distinto del que quizá pudo imaginar Hicks, su predicción puede considerarse acertada, por cuanto la elasticidad de sustitución figura entre los temas esenciales del análisis económico. En efecto, la validez de importantes proposiciones del comercio internacional, distribución de la renta y crecimiento económico, por ejemplo, depende de la hipótesis adoptada respecto al valor numérico de la elasticidad de sustitución. La falta de información sobre este fenómeno se manifiesta claramente en el hecho de que las funciones de producción frecuentemente utilizadas hasta hace pocos años han sido las de Cobb-Douglas y Harrod-Domar, en las que la elasticidad de sustitución es constante e igual a uno y cero, respectivamente.

Pero el análisis basado en tan simples hipótesis conduce necesariamente a resultados fuertemente restrictivos y poco realistas, pues, como ya sugiere la simple observación, las alternativas tecnológicas pueden ser flexibles y numerosas en unos casos, y limitadas en otros. Las estimacio-

---

[9] Arthur C. Pigou: *The Elasticity of Substitution*, en "Economic Journal", junio, 1934, especialmente págs. 240-241.

[10] Irving Morrisett: *Some Recent Uses of Elasticity of Substitution: A Survey*, en "Econometrica", enero, 1953, págs. 41, nota 3, y 59.

[11] John R. Hicks y R. G. D. Allen, art. cit., parte primera, pág. 58.

nes empíricas ponen igualmente de relieve que tales funciones han de ser rechazadas, en general, como representativas de las alternativas tecnológicas de producción. Pero a comienzos de la presente década, el análisis económico se ha visto notablemente enriquecido con la aparición de una nueva clase de funciones de producción: la denominada "homohipalágica", "CES" o "ACMS", cuyas propiedades y generalización se describen el capítulo tercero[12]. A pesar de su reciente aparición, esta función de producción ha abierto nuevos cauces a las contrastaciones empíricas, y contiene como casos particulares a las dos funciones anteriores, por cuanto, si bien la elasticidad de sustitución es también constante, admite la posibilidad de que ésta pueda tomar cualquier valor.

Los problemas relacionados con el concepto de la elasticidad de sustitución son ciertamente numerosos. El examen detallado de todos ellos sobrepasa, sin embargo, el contenido del presente trabajo, cuya finalidad es mucho más modesta y concreta. En primer lugar, el análisis se limita únicamente al aspecto teórico y no se consideran, por tanto, los problemas relativos a las estimaciones empíricas. Pero, además, aunque la elasticidad de sustitución es un concepto que se aplica igualmente a otras ramas de la teoría económica, el desarrollo que sigue se refiere solamente a los factores de producción.

1.2. *La función de producción y la relación marginal de sustitución.*

La teoría de la producción arranca de la hipótesis básica de la existencia de una relación funcional entre las cantidades aplicadas de los medios o factores de producción y las obtenidas de producto o productos. En el caso simple de dos factores y un solo producto, dicha relación, denominada función de producción, se expresa simbólicamente de la forma explícita

$$x = f(v_1, v_2), \tag{1}$$

donde v_1 y v_2 representan las cantidades empleadas de los factores V_1 y V_2, y x es la cantidad máxima del producto X. En este sentido,

---

12 La palabra homohipalágica está compuesta de las dos voces griegas, *homo* (ὅμοιος), que significa semejante, igual, e *hipalágicos* (ὑπαλλαγικός), que significa sustitución. (Véase Bagicha S. MINHAS: *The Homohypallagic Production Function, Factor-Intensity Reversals and the Heckscher-Ohlin Theorem*, en "Journal of Political Economy", abril, 1962, pág. 141). La denominación CES corresponde a las siglas de las palabras inglesas "Constant Elasticity of Substitution", en tanto que la ACMS responde a las iniciales de los autores Kenneth Arrow, Hollis B. Chenery, Bagicha S. Minhas y Robert M. Solow, quienes desarrollaron este tipo de funciones de producción en su artículo *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, en "Review of Economics and Statistics", agosto, 1961, págs. 225-250.

la función de producción supone que se ha resuelto un problema de maximización técnica, y constituye un dato para la resolución de los aspectos económicos de la producción. Por otra parte, la función (1) responde a la noción de tecnología constante, puesto que considera que en cada momento son fijas las condiciones técnicas del proceso productivo, cuando la continua evolución de éstas implica una modificación de la característica funcional de la función de producción.

Para cada función de producción se admite, en general, la posibilidad de obtener la misma cantidad de producto mediante la aplicación de los factores en proporciones variables. La mayor o menor facilidad técnica de sustitución de los factores, indispensable para la existencia de un problema económico, se mide por el valor de la relación marginal de sustitución, concepto éste de carácter asimismo técnico. Esta se define como el límite de la relación entre el decremento o el incremento de un medio y el aumento o la disminución que ha de experimentar el otro para que el producto se mantenga invariable, cuando dichas variaciones de los medios son menores que cualquier cantidad dada [13].

La relación marginal de sustitución entre V_1 y V_2, que se designa por R^1_2, se expresa analíticamente como

$$R^1_2 = -\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{\partial x}{\partial v_2} / \frac{\partial x}{\partial v_1} = \frac{f_2}{f_1}, \qquad (2)$$

donde las derivadas parciales $f_1 = \frac{\partial x}{\partial v_1}$ y $f_2 = \frac{\partial x}{\partial v_2}$ representan las productividades marginales físicas de los respectivos factores, y las diferenciales se toman a lo largo de una misma isocuanta. En consecuencia, diferenciando (1), para x constante, se obtiene:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v_1} dv_1 + \frac{\partial x}{\partial v_2} dv_2 = 0,$$

de donde se sigue la anterior igualdad entre la relación marginal de sustitución y el cociente de las productividades marginales de los factores.

Pero el valor de la relación marginal de sustitución varía, en general, con la proporción en que se combinan los factores. La existencia de esta relación fundamental, que gráficamente se comprueba de modo inmediato, puede demostrarse también analíticamente. En efecto, suponiendo que la función (1) es homogénea de grado λ en general, puede escribirse:

---

[13] Véase José CASTAÑEDA: *Lecciones de Teoría Económica,* Aguilar, S. A., Madrid, 1968, pág. 252.

$$x = v_2^{\lambda} f\left(\frac{v_1}{v_2}, 1\right) = v_2^{\lambda} F\left(\frac{v_1}{v_2}\right),$$

de donde se obtienen las productividades marginales

$$\frac{dx}{dv_1} = v_2^{\lambda - 1} F'\left(\frac{v_1}{v_2}\right)$$

$$\frac{dx}{dv_2} = v_2^{\lambda - 1} \left[\lambda F\left(\frac{v_1}{v_2}\right) - \left(\frac{v_1}{v_2}\right) F'\left(\frac{v_1}{v_2}\right)\right],$$

que son homogéneas de grado $\lambda - 1$. Por tanto, la relación marginal de sustitución viene dada por

$$R_2^1 = \lambda \frac{F\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{F'\left(\frac{v_1}{v_2}\right)} - \frac{v_1}{v_2} = G\left(\frac{v_1}{v_2}\right), \qquad (3)$$

y es homogénea de grado cero. Esto significa que a lo largo de cualquier radio vector la proporción en que se combinan los factores y la relación marginal de sustitución permanecen constantes, con independencia del grado de homogeneidad de la función de producción.

Si ahora se designa por H la función inversa de G, la (3) se convierte en la siguiente:

$$\frac{v_1}{v_2} = H\left(R_2^1\right), \qquad (4)$$

que es la relación buscada entre la proporción en que se combinan los factores y su relación marginal de sustitución, y cuya representación gráfica, objeto de estudio en el apartado 2.3, se conoce con la denominación de curva de sustitución o de sustituibilidad marginal[14]. Pero tanto la función (3), como la (4), son de tipo creciente, de acuerdo con el

[14] Para las funciones de producción CES y Cobb-Douglas, representadas en el apartado 3.3 por la expresiones (39) y (42), respectivamente, dicha relación funcional adopta, en el primer caso, la forma particular:

$$R_2^1 = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

y, en el segundo, la siguiente:

$$R_2^1 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right).$$

principio del decrecimiento de R_2^1, a medida que el factor V_2 sustituye al V_1.

En efecto, este principio se corresponde enteramente con la convexidad de las isocuantas hacia el origen de coordenadas y exige, como es sabido, que

$$\frac{d\,R_2^1}{d\,v_2} = -\frac{d^2\,v_1}{d\,v_2^2} < 0, \tag{5}$$

además de ser $R_2^1 > 0$. Esta última condición se verifica siempre que las productividades marginales son positivas, lo que implica que tanto F como F' han de ser positivas, y $\lambda\,F > \frac{v_1}{v_2}F'$. En cuanto a la condición (5), derivando (3) con respecto a v_2, se obtiene:

$$\frac{d\,R_2^1}{d\,v_2} = \frac{d\,G}{d\,v_2} = -G'\left[\frac{1}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2} - \frac{d\,v_1}{d\,v_2}\right)\right],$$

y como los términos dentro del corchete son positivos, se sigue, de acuerdo con (5), que la derivada G' y, por consiguiente, la H' tienen signo positivo, lo que demuestra que las funciones (3) y (4) son crecientes.

1.3. *Definición de la elasticidad de sustitución.*

La demostración anterior ha puesto de relieve que la proporción de los factores y su relación marginal de sustitución varían en el mismo sentido. Por tanto, a medida que se aplica menor cantidad de V_1 por unidad de V_2 disminuye el valor de R_2^1, lo que significa que cada vez se requiere mayor cantidad del factor V_2 para compensar las sucesivas unidades de V_1, o sea que la sustituibilidad se hace más difícil a medida que avanza el proceso de sustitución. En estas circunstancias se plantea la pregunta de determinar la mayor o menor intensidad con que varía la relación marginal de sustitución ante un cambio en la proporción de los factores o, en otras palabras, determinar la facilidad de sustitución de un factor por otro sin que varíe el producto.

En primer lugar, para un cambio cualquiera en las cantidades empleadas de los mismos, a lo largo de una determinada isocuanta, la variación de la proporción de los factores, que se representa por $d\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$, es tanto más acusada cuanto mayor es la facilidad técnica de sustitución de los medios, siendo nula en el caso extremo de complementaridad perfecta, en el que éstos han de utilizarse en proporción fija. En cambio, la variación de la relación marginal de sustitución, que se expresa por d R^1_2 y se mide también a lo largo de una determinada isocuanta, es tanto menor cuanto más fácilmente sustituibles son los factores entre sí. En el caso límite de sustituibilidad perfecta, la relación marginal de sustitución permanece invariable ante cualquier cambio en la proporción de los factores, ya que éstos son técnicamente idénticos.

La elasticidad de sustitución se define como el cociente entre estas dos diferenciales, expresadas en términos relativos para que resulten independientes de las unidades en que se midan los factores, cuando la cantidad de producto permanece constante [15]. La elasticidad de sustitución mide, pues, la mayor o menor facilidad técnica con que puede mantenerse el producto invariable sustituyendo un factor por otro. En este sentido, puede concebirse como una medida de la identidad o semejanza de los medios desde el punto de vista técnico. Cuanto más fácilmente sustituibles son los factores entre sí, mayor será el valor de la elasticidad de sustitución, por el doble motivo de ser el numerador de la fracción grande y el denominador pequeño. En términos aproximados, el concepto puede expresarse como el tanto por ciento de variación que ocasionaría en la proporción de los factores la variación del uno por ciento en su relación marginal de sustitución, cuando el producto se mantiene constante.

La elasticidad de sustitución, que se designa por σ, es igual a la derivada elástica de la función (4), cuya fórmula es

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{\frac{v_1}{v_2}} \Big/ \frac{d R^1_2}{R^1_2} = \frac{d \log\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d \log R^1_2}, \qquad (6)$$

o bien, sustituyendo R^1_2 por su valor, según (2),

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{\frac{v_1}{v_2}} \Big/ \frac{d\left(-\frac{dv_1}{dv_2}\right)}{-\frac{dv_1}{dv_2}} = \frac{d \log\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d \log\left(\frac{dv_1}{dv_2}\right)} = \frac{d \log v_1 - d \log v_2}{d \log (dv_1) - d \log (dv_2)}, \qquad (7)$$

[15] El primero que definió el concepto de esta forma fue Abba P. LERNER: *Notes on Elasticity of Substitution. II. The Diagrammatical Representation*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1933, pág. 68. Está definición ha sido erróneamente atribuida a Joan Robinson por Pierre-Henri DERYCKE: *Elasticité et Analyse Economique*, Editions Cujas, París, 1964, pág. 78.

con la condición de que las diferenciales correspondan a variaciones a lo largo de una determinada isocuanta.

Por otra parte, como la relación marginal de sustitución es igual al cociente de las productividades marginales de los factores, según expresa (2), la fórmula (6) se convierte en

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{\frac{v_1}{v_2}} \Big/ \frac{d\left(\frac{f_2}{f_1}\right)}{\frac{f_2}{f_1}} = \frac{d \log\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)} = \frac{d \log v_1 - d \log v_2}{d \log f_2 - d \log f_1}, \qquad (8)$$

que corresponde a una de las dos definiciones del concepto propuesto por Joan Robinson, si bien con la condición no reconocida expresamente por esta autora de que la cantidad de producto se supone invariable [16]. De acuerdo con esta expresión, la elasticidad de sustitución puede definirse igualmente como el cociente entre la variación relativa de la proporción en que se combinan los factores y la variación proporcional del cociente invertido de sus productividades marginales, cuando dichas variaciones son infinitesimales y la cantidad de producto permanece constante [17].

Desarrollando la fórmula (7), para v_2 como variable independiente, resulta:

$$\sigma = \frac{\frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{v_2 dv_1 - v_1 dv_2}{v_2^2}}{d\left(\frac{dv_1}{dv_2}\right) \frac{dv_2}{dv_1}} = \frac{\frac{dv_1}{v_1} - \frac{dv_2}{v_2}}{\frac{d\left(\frac{dv_1}{dv_2}\right)}{dv_2} \cdot \frac{(dv_2)^2}{dv_1}} = \frac{\left(\frac{dv_1}{v_1} - \frac{dv_2}{dv_2}\right) \frac{dv_1}{(dv_2)^2}}{\frac{d^2 v_1}{dv_2^2}},$$

de donde se obtiene finalmente otra de las expresiones que se han manejado en la literatura económica [18]:

---

16 *Ibid.*, pág. 387, nota 1.

17 Hay autores que definen la elasticidad de sustitución como

$$\frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (dv_2/dv_1)} = \frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (f_1/f_2)}.$$

El origen de esta formulación reside en el hecho de que para estos autores la relación marginal de sustitución es la inversa de la que se considera en el presente trabajo. Pero teniendo en cuenta que $d \log (dv_2/dv_1) = - d \log (dv_1/dv_2)$, o bien que $d \log (f_1/f_2) = - d \log (f_2/f_1)$, se sigue que las expresiones anteriores tienen el mismo valor absoluto que las (7) y (8), respectivamente, pero distinto signo.

18 Véase R. G. D. Allen: *Mathematical Analysis for Economists*, MacMillan and Co., Londres, 1938, pág. 342. Hay traducción castellana, a la que se referirán las citas sucesivas, con el título *Análisis Matemático para Economistas*, Aguilar, S. A., Madrid, 1959, págs. 335-336, y José Castañeda, *op. cit.*, págs. 175-176. Aunque este último autor se refiere a las curvas de indiferencia del consumidor, los resultados, como advierte, se aplican igualmente a las curvas isocuantas.

$$\sigma = \frac{\frac{1}{v_1}\left(\frac{dv_1}{dv_2}\right)^2 - \frac{1}{v_2}\cdot\frac{dv_1}{dv_2}}{\frac{d^2 v_1}{dv_2^2}}, \tag{9}$$

que pone de relieve que la elasticidad de sustitución depende tanto de las cantidades empleadas de los factores, como de la primera y segunda derivadas de la función correspondiente a la respectiva isocuanta.

Es posible también expresar la elasticidad de sustitución en función de las productividades marginales y de sus derivadas. En efecto, el denominador de (9) puede ponerse de la forma

$$\frac{d^2 v_1}{d v_2^2} = \frac{1}{f_1^3}\left(- f_1^2 f_{22} + 2 f_1 f_2 f_{12} - f_2^2 f_{11}\right),$$

donde f_1 y f_2 representan, como ya se ha indicado, las productividades marginales, y sus derivadas son $f_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial v_i \, \partial v_j}$, verificándose que $f_{ij} = f_{ji}$ $(i \neq j = 1, 2)$. La sustitución en (9) de la derivada segunda que figura en su denominador, junto con la igualdad (2), conducen, después de simplificar, a la expresión

$$\sigma = \frac{v_1 f_1 + v_2 f_2}{v_1 v_2} \cdot \frac{f_1 f_2}{- f_1^2 f_{22} + 2 f_1 f_2 f_{12} - f_2^2 f_{11}}. \tag{10}$$

Pero el denominador del segundo factor de la fórmula anterior es igual al hessiano orlado F,

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix},$$

mientras que el numerador corresponde al adjunto del elemento f_{12}, que se designa por F_{12}. En consecuencia, puede escribirse:

$$\sigma = \frac{v_1 f_1 + v_2 f_2}{v_1 v_2} \cdot \frac{F_{12}}{F}, \tag{11}$$

expresión ésta que permite establecer la correspondencia entre la formulación de la elasticidad de sustitución para este caso de dos factores y su correspondiente generalización, cuyo análisis se ofrece más adelante.

1.4. *Características de la elasticidad de sustitución.*

Como ya se indicó en el apartado anterior, la elasticidad técnica de sustitución se define como un cociente de variaciones relativas, para que de esta forma no resulte afectada por las unidades en que se midan los factores [19]. Pero, además, los valores de ésta son positivos cuando las isocuantas son convexas hacia el origen de coordenadas y, por el contrario, serán negativos si las curvas son cóncavas hacia dicho origen.

En efecto, según se desprende de (9), para curvas decrecientes en el primer cuadrante, el numerador de esta expresión es positivo, de modo que el signo de la elasticidad de sustitución es el mismo que el de la derivada segunda que figura en el denominador, que mide la curvatura de la respectiva curva. Por consiguiente, si las curvas son convexas hacia el origen de coordenadas, como en el caso normal de las isocuantas y las de indiferencia del consumidor, el denominador de (9) y la elasticidad de sustitución resultan positivas. En cambio, cuando las curvas son cóncavas, según sucede normalmente con las de transformación de un producto en otro [20], dicha derivada segunda y la elasticidad de sustitución toman valores negativos [21].

La fórmula (9) pone igualmente de relieve que, para cada punto del plano y una misma pendiente de la curva, la elasticidad de sustitución es inversamente proporcional a la curvatura de la curva, de modo que cuanto mayor es el valor de aquélla, menor será la curvatura de ésta y más lenta la variación de la relación marginal de sustitución R_2^1, a medida que avanza la sustitución de V_1 por V_2. Un caso extremo se pre-

---

[19] Esta propiedad de las derivadas elásticas no siempre ha sido reconocida. Véase, por ejemplo, Joan Robinson, *op. cit.*, especialmente págs. 389-391; F. Kahn, art. cit., pág. 75; John R. HICKS: *Notes on Elasticity of Substitution. IV. A Note on Mr. Kahn's Paper*, y Richard F. KAHN: *Reply*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1933, págs. 78-79 y 80, respectivamente.

[20] Un excelente análisis de las curvas de transformación, en función de las elasticidades de los costes marginales de los productos, la elasticidad de un producto con respecto al otro y la elasticidad de sustitución, en José Manuel de la TORRE DE MIGUEL: *La elasticidad de sustitución y las curvas de transformación*, en "De Economía", septiembre-octubre, 1959, págs. 853-886.

[21] Cuando Lerner afirma (art. cit., pág. 70) que este caso podría describirse como una elasticidad de sustitución "mayor que infinito", o como una sustituibilidad negativa, lo que daría lugar a un estímulo a la continua sustitución de los factores, sin duda se está refiriendo al hecho de que, si las isocuantas son cóncavas hacia el origen de coordenadas, la relación marginal de sustitución R_2^1 es creciente, a medida que el factor V_2 sustituye al V_1. Esto implica que cada vez se requiere menor cantidad del primer factor para compensar iguales disminuciones del segundo. Claro está que este supuesto es incompatible con la estabilidad del equilibrio competitivo.

senta cuando los factores han de utilizarse en proporción fija. En estas circunstancias, aunque aumente mucho la cantidad empleada de uno de ellos, el producto permanecerá invariable, si no aumenta también la cantidad aplicada del otro, puesto que los factores son insustituibles. La elasticidad de sustitución se anula y la isocuanta, que adopta la forma de un ángulo recto, presenta una curvatura igual a infinito.

El otro caso límite corresponde a la perfecta sustituibilidad de los factores. El producto se conserva ahora invariable, aumentando uno de ellos en una cantidad proporcional a la disminución del otro, lo que significa que la relación marginal de sustitución es constante. La elasticidad de sustitución toma el valor más infinito y la isocuanta se convierte en una recta, cuya curvatura es nula. Entre estos dos valores extremos, $\sigma = 0$, cuando la sustituibilidad de los factores es nula, y $\sigma = \infty$, cuando son perfectamente sustituibles, la elasticidad de sustitución toma valores mayores, y la curvatura de la isocuanta será menor, a medida que aumenta la facilidad técnica de sustitución [22].

Otra importante propiedad de la elasticidad de sustitución es la de ser simétrica respecto a los factores. En efecto, como ya se ha indicado, $d \log (dv_2/dv_1) = - d \log (dv_1/dv_2)$, y, asimismo, $d \log (v_2/v_1) = - d \log (v_1/v_2)$. En consecuencia, puede escribirse la igualdad

$$\sigma = \frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (dv_1/dv_2)} = \frac{d \log (v_2/v_1)}{d \log (dv_2/dv_1)},$$

que pone de relieve que el valor de la elasticidad de sustitución es el mismo, tanto cuando se considera la sustitución de V_1 por V_2 como, inversamente, la de V_2 por V_1, lo que viene a confirmar el carácter recíproco de la sustituibilidad.

Algunos autores, sin embargo, han afirmado que la propiedad de simetría implicaba una función de producción homogénea de primer grado [23]. Pero como ha puntualizado Lerner, tal afirmación es una consecuencia, cuyo antecedente se remonta a Hicks y Robinson, de no reconocer que el concepto se establece para variaciones a lo largo de una misma isocuanta,

---

[22] Si las curvas son cóncavas hacia el origen de coordenadas, o bien si se emplea la fórmula dada en la nota 17, los valores de la elasticidad de sustitución resultarían negativos, variando desde menos infinito hasta cero.

[23] Véase L. TARSHIS: *Notes on the Elasticity of Substitution*, en "Review of Economic Studies", febrero, 1934, págs. 145-147; Fritz Machlup, art. cit., págs. 210-212; Arthur C. Pigou, art. cit., pág. 233, y René Lamy, art. cit., págs. 141-142.

o sea, cuando la cantidad de producto permanece constante [24]. Si se prescinde de este supuesto, la variación experimentada por la proporción de los factores ante una variación de la relación marginal de sustitución viene dada, en términos relativos y con independencia de la forma de la función de producción, por la expresión

$$\frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (dv_1/dv_2)} = \frac{\partial \log (v_1/v_2)}{\partial \log (dv_1/dv_2)} + \frac{\partial \log (v_1/v_2)}{\partial \log x} \cdot \frac{d \log x}{d \log (dv_1/dv_2)} \cdot \qquad (12)$$

La elasticidad de sustitución se halla representada por el primer término de la segunda parte de la igualdad, y el carácter parcial de sus derivadas refleja la invariabilidad del producto.

De aquí se sigue que (12) es equivalente a la elasticidad de sustitución si

$$\frac{d \log x}{d \log (dv_1/dv_2)} = 0 ,$$

o sea si el producto permanece constante y por consiguiente las variaciones de los medios y de sus diferenciales corresponden a una determinada isocuanta, o bien si

$$\frac{\partial \log (v_1/v_2)}{\partial \log x} = 0 ,$$

de donde,

$$\frac{\partial \log v_1}{\partial \log x} = \frac{\partial \log v_2}{\partial \log x} . \qquad (13)$$

La condición (13) implica que, para una misma pendiente de las curvas, el cociente v_1/v_2 es constante, cualquiera que sea la cantidad del producto. Esto significa que a lo largo de cualquier radio vector la proporción de los factores y la relación marginal de sustitución son constantes, de modo que las isocuantas son proyección de una misma curva y sólo difieren en la escala de producción.

Sin embargo, las funciones de producción homogéneas de primer grado no son las únicas que cumplen la condición (13), como se ha sostenido en algunos casos. Morrissett ha demostrado que no solamente las funciones de producción homogéneas de cualquier grado satisfacen dicha con-

---

[24] Abba P. LERNER: *Notes on the Elasticity of Substitution*, II, y *Further Notes on Elasticity of Substitution*, III. *The Question of Symmetry*, en "Review of Economic Studies, febrero, 1934, págs. 147-148, y febrero, 1936, págs. 150-151, respectivamente.

dición, sino también cualquier otra función monótona de las mismas[25]. Unicamente si las funciones de producción son de la forma señalada cabe afirmar que el valor de la elasticidad de sustitución es el mismo, varíe o no la cantidad de producto. En los demás casos, la fórmula (12) no corresponde a la elasticidad de sustitución, puesto que además de ésta incorpora las variaciones originadas en la cantidad de producto.

1.5. *La elasticidad de sustitución y las funciones de producción homogéneas: fórmula de Hicks.*

Una de las hipótesis frecuentes en la teoría de la producción es la que se refiere a los procesos productivos con rendimientos a escala, o sea, cuando los factores se emplean en cantidades proporcionales. Según que la variación del producto sea proporcionalmente mayor, igual o menor que la de los factores, los rendimientos a escala serán crecientes, constantes o decrecientes, respectivamente. El grado de homogeneidad de la función de producción es mayor que la unidad en el primer caso, igual a ésta en el segundo y menor que la unidad en el tercero.

Ahora bien, la consideración de este supuesto da lugar a una fórmula particular de la elasticidad de sustitución. En efecto, si la función de producción (1) es homogénea de grado λ en general, el teorema de Euler permite escribir la identidad

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 = \lambda x, \tag{14}$$

que derivada parcialmente respecto a v_1 y v_2 conduce al sistema siguiente:

$$v_1 f_{11} + v_2 f_{21} = (\lambda - 1) f_1 \tag{15}$$

$$v_2 f_{22} + v_1 f_{12} = (\lambda - 1) f_2. \tag{16}$$

Sustituyendo en (10) las derivadas f_{11} y f_{22} dadas por (15) y (16), respectivamente, y teniendo en cuenta (14), se obtiene, después de simplificar y agrupar los términos convenientemente,

$$\sigma_h = \frac{f_1 f_2}{(1 - \lambda) f_1 f_2 + \lambda x f_{12}}, \tag{17}$$

donde σ_h representa la elasticidad de sustitución correspondiente a las funciones de producción homogéneas de cualquier grado.

---

[25] Irving Morrissett, art. cit., págs. 44-46.

La expresión anterior se simplifica notablemente si la función de producción es homogénea de primer grado. En efecto, en el supuesto de que $\lambda = 1$, se obtiene:

$$\sigma_H = \frac{f_1 f_2}{x f_{12}} , \qquad (18)$$

que es la fórmula de la elasticidad de sustitución propuesta primeramente por Hicks en el apéndice de su obra citada [26].

De lo anterior se desprende que (18) es un caso particular de la definición general de la elasticidad de sustitución, caracterizado porque la función de producción se supone homogénea de primer grado, cuestión ésta que ha sido objeto de controversia en la literatura económica [27]. Pero, además, tanto el valor de σ_h, como el de σ_H, es independiente de que varíe o no la cantidad de producto, puesto que ambas expresiones verifican la condición (13). Puede afirmarse también que la elasticidad de sustitución es la misma, tanto si la homogeneidad es de primer grado, como si es de grado λ, mientras que una elasticidad unitaria implica una función de producción de Cobb-Douglas.

La fórmula (18) muestra igualmente que σ_H varía de manera inversa con la derivada parcial cruzada de segundo orden de la función de producción. Ambas tienen idéntico signo, puesto que tanto la cantidad de producto, como las productividades marginales de los factores, toman valores esencialmente positivos. Dicha derivada segunda mide la variación ocasionada en la productividad marginal de un factor por la modificación de la cantidad aplicada del otro, y su valor depende de las posibilidades de sustitución de éstos.

En efecto, cuanto menor es la sustituibilidad de los factores, mayor será el valor de f_{12}, por cuanto un pequeño incremento en la cantidad

[26] *Ibid.*, pág. 245.

[27] Para Richard F. Kahn (art. cit., pág. 72), la definición de Hicks es idéntica a la de Joan Robinson, en tanto que, según Fritz Machlup (*Further Notes on Elasticity of Substitution.* IV. *Reply*, en "Review of Economic Studies", febrero, 1936, págs. 151-152, y art. cit., especialmente págs. 205 y 208), esta identidad se verifica solamente en cuanto a la fórmula matemática de Hicks, pero no en lo que se refiere a la definición que este autor establece en términos literarios, la cual, afirma, es un concepto distinto. Véase también los comentarios de Milton FRIEDMAN: *Further Notes on Elasticity of Substitution,* I. *Note on Dr. Machlup's Article,* y Joan ROBINSON: *Further Notes on Elasticity of Substitution,* II. *Dr. Machlup's Commonsense of the Elasticity of Substitution,* en "Review of Economic Studies", febrero, 1936, págs. 147-148 y 149, respectivamente; D. G. CHAMPERNOWNE: *A Mathematical Note on Substitution,* en "Economic Journal", junio, 1935, pág. 548, y John R. Hicks, art. cit., pág. 78, así como la demostración que ofrece en la segunda edición de su obra citada, publicada por MacMillan and Co., Londres, 1963, pág. 373.

empleada de uno de ellos dará lugar a un gran aumento en la productividad marginal del otro, y viceversa. Si las posibilidades de sustitución de los factores son nulas, de forma que éstos han de utilizarse en cantidades proporcionales, f_{12} tiende a más infinito y, por consiguiente, σ_H tiende a cero. En cambio, cuando los factores son perfectamente sustituibles, es indiferente emplear uno u otro. En este caso f_{12} se anula y la elasticidad de sustitución alcanza el valor más infinito.

Del supuesto de homogeneidad de primer grado de la función de producción, que condiciona la validez de la formulación de Hicks, se derivan también otras interesantes propiedades. En primer lugar, cuando $\lambda = 1$, el sistema de ecuaciones (15) y (16) conduce a las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} f_{12} &= -\frac{v_1}{v_2} f_{11} \\ f_{21} &= -\frac{v_2}{v_1} f_{22}, \end{aligned} \tag{19}$$

de donde se infiere que el signo de f_{11} y f_{22} es siempre el mismo, y contrario al de $f_{12} = f_{21}$. Por tanto, si las productividades marginales son decrecientes, o sea si $f_{11} < 0$ y $f_{22} < 0$, los factores no pueden ser nunca rivales en el sentido de que el incremento de uno de ellos disminuya la productividad marginal del otro, ya que f_{12} y, enconsecuencia, σ_H son necesariamente positivas. La inversa también se cumple, de modo que si σ_H o bien f_{12} son positivas, las productividades marginales son necesariamente decrecientes [28].

[28] El supuesto de homogeneidad de primer grado afecta también a la condición de convexidad de las isocuantas hacia el origen de coordenadas. En efecto, cuando no se establece supuesto alguno respecto a la forma de la función de producción, la condición de convexidad exige que se verifique la desigualdad

$$f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11} < 0,$$

de la que se sigue que el decrecimiento de las productividades marginales no es ni condición necesaria ni suficiente para que las isocuantas sean convexas, y viceversa. La condición de convexidad por sí sola tampoco determina el signo de f_{12}, ni a la inversa. En cambio, si la función de producción es homogénea de primer grado, la desigualdad anterior se convierte en

$$\frac{f_{11}}{v_2^2} (v_1 f_1 + v_2 f_2)^2 = f_{11} \left(\frac{x}{v_2}\right)^2 < 0.$$

Luego, en este caso, como f_{11} y f_{22} varían en el mismo sentido y f_{12} en el contrario, la correspondencia entre el decrecimiento de las productividades marginales, la convexidad de las isocuantas y el signo de f_{12} es completa, en el sentido de que una cualquiera de estas condiciones implica las otras dos.

La sustitución en (18) de f_{12}, según (19), permite expresar la elasticidad de sustitución de la forma

$$\sigma_H = \frac{\frac{v_2 f_2}{x}}{-\frac{v_1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_1}} = \frac{\frac{v_1 f_1}{x}}{-\frac{v_2}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial v_2}},$$

propuesta por Hicks más recientemente, en relación con las discusiones suscitadas en torno a la teoría marginalista de la distribución de la renta[29]. De acuerdo con (20), la elasticidad de sustitución puede definirse también como el cociente entre la elasticidad parcial del producto respecto a un factor y la elasticidad parcial de la productividad marginal del otro.

Por último, si $\sigma_H = 1$, la fórmula (18) da lugar a la siguiente igualdad[30]:

$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial v_2} = \frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial v_2},$$

que sirve para explicar claramente la interpretación dada por Hicks en su obra citada, cuando afirma: "El caso en que la elasticidad de sustitución es la unidad solamente puede definirse con palabras diciendo que en esta situación (inicialmente, antes de que tenga lugar cambio consiguiente alguno en la oferta de los otros factores), el incremento de un factor aumentará la productividad marginal de los demás, tomados en su conjunto, en la misma proporción que aumenta el producto total"[31]. Pero igualmente puede afirmarse que si aumenta un factor, permaneciendo invariable la cantidad aplicada del otro, el incremento del producto será proporcionalmente mayor o menor que el correspondiente a la produc-

---

[29] John R. Hicks, *op. cit.*, segunda edición, pág. 379.

[30] El valor unitario de la elasticidad de sustitución es una de las hipótesis que por sus peculiaridades ha sido aceptada con más frecuencia. Pero ello no significa, como sostienen Tinbergen y Bos, que los factores son perfectamente sustituibles entre sí, ni que la conocida función de producción de Cobb-Douglas, cuya característica esencial es la de tener una elasticidad de sustitución constante e igual a la unidad, representa el caso más sencillo de sustitución perfecta entre los factores. Véase Jan TINBERGEN y Hendricus C. BOS: *Mathematical Models of Economic Growth*, McGraw-Hill Book, Co., Londres, 1962, pág. 32. Hay traducción española con el título *Modelos Matemáticos del Crecimiento Económico*, Aguilar, S. A., Madrid, 1966, pág. 43.

[31] *Ibid.*, pág. 117.

tividad marginal del factor constante, según que la elasticidad de sustitución sea mayor o menor que la unidad.

1.6. *La elasticidad-precio de sustitución.*

En la introducción de este capítulo se ha hecho referencia a dos definiciones de la elasticidad de sustitución propuestas por Joan Robinson. La primera de ellas, que esta autora considera como más fundamental, se refiere a la fórmula (8). En cuanto a la segunda definición, sólo es aplicable, afirma, en régimen de competencia perfecta, y la define en los siguientes términos: "Parece apropiado denominar elasticidad de sustitución a la variación proporcional de la razón entre las cantidades de los factores dividida por la variación proporcional (a la que aquélla se debe) de la razón entre sus precios, por analogía con la elasticidad de la demanda o de la oferta, estando determinada dicha elasticidad de sustitución por las condiciones técnicas de la producción" [32].

El supuesto de competencia perfecta en los mercados de factores y del producto establece que, en el equilibrio de la empresa, las productividades marginales son proporcionales a los precios de los respectivos factores o, en otras palabras, que la relación marginal de sustitución entre éstos es igual al cociente invertido de sus respectivos precios, o sea,

$$R_2^1 = \frac{f_2}{f_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

donde p_1 y p_2 son los precios de los factores V_1 y V_2, respectivamente. La sustitución de la igualdad anterior en la (6) o en la (8) conduce a la siguiente fórmula:

$$\sigma = \frac{\dfrac{p_2}{p_1}}{\dfrac{v_1}{v_2}} \frac{d\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)}{d\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)} = \frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (p_2/p_1)} = \frac{d \log v_1 - d \log v_2}{d \log p_2 - d \log p_1}, \tag{21}$$

denominada generalmente "elasticidad -precio de sustitución", y erróneamente atribuida por algunos autores a Hicks y Allen [33].

[32] *Ibid.*, pág. 299.

[33] Véase, entre otros, Z. M. KUBINSKI: *The Elasticity of Substitution between Sources of British Imports, 1921-1938*, en "Yorkshire Bulletin of Economic and Social Research", enero, 1950, pág. 17; Tse CHUN CHANG: *A Statistical Note on World Demand for Exports*, en "Review of Economics and Statistics", mayo, 1948, pág. 110, y R. J. NICHOLSON: *Product-Elasticities of Substitution in International Trade*, en "Economic Journal", septiembre, 1955, pág. 441.

Ahora bien, la correspondencia entre la elasticidad técnica y la elasticidad-precio de sustitución se basa no sólo ni exclusivamente en la existencia de un equilibrio competitivo, como ciertamente señala esta autora, sino además en el supuesto no reconocido expresamente de que las variaciones en las cantidades y precios de los factores se midan a lo largo de una misma isocuanta, o sea para una cantidad de producto constante. Prescindir de este supuesto implica, como ya se ha visto, incorporar a la estricta sustitución de los factores las variaciones originadas en la cantidad de producto, excepto si la función de producción es tal que satisface la condición (13).

Definida de esta forma [34], la elasticidad-precio de sustitución resulta positiva en el caso normal de isocuantas convexas hacia el origen de coordenadas, lo que significa que a una variación del cociente de precios p_2/p_1 corresponde una variación del mismo sentido en el cociente de las cantidades de los factores v_1/v_2. Cuando las condiciones técnicas de la producción son tales que los factores han de aplicarse en proporción fija, cualquiera que sea su precio, el numerador de (21), así como el valor de la elasticidad-precio de sustitución, es igual a cero. Si, por el contrario, una pequeña modificación del cociente de precios ocasiona una gran alteración en la proporción de los factores, la elasticidad-precio de sustitución tiende a más infinito. Entre estos dos valores extremos, relativos respectivamente a la complementaridad y a la sustituibilidad perfectas, el valor positivo de la elasticidad-precio de sustitución es mayor a medida que es más fácil la sustitución de un factor por otro.

La analogía señalada por Joan Robinson entre la elasticidad de la demanda o de la oferta y la elasticidad-precio de sustitución se manifiesta en que, así como aquéllas miden la variación relativa experimentada por la cantidad de producto demandada u ofrecida ante una modificación relativa de su precio, ésta expresa la variación proporcional que en la razón de las cantidades aplicadas de los factores origina una variación también

---

[34] En algunos trabajos, la elasticidad-precio de sustitución se ha definido también como

$$\frac{d \log (v_1/v_2)}{d \log (p_1/p_2)},$$

cuya única diferencia con la fórmula (21) radica en que su signo es distinto, puesto que $d \log (p_1/p_2) = -d \log (p_2/p_1)$. Sin embargo, André Babeau (*L'élasticité de substitution entre facteurs*, en "Revue Economique", julio, 1964, pág. 551) sostiene que ambas expresiones difieren también en cuanto a su valor absoluto, lo que constituye una errónea conclusión derivada de no tener en cuenta el supuesto de la invariabilidad del producto.

proporcional del cociente invertido de sus precios respectivos, cuando la cantidad de producto permanece invariable.

Pero dicha elasticidad-precio no está determinada por las condiciones técnicas de la producción, según frase de Joan Robinson, ni son éstas y la demanda de los consumidores las que determinan la elasticidad de sustitución, como afirma Hicks [35]. La cuestión depende de la elasticidad de que se trate. En efecto, la elasticidad técnica de sustitución refleja únicamente las posibilidades que proporcionan las condiciones técnicas existentes para mantener el producto constante, acudiendo a la sustitución de un factor por otro. Se trata, pues, de un concepto de carácter técnico y no económico, y puede concebirse como una elasticidad potencial, en el sentido de que prescinde de la causa que motiva la sustitución de los factores y no depende de las características del mercado, sino solamente de las condiciones técnicas de la producción.

En cambio, la elasticidad-precio de sustitución, además de atribuir a una modificación del precio relativo de los factores el móvil que impulsa al empresario a emplear éstos en distinta proporción, depende no sólo de las condiciones técnicas, en cuanto determinan la forma de la función de producción, sino también de las características estructurales e institucionales del mercado, en cuanto intervienen en la fijación del precio de los factores. Por ello, la elasticidad-precio responde más bien a un concepto de contenido económico, y puede tomar valores distintos de los que resultarían si únicamente se considerasen las posibilidades técnicas de sustitución.

Por otra parte, la fórmula (21), que corresponde al caso particular de libre concurrencia, puede extenderse igualmente sin dificultad alguna a cualesquiera que sean las condiciones de los mercados en que se adquieren los factores y se vende el producto. En efecto, sea la función de demanda del producto con que se enfrenta la empresa

$$p_x = F(x),$$

donde p_x y x representan el precio y la cantidad demandada, respectivamente. Las cantidades que adquiere la empresa de los factores y sus respectivos precios están relacionados por las funciones de oferta, que se suponen independientes,

$$p_1 = F_1(v_1)$$
$$p_2 = F_2(v_2).$$

---

[35] *Op. cit.*, pág. 118.

La elasticidad de la demanda, representada por ε, tiene por expresión

$$\varepsilon = -\frac{p_x}{x}\frac{dx}{dp_x}$$

y las correspondientes a las ofertas de los factores de producción, designadas por η_1 y η_2, respectivamente, son

$$\eta_1 = \frac{p_1}{v_1}\frac{dv_1}{dp_1}$$

$$\eta_2 = \frac{p_2}{v_2}\frac{dv_2}{dp_2}.$$

El equilibrio de la empresa lucrativa exige, en los supuestos establecidos, que se cumplan las condiciones [36]

$$p_x\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)f_1 = p_1\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)$$

$$p_x\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)f_2 = p_2\left(1+\frac{1}{\eta_2}\right),$$

de donde se sigue que

$$R^{1}_{2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{p_2\left(1+\frac{1}{\eta_2}\right)}{p_1\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)},$$

expresión que llevada a la (6) o a la (8) conduce a la fórmula de la elasticidad-precio de sustitución siguiente:

$$\sigma = \frac{d\log\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d\log\left[\frac{p_2\left(1+\frac{1}{\eta_2}\right)}{p_1\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)}\right]} = \frac{d\log\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d\log\left(\frac{p_2}{p_1}\right) + d\log\left(\frac{1+\frac{1}{\eta_2}}{1+\frac{1}{\eta_1}}\right)}. \qquad (22)$$

La fórmula anterior tiene validez general, de modo que se aplica tanto a las situaciones extremas de libre concurrencia y monopolio, como a los casos intermedios. En el supuesto de libre concurrencia, las ofertas de los factores son infinitamente elásticas, o sea sus respectivas elasticidades tienden a más infinito, y la fórmula (22) se reduce a la (21). Pero este supues-

---

36 Véase, por ejemplo, José Castañeda, *op. cit.*, especialmente págs. 623-624, y Ragnar FRISCH: *Las leyes técnicas y económicas de la producción*. Sagitario, S. A., Barcelona, 1963, págs. 242-247.

to no es más que un caso particular. La condición general de equivalencia entre las expresiones (21) y (22) viene dada por la relación siguiente:

$$1 + \frac{1}{\eta_1} = k(1 + \frac{1}{\eta_2}), \tag{23}$$

donde k es una constante positiva.

Si k > 1, entoces se verifica que $\eta_2 > \eta_1$. Por el contrario, cuando el valor positivo de k es menor que la unidad, $\eta_1 > \eta_2$. El valor unitario de k corresponde a otro caso particular, caracterizado porque, si bien la empresa monopoliza el mercado de factores, los valores finitos de las elasticidades de oferta son iguales, o sea $\eta_1 = \eta_2$. Este último caso, aunque particular, es más general que el de libre concurrencia, en el que las dos elasticidades de oferta tienden a más infinito. Si la condición (23) no se cumple, las fórmulas (21) y (22) no son equivalentes. El valor de esta última será mayor o menor que el de la primera, según que la expresión

$$d \log \left(\frac{1 + \frac{1}{\eta_2}}{1 + \frac{1}{\eta_1}} \right)$$

tenga signo negativo o positivo, respectivamente.

La elasticidad-precio de sustitución ha sido objeto de numerosas estimaciones empíricas entre las demandas de productos rivales, si bien en nuestros días la atención se centra principalmente en las funciones de producción homohipalágicas o CES. El método de estimación utilizado ha consistido comúnmente en ajustar a los datos del mercado, en general por el método de mínimos cuadrados, una recta de regresión entre el logaritmo del cociente de las cantidades y el de precios. En algunos trabajos se han considerado también la renta monetaria, el índice de precios de las demás mercancías, los retrasos con que se verifica la adaptación de las cantidades a las variaciones de los precios, etc.

Pero al optimismo que acompañó a las primeras verificaciones estadísticas siguió una corriente de pensamiento de sentido contrario, calificada por Machlup en el comercio internacional de pesimismo de las elasticidades-precio, en razón de que los valores obtenidos eran tan bajos que venían a defraudar las esperanzas puestas en el mecanismo de los precios [37]. Posteriormente, varios autores reaccionaron contra el pesimismo

[37] Fritz MACHLUP: *Elasticity Pessimism in International Trade*, en "Economia Internazionale", febrero, 1950, págs. 118-137.

de las elacticidades y trataron de demostrar que los reducidos valores se debían fundamentalmente a la imperfección de los métodos de cálculo utilizados. Si las elasticidades estuvieran correctamente calculadas, afirmaban, los resultados serían mucho más elevados [38].

Sin entrar a discutir estos problemas, cuya importancia es indudable, pero que caen fuera del propósito del presente trabajo, conviene señalar que tales estimaciones son, en general, de muy dudoso valor, y han sido objeto de numerosas críticas metodológicas y conceptuales. La mayoría de estos trabajos, como ha demostrado Morrissett [39], están caracterizados por la aplicación del concepto de la elasticidad-precio de sustitución sin el adecuado reconocimiento de los supuestos que se establecen en su formulación teórica. Las condiciones que se requieren para una correcta estimación difícilmente se dan en la realidad, y el método de estimación utilizado, aunque parece razonable a primera vista, introduce la importante limitación de que la elasticidad de sustitución es constante. Pero esto no solamente añade fuertes limitaciones respecto a la forma de las funciones de demanda [40], sino que tiende a crear una aparente consistencia en los resultados, que ha inducido a Tinbergen y Morgan, entre otros, a interpretarla como una prueba de la bondad de sus estimaciones [41].

1.7. *Generalización de la elasticidad de sustitución.*

Aunque la elasticidad de sustitución se definió primeramente para el caso simplificado de dos factores de producción, el concepto se ha extendido posteriormente a cualquier número de ellos. Sin embargo, la generalización del mismo no es única, y pierde en gran medida tanto su carácter intuitivo, como su contenido económico. Ello se debe, entre otras razones, a la imposibilidad de considerar una sola relación marginal de sustitución, puesto que, como es sabido, el número de estas relaciones diferentes es igual al de medios de producción menos uno. Por otra parte, se presenta asimismo el problema de la complementaridad y sus-

---

[38] Un resumen bibliográfico puede verse en Hang S. CHENG: *Statistical Estimates of Elasticities and Propensities in International Trade: A Survey of Published Studies*, en "Staff Papers", abril, 1959, págs. 107-158.

[39] Irving Morrissett, art. cit., especialmente págs. 49-52 y 54-57.

[40] La analogía entre la teoría del consumo y la de la producción se manifiesta, una vez más, en el hecho de que algunas de las condiciones que implica el supuesto de la elasticidad de sustitución constante son análogas en ambos casos.

[41] Jan TINBERGEN: *Some Measurements of Elasticities of Substitution*, en "Review of Economics and Statistics", agosto, 1946, pág. 112, y James N. MORGAN: *Consumer Substitution between Butter and Margarine*, en "Econometrica", enero, 1951, págs. 37-38.

tituibilidad de los factores, por cuanto al ser éstos más de dos, la sustitución de cualquiera de ellos no tiene que realizarse a expensas necesariamente del otro.

La primera contribución en este sentido se debe también a Hicks y Allen. Entre las diversas elasticidades que definen estos autores para el caso de tres bienes de consumo, igualmente válidas para los factores de producción, únicamente se han extendido como generalizaciones del concepto las denominadas frecuentemente como "elasticidad parcial directa de sustitución" y la "elasticidad parcial de sustitución de Allen" [42]. La primera constituye la forma más sencilla y directa de generalización, toda vez que consiste en aplicar la definición dada para el caso de dos factores a cada par de ellos, suponiendo que los demás factores permanecen constantes.

Sea la función de producción de la forma

$$x = f(v_1, v_2, \ldots, v_n), \tag{24}$$

donde, como es habitual, x representa la cantidad de producto X, y v_r la empleada del factor V_r ($r = 1, 2, \ldots, n$). La elasticidad parcial directa de sustitución entre los medios V_i y V_j, por ejemplo, se define entonces como el cociente entre la variación relativa de la proporción v_i/v_j y la variación también relativa de su relación marginal de sustitución, $R^i_j = -\frac{dv_j}{dv_i}$, o bien del cociente invertido de sus productividades marginales, puesto que $R^i_j = \frac{f_i}{f_j}$, cuando las cantidades de producto y de los restantes factores permanecen invariables [43]. Si esta elasticidad se designa por σ^*_{ij}, su expresión analítica es

$$\sigma^*_{ij} = \frac{R^i_j}{\frac{v_i}{v_j}} \cdot \frac{d\,(v_i/v_j)}{d\,R^i_j} = \frac{d\log(v_i/v_j)}{d\log(dv_i/dv_j)} = \frac{d\log(v_i/v_j)}{d\log(f_j/f_i)}, \tag{25}$$

---

[42] John R. Hicks y R. G. D. Allen, art. cit., parte segunda, en "Economica", mayo, 1934, especialmente págs. 204-206. En la terminología de estos autores, dichas elasticidades corresponden a la "elasticidad de sustitución entre Y y Z en la dirección de indiferencia YZ (X constante)" y a la "elasticidad de complementaridad de Y con X a través de Z", respectivamente.

[43] Esta definición ha sido adoptada, entre otros, por James E. MEADE: *A Neo-Classical Theory of Eoconomic Growth,* George Allen and Unwin, Ltd., Londres, 1962, págs. 32 y 37; Daniel MCFADDEN: *Further Results on CES Production Functions,* en "Review of Economic Studies", junio, 1963, págs. 73-74; K. SATO: *A Two-Level-Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function,* en "Review of Economic Studies", abril, 1967, págs. 203 y 216, e Irving Morrissett, art. cit., págs. 43-44.

que puede ponerse también, de acuerdo con McFadden [44], de la forma siguiente:

$$\sigma^*_{ij} = \frac{\frac{1}{v_i f_i} + \frac{1}{v_j f_j}}{-\frac{f_{ii}}{f_i^2} + 2\frac{f_{ij}}{f_i f_j} - \frac{f_{jj}}{f_j^2}}, \quad (i \neq j) \tag{25 a}$$

que es idéntica a la (10) u (11), cuando el número de factores se reduce a dos.

Por otra parte, si p_i y p_j son los precios de estos medios, y η_i y η_j sus respectivas elasticidades de oferta, la fórmula correspondiente a la elasticidad-precio de sustitución es en este caso

$$\sigma^*_{ij} = \frac{d \log \left(\frac{v_i}{v_j}\right)}{d \log \left[\frac{p_j \left(1 + \frac{1}{\eta_j}\right)}{p_i \left(1 + \frac{1}{\eta_i}\right)}\right]}, \tag{26}$$

que en el supuesto de competencia perfecta en el mercado de factores se reduce a

$$\sigma^*_{ij} = \frac{d \log (v_i / v_j)}{d \log (p_j / p_i)}, \tag{26 a}$$

por lo que en estas condiciones la elasticidad parcial de sustitución expresa la variación que en la proporción de los factores ocasionaría una variación relativa del cociente invertido de sus respectivos precios, cuando la cantidad de producto y la empleada de los demás factores se mantienen constantes.

La elasticidad parcial directa de sustitución posee las mismas propiedades que σ, o sea es independiente de las unidades de medida, es simétrica respecto a los factores, de modo que la sustitución de V_i por V_j es la misma que la de V_j por V_i, lo que se expresa por la igualdad $\sigma^*_{ij} = \sigma^*_{ji}$, y toma valores positivos, comprendidos entre cero e infinito, en el caso normal de la hipersuperficie isocuanta convexa hacia el origen de coordenadas. Sin embargo, como en este caso, cada factor da lugar a n-1 elasticidades parciales directas de sustitución, el número de estas elasticidades diferentes, o sea después de tener en cuenta la propiedad de simetría, asciende a ½ n (n-1).

[44] Art. cit., pág. 74.

La elasticidad parcial de sustitución de Allen prescinde de la fuerte limitación que implica el supuesto de invariabilidad de los restantes factores, y mide la sustituibilidad entre cada par de ellos a través de todos los demás. Su expresión analítica recuerda la generalización de la fórmula (11), con la que coincide cuando solamente hay dos factores, y viene dada por [45]

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{r=1}^{n} v_r f_r}{v_i v_j} \cdot \frac{F_{ij}}{F} \qquad (i \neq j = 1,2, \ldots, n), \tag{27}$$

donde F_{ij} es el adjunto del elemento f_{ij} del hessiano orlado F:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \ldots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

El número de estas elasticidades diferentes entre los pares de n factores de producción es el mismo que en el caso anterior, o sea $\frac{1}{2}n(n\text{-}1)$. Todas ellas son también independientes de las unidades de medida y simétricas. Esta última propiedad se basa en el carácter simétrico del determinante F, que da lugar a la igualdad $F_{ij} = F_{ji}$, de la que se sigue que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Sin embargo, las elasticidades parciales de sustitución de Allen no tienen signo definido y pueden ser tanto positivas como negativas. Este determina el carácter complementario o sustitutivo de los factores y, según el criterio de Hicks y Allen [46], el valor negativo de σ_{ij} implica que V_i compite con V_j a través de los demás medios, y, si σ_{ij} es positiva, dichos factores serían complementarios [47].

La elasticidad parcial de sustitución de Allen posee un significado muy preciso, cuando se expresa en función de la variación que en la demanda de un factor ocasiona una modificación del precio de otro, permaneciendo constantes los demás precios y la cantidad de producto. En

[45] Véase R. G. D. Allen, *op. cit.*, pág. 497.
[46] Art. cit., pág. 211.
[47] Esta definición de complementaridad y sustituibilidad ha sido objeto de numerosas críticas, y no es más que un simple refinamiento del criterio que establece esta clasificación basándose en el signo de la elasticidad cruzada de la demanda. Véase, a título de ejemplo, Abba P. LERNER: *The Analysis of Demand*, e Hirofumi UZAWA: *Mathematical Appendix*, en "American Economic Review", septiembre, 1962, págs. 783-801, así como Ivor F. PEARCE: *A Contribution to Demand Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1964, especialmente capítulo cuarto.

efecto, si la empresa trata de obtener una determinada cantidad de producto con el mínimo coste, el equilibrio competitivo exige que se verifique el sistema de ecuaciones

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = x_0$$
$$p_r = \mu f_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

donde μ representa el multiplicador de Lagrange, igual al coste marginal, y el coste de producción es

$$C = v_1 p_1 + v_2 p_2 + \ldots + v_n p_n .$$

En estas condiciones, el efecto de sustitución que en la demanda de V_i origina una variación de p_j viene dado por [48]

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_j} = \frac{p_i}{f_i} \frac{F_{ij}}{F},$$

y designando por k_j la proporción del coste gastada en V_j, o sea

$$k_j = \frac{v_j \, p_j}{C},$$

se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{p_j}{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial p_j} = k_j \, \sigma_{ij}, \qquad (27\,a)$$

que establece que la elasticidad parcial de sustitución es igual a la elasticidad cruzada de la demanda, ponderada por la proporción del coste relativa al factor cuyo precio ha variado, cuando los demás precios y la cantidad de producto permanecen constantes.

Por último, se puede demostrar que otra formulación alternativa de esta elasticidad parcial de sustitución es en términos de la función de costes. Para ello, del anterior sistema de ecuaciones del equilibrio se despejan las n funciones de demanda

$$v_r = g_r(x, p_1, p_2, \ldots, p_n). \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

de modo que la función de coste mínimo, para cada volumen de producción y precios dados, puede escribirse entonces de la forma

$$C(x, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{r=1}^{n} v_r \, p_r = \sum_{r=1}^{n} p_r \, g_r(x, p_1, p_2, \ldots, p_n).$$

[48] Véase John R. Hicks: *Théorie Mathématique de la Valeur en Régime de Libre Concurrence,* Hermann et Cie., París, 1937, págs. 35-36.

Ahora bien, como las funciones de demanda de los factores son homogéneas de grado cero en los precios, mientras que la función de coste mínimo es de grado uno, resulta [49]:

$$\frac{\partial C}{\partial p_r} = v_r \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v_r}{\partial p_s} = \frac{\partial^2 C}{\partial p_r \, \partial p_s},$$

expresiones que sustituidas en (27a) conducen a la siguiente fórmula propuesta por Uzawa [50]:

$$\sigma_{ij} = \frac{C}{\dfrac{\partial C}{\partial p_i} \cdot \dfrac{\partial C}{\partial p_j}} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial p_i \, \partial p_j}$$

Otra definición del concepto, que es una combinación más realista de las dos anteriores, ha sido propuesta por McFadden y denominada "elasticidad-sombra de sustitución" [51]. Esta consiste en aplicar la definición dada para el caso de dos factores solamente a cada par de ellos, pero suponiendo que no son las cantidades, sino la función de coste mínimo de producción y los precios imputados o precios sombra de los restantes factores, que son aquéllos que permitirían obtener cada volumen de producción con el mínimo coste, los que permanecen constantes. En términos analíticos, esta elasticidad se representa por

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{-\dfrac{\dfrac{\partial^2 C}{\partial p_i^2}}{\left(\dfrac{\partial C}{\partial p_i}\right)^2} + 2\,\dfrac{\dfrac{\partial^2 C}{\partial p_i \, \partial p_j}}{\dfrac{\partial C}{\partial p_i} \cdot \dfrac{\partial C}{\partial p_j}} - \dfrac{\dfrac{\partial^2 C}{\partial p_j^2}}{\left(\dfrac{\partial C}{\partial p_j}\right)^2}}{\dfrac{1}{p_i \dfrac{\partial C}{\partial p_i}} + \dfrac{1}{p_j \dfrac{\partial C}{\partial p_j}}},$$

cuya deducción y correspondencia con (25a) se basa en la dualidad existente entre la función de produción y la de mínimo coste [52].

---

49 Véase, por ejemplo, Paul A. SAMUELSON: *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, 1947, pág. 68. Hay traducción castellana con el título *Fundamentos del Análisis Económico*, El Ateneo, Buenos Aires, 1957, págs. 68-69.

50 Hirofumi UZAWA: *Production Function with Constant Elasticities of Substitution*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1962, pág. 293.

51 Art. cit., págs. 73 y 76.

52 Sobre este aspecto, véase también Ronald W. SHEPHARD: *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1953, págs. 17-29.

II. REPRESENTACION GRAFICA DE LA ELASTICIDAD DE SUSTITUCION

2.1. *Determinación gráfica de la elasticidad de sustitución.*

En las figuras 1-A y 1-B se halla representada la isocuanta XX, o el lugar geométrico de las distintas combinaciones de los factores que dan lugar a la misma cantidad de producto. Para un punto de la curva

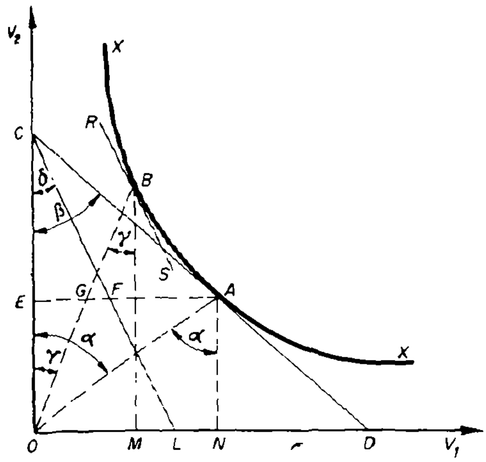

Fig. 1 A

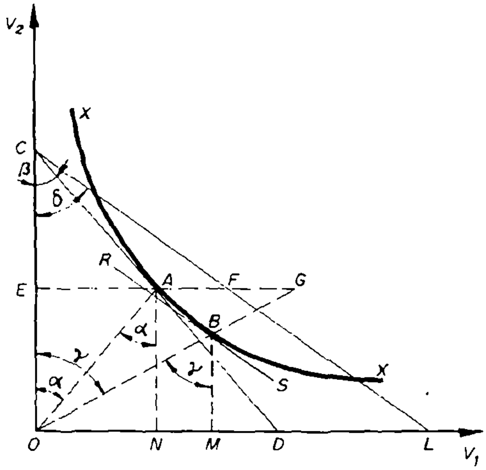

Fig. 1 B

como el A, el cociente de las cantidades de los factores, v_1/v_2, viene dado por

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{ON}{AN} = \frac{AE}{OE} = \operatorname{tag} \alpha \ ,$$

y la relación marginal de sustitución entre V_1 y V_2 es, para este mismo punto,

$$R\frac{1}{2} = -\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{OD}{OC} = \frac{AE}{EC} = \operatorname{tag} \beta \ .$$

La elasticidad de sustitución puede expresarse gráficamente por la relación entre los incrementos relativos de las tangentes de los ángulos α y β, cuando el punto A experimenta un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la respectiva isocuanta [53]. Claro está que dicho desplazamiento puede efectuarse según una doble dirección. En primer lugar, si el punto A se desplaza sobre la isocuanta a la derecha y hacia abajo del mismo, o sea si el factor V_1 sustituye al V_2, según expresa la figura 1-B, aumenta el valor de dicho cociente de cantidades y el de la relación marginal de sustitución, lo que se traduce en un incremento de los respectivos ángulos α y β.

Pero puede suceder también que sea el factor V_2 el que sustituye al V_1, en cuyo caso el punto A se desplazará sobre la isocuanta hacia arriba y a su izquierda, según corresponde a la figura 1-A. En este caso disminuyen dichos ángulos, así como la relación marginal de sustitución R^1_2 y el cociente v_1/v_2. De aquí se sigue que la proporción de los factores y su relación marginal de sustitución varían en el mismo sentido, cualquiera que sea la dirección en que se desplace el punto A, por lo que la elasticidad de sustitución resulta positiva cuando la isocuanta es de la forma normal, o sea convexa hacia el origen de coordenadas.

Ahora bien, no son las variaciones absolutas, sino las relativas, las que intervienen en la elasticidad de sustitución. Para determinar gráficamente éstas hay que tener en cuenta que, si el punto A se traslada hacia el B, los factores se emplearían en este caso en la proporción

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{OM}{MB} = \frac{EG}{OE} = \operatorname{tag} \gamma.$$

Por tanto, la variación experimentada por la proporción de los factores al pasar de A a B, disminución en el caso de la figura 1-A y aumento en el de la figura 1-B, sería:

$$\Delta \left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \frac{AE}{OE} - \frac{EG}{OE} = \frac{AG}{OE}.$$

Para determinar el valor de la relación marginal de sustitución, se traza la recta CL, paralela a la tangente RS a la isocuanta en B. Como para este punto se verifica que

$$R^1_2 = \frac{OL}{OC} = \frac{EF}{EC} = \operatorname{tag} \delta,$$

la disminución o el incremento, según se trate de la figura 1-A o de la 1-B, que experimenta la relación marginal de la sustitución al pasar de A a B es:

[53] Véase José Castañeda, *op. cit.*, pág. 174.

$$\Delta R_{2}^{1} = \frac{AE}{EC} - \frac{EF}{EC} = \frac{AF}{EC}.$$

Por último, de acuerdo con la definición de la elasticidad de sustitución, se tiene que [54]

$$\sigma = \frac{\Delta\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{\frac{v_1}{v_2}} \Big/ \frac{\Delta R_2^1}{R_2^1} = \frac{\frac{AG}{OE}}{\frac{AE}{OE}} \Big/ \frac{\frac{AF}{EC}}{\frac{AE}{EC}} = \frac{AG}{AE} \Big/ \frac{AF}{AE} = \frac{AG}{AF},$$

y como, en el caso analizado, AG > AF, la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad. Si, por el contrario, AG < AF, la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, y será igual a ésta cuando los puntos F y G coincidan.

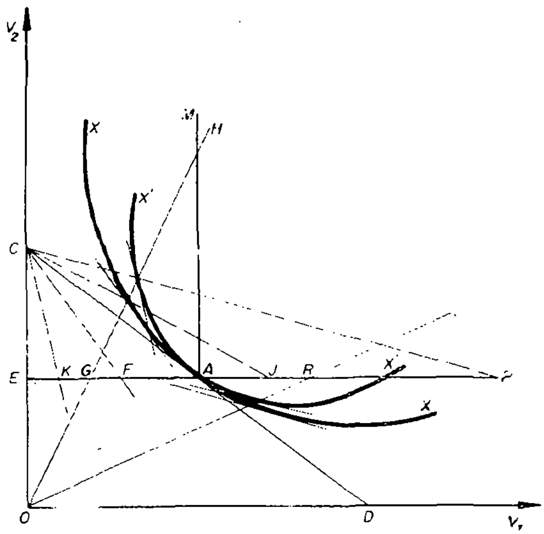

Fig. 2

Pero el valor de la elasticidad de sustitución, como ya se ha indicado anteriormente, depende no sólo de la proporción en que se emplean los factores y de la relación marginal de sustitución, sino también de la

[54] Véase Ronald W. JONES: *Neutral Technological Change and the Isoquant Map*, en "American Economic Review", septiembre, 1965, págs. 848-849. Como el análisis gráfico considera variaciones finitas, se supone que la elasticidad de sustitución es constante en todos los puntos de la isocuanta. De lo contrario, la determinación gráfica correspondería a la elasticidad de arco de sustitución.

mayor o menor curvatura de la isocuanta [55]. Esto puede verse en la figura 2, en la que las isocuantas XX y X'X' tienen la misma pendiente en el punto A, pero distinta curvatura, siendo mayor la correspondiente a la curva X'X' que a la XX.

Para la misma variación de la proporción de los factores, medida en términos relativos por el cociente AG/AE, o bien por el AR/AE, según se trate del radio vector OH o del OL, la variación relativa de la relación marginal de sustitución es igual al cociente AF/AE o al AJ/AE, para la isocuanta XX, y al AK/AE o al AP/AE, para la X'X'. Ahora bien, como AK/AE $>$ AF/AE y asimismo AP/AE $>$ AJ/AE, se sigue que la variación relativa de la relación marginal de sustitución es mayor en isocuanta X'X' que en la XX, y, por consiguiente, la elasticidad de sustitución de esta última curva es mayor que la de la primera.

Esta conclusión se confirma también teniendo en cuenta que, según el método gráfico descrito, la elasticidad de sustitución es, en la isocuanta XX, σ = AG/AF, o bien σ =AR/AJ, mayor que la correspondiente a la curva X'X', que viene dada por σ = AG/AK, y también por σ = AR/AP. Como esta desigualdad se verifica cualquiera que sea la variación de los factores, puede afirmarse que el valor de la elasticidad de sustitución es tanto más elevado cuanto menor es la curvatura de la isocuanta.

Los dos casos extremos corresponden, como es sabido, a la sustituibilidad y complementaridad perfectas de los factores. En el primero de ellos la isocuanta se convierte en una recta, como la representada en la figura 2 por CD, cuya curvatura es nula. La relación marginal de sustitución permanece invariable ante cualquier variación en las cantidades aplicadas de los factores, y la elasticidad de sustitución toma el valor infinito. En el segundo caso, por el contrario, las condiciones técnicas determinan que los factores han de emplearse en proporción fija, por lo que la isocuanta adopta la forma de un ángulo recto, como el representado en la figura por MAP, ya que cualquier aumento de uno de los factores solamente, a partir de la combinación correspondiente al punto A, no originará incremento alguno en la cantidad de producto. La relación marginal de sustitución toma en el entorno a dicho punto los valores cero o infinito, y la elasticidad de sustitución se anula.

---

[55] El supuesto tan frecuente de que el valor de la elasticidad de sustitución es constante implica, como se desmostrará en el apartado 3.2, una forma especial de las respectivas isocuantas.

2.2. *La elasticidad de sustitución de las isocuantas en forma de hipérbolas equiláteras.*

Si se supone que las curvas isocuantas adoptan la forma especial de las hipérbolas equiláteras con centro en el origen de coordenadas, la elasticidad de sustitución es en todos sus puntos igual a la unidad. Esto se demuestra gráficamente recordando que esta clase de curvas goza de la propiedad de que la tangente trazada a la misma, en cualquiera de sus puntos, determina con los ejes de coordenadas un segmento cuyo punto medio es precisamente el respectivo punto de la isocuanta. Por consiguiente, para un punto como el B de la figura 3, se verifica la igualdad BF = BG. Ahora bien, para este mismo punto, el valor de la relación marginal de sustitución y el del cociente de las cantidades empleadas de los factores es, respectivamente,

$$R_{2}^{1} = \frac{OG}{OF} = \frac{DB}{DF}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{OE}{EB} = \frac{DB}{OD}.$$

Por otra parte, puede establecerse la proporción

$$\frac{DF}{OD} = \frac{BF}{BG},$$

y como BF = BG, se sigue que DF = OD. Esto significa que la relación marginal de sustitución es igual a la proporción en que se combinan los

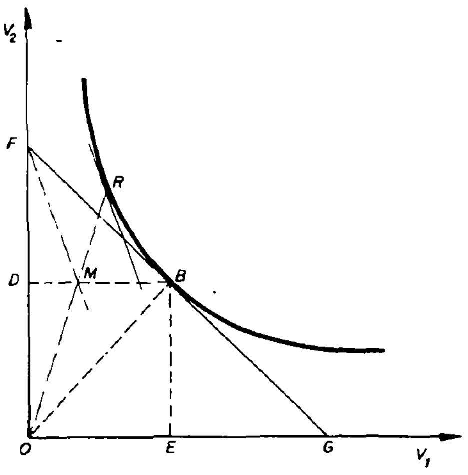

Fig. 3

37

factores, igualdad ésta que se cumple para cualquier punto de la isocuanta, por lo que la elasticidad de sustitución es constante e igual a la unidad. El radio vector OR y la recta FM, paralela a la tangente a la curva en R, cortan al segmento DB en el mismo punto M.

Pero, además, la forma especial que se ha supuesto adoptan las isocuantas permite determinar, mediante un sencillo procedimiento gráfico, otros puntos de la misma conociendo uno de ellos. En efecto, sea P un punto de la isocuanta, de coordenadas OA y OB. Para una ordenada cualquiera, como la OK de las figuras 4-A o 4-B, se une K con B y se traza por P la paralela PZ a KB. El punto Z, en que PZ corta a la paralela KZ al eje de abscisas, y cuyas coordenadas son OH y OK, pertenece también a la hipérbola equilátera que pasa por P, puesto que los rectángulos OBPA y OHZK tienen la misma área [56].

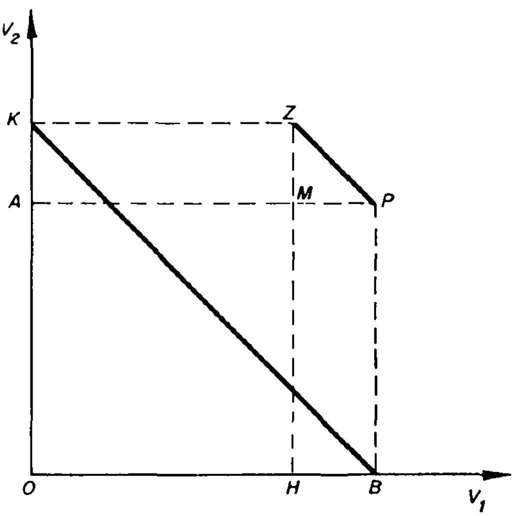

Fig. 4 A

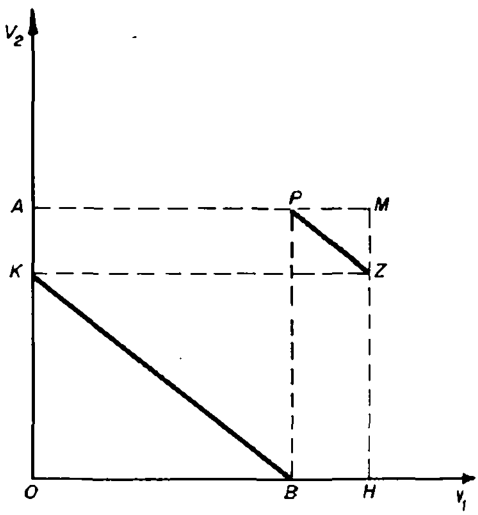

Fig. 4 B

Esto se demuestra teniendo en cuenta que, por semejanza de los triángulos ZMP y KOB, puede escribirse la proporción

$$\frac{ZM}{OK} = \frac{MP}{OB},$$

[56] Un procedimiento alternativo puede verse en Ernst HELMSTADTER: *Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität*, en "Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", junio, 1964, páginas 180-181.

y, por otra parte, como

$$ZM = AK = \pm (OK - OA)$$
$$MP = HB = \pm (OB - OH),$$

igualdades en las que el signo más corresponde a la figura 4-A y el menos a la 4-B, la proporción anterior se convierte en

$$\frac{\pm (OK - OA)}{OK} = \frac{\pm (OB - OH)}{OB},$$

de donde se sigue que

$$OA.OB = OK.OH,$$

lo que demuestra que el área del rectángulo OBPA es igual a la del OHZK.

2.3. *Obtención gráfica de la curva de sustitución.*

La elasticidad de sustitución puede determinarse también siguiendo un procedimiento análogo al propuesto por Lerner [57]. Este consiste en deducir previamente la denominada "curva de sustitución" o "curva de sustituibilidad marginal", que relaciona para cada punto de la isocuanta los valores de la proporción en que se combinan los factores y de la relación marginal de sustitución.

En la parte superior de la figura 5 se representa una isocuanta cerrada. Sobre el eje de ordenadas se elige la cantidad OU, igual a la unidad en que se mide el factor V_2, y se traza la paralela UK al eje de abscisas. Los segmentos comprendidos entre el punto U y el de encuentro de la recta UK con los radios que parten del origen de coordenadas y pasan por el punto correspondiente a la combinación de factores miden la proporción en que se combinan éstos. Así, para el punto E de la isocuanta, dicha proporción es igual al segmeto UJ, ya que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{OH}{HE} = \frac{OL}{LJ} = \frac{UJ}{OU} = UJ,$$

---

[57] Abba P. LERNER: *Notes on Elasticity of Substitution. II. The Diagrammatical Representation*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1933, págs. 68-71. Véase también de este autor *The Economics of Control*, MacMillan and Co., Nueva York, 1944, especialmente págs. 148-151. En esta obra, Lerner describe una curva de sustitución cuya forma difiere ligeramente de la propuesta inicialmente. Hay traducción castellana con el título *Teoría Económica del Control*, Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1951, págs. 168-171.

por ser OU = 1. Los valores como el UJ se llevan sobre el eje de abscisas, en la figura transformada de la la parte inferior.

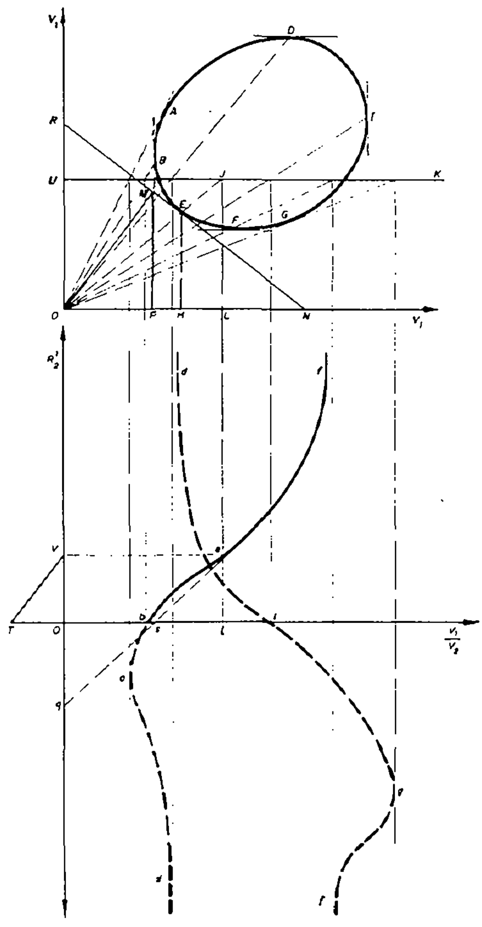

Fig. 5

El valor de la relación marginal de sustitución, correspondiente a dicho punto E, se determina trazando la perpendicular OM a la tangente RN a la isocuanta en E. En la parte inferior de la figura se toma sobre el eje de abscisas, a la izquierda del origen de coordenadas, la cantidad OT igual a la unidad en que se mide V_1, y, por T, se traza la paralela TV a OM. Dicha paralela corta al eje de ordenadas en el punto V, determinando el segmento OV, igual al valor de la relación marginal de sustitución. En efecto, por semejanza de los triángulos RON, MOP y VOT, además de la igualdad OT = 1, se obtiene:

$$R^{1}_{2} = \frac{ON}{OR} = \frac{MP}{OP} = \frac{OV}{OT} = OV \, .$$

De esta forma se ha determinado el punto *e* de la curva de sustitución, relativo al E de la isocuanta. Procediendo de manera análoga se obtienen los restantes puntos de la parte inferior de la figura 5, que se corresponden con aquellos de la isocuanta que figuran en letras mayúsculas.

La elasticidad de sustitución se determina sobre la curva de sustitución de igual manera que la propuesta por Marshall para medir la elasticidad de la demanda de un bien sobre su curva representativa, o sea como el cociente entre las distancias desde cada punto al eje de abscisas y al de ordenadas, respectivamente, medidas sobre la tangente trazada a la curva en el mencionado punto. Por tanto, para el punto *e* citado, la elasticidad de sustitución viene dada por

$$\sigma = \frac{es}{eq},$$

puesto que una sencilla sustitución por proporcionalidad permite escribir:

$$\sigma = \frac{R^{1}_{2}}{\frac{v_1}{v_2}} \cdot \frac{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)}{d R^{1}_{2}} = \frac{el}{ol} \cdot \frac{os}{oq} = \frac{el}{ol} \cdot \frac{sl}{el} = \frac{sl}{ol} = \frac{es}{eq} \, .$$

En consecuencia, cuando la tangente a la curva corta antes al eje de abscisas que al de ordenadas, como ocurre para el punto *e*, la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, y será mayor que ésta en el caso contrario. Si la tangente a la curva pasa por el origen de coordenadas, la elasticidad de sustitución será entonces igual a la unidad.

Es evidente que la forma de la curva de sustitución depende de la que a su vez adopte la respectiva isocuanta. La representada en la parte superior de la figura 5 presenta una zona económica o de sustitución, limitada por los puntos B y F, en la que las dos productividades marginales son positivas, mientras que en la parte restante de la misma una o las dos productividades marginales resultan negativas. La curva de sustitución correspondiente a la zona económica es la representada en la parte inferior de la figura por la línea llena *bef*, en tanto que las líneas gruesas de trazos corresponden a la parte no económica.

En efecto, como en el punto B se anula la relación marginal de sustitución, en la figura transformada de la parte inferior el punto *b* se situa sobre el eje de abscisas, por lo que la elasticidad de sustitución se anula también. La curva de sustitución es creciente al desplazarse desde B hacia F, aunque al principio menos que proporcionalmente, y a partir de una determinada proporción de los factores dicho crecimiento es más que proporcional, como resultado de que la sustituibilidad es más difícil cada vez. La elasticidad de sustitución resulta positiva, y será mayor, igual o menor que la unidad, según que el crecimiento relativo de la relación marginal de sustitución sea menor, igual o mayor que el de la proporción de los factores.

En el otro límite de la zona de sustitución, representado por el punto F, la elasticidad de sustitución vuelve a anularse nuevamente. La curva de sustitución presenta una discontinuidad y pasa de más infinito a menos infinito. Para las combinaciones de los factores comprendidas entre los puntos F e I, situadas fuera de la zona de sustitución, la proporción en que se combinan los factores es positiva y crece al pasar de F a G; alcanza el valor máximo en este punto, y decrece a continuación. Pero en dicho intervalo, la relación marginal de sustitución es negativa y creciente, por lo que la elasticidad de sustitución toma valores negativos en el intervalo FG; se anula en G, y desde este punto hasta el I resulta positiva.

La relación marginal de sustitución se anula en I, y otro tanto le ocurre a la elasticidad de sustitución. Esta es negativa en el intervalo comprendido entre los puntos I y D, puesto que los factores se combinan en proporción decreciente, mientras que la relación marginal de sustitución es positiva y creciente. En D, la curva de sustitución presenta una nueva discontinuidad, ya que la relación marginal de sustitución salta de más a menos infinito, y la elasticidad de sustitución se anula una vez más. Por último, desde D hasta B, la relación marginal de sustitución es negativa y creciente, pero la proporción de los factores disminuye hasta llegar al punto A, en el que alcanza el valor mínimo, para crecer a continuación. Por tanto, la elasticidad de sustitución toma valores positivos en el intervalo DA; se anula en A, y es negativa desde A hasta el punto B.

Las conclusiones anteriores se confirman también mediante la aplicación de la fórmula (9), escrita de la forma siguiente:

$$\sigma = \frac{\frac{1}{v_1} \cdot \frac{dv_1}{dv_2} \left(\frac{dv_1}{dv_2} - \frac{v_1}{v_2} \right)}{\frac{d^2 v_1}{d v_2^2}} .$$

Aparte de la proporción en que se combinan los factores, que es siempre positiva, las derivadas primera y segunda de la expresión anterior son igualmente positivas en el intervalo DB. Pero dentro de éste, el valor del cociente $\frac{v_1}{v_2}$ es menor que el de la derivada $\frac{dv_1}{dv_2}$ en la zona comprendida entre D y A, en la que la elasticidad de sustitución toma, por tanto, valores positivos. En el punto A, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{dv_1}{dv_2}$, de modo que $\sigma = 0$. Por el contrario, para las combinaciones de los factores comprendidas entre A y B, $\sigma < 0$, puesto que $\frac{v_1}{v_2} > \frac{dv_1}{dv_2}$, y en B, $\sigma = 0$, por ser la tangente a la curva paralela al eje de ordenadas, o sea $\frac{dv_1}{dv_2} = 0$. A lo largo de la zona de sustitución, la elasticidad de susticución toma valores positivos, según se demostró anteriormente. En el intervalo DI, las derivadas de la fórmula anterior son negativas y, en consecuencia, $\sigma < 0$. Sin embargo, en el punto I, la tangente a la isocuanta es paralela al eje de ordenadas, por lo que $\frac{dv_1}{dv_2} = 0$ y $\sigma = 0$.

El análisis de las restantes zonas de la isocuanta se facilita escribiendo la elasticidad de sustitución de la forma simétrica [58]

$$\sigma = \frac{\frac{1}{v_2} \cdot \frac{dv_2}{dv_1} \left(\frac{dv_2}{dv_1} - \frac{v_2}{v_1} \right)}{\frac{d^2 v_2}{d v_1^2}} .$$

Las derivadas primera y segunda de esta expresión son positivas en el intervalo GI. En F, la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas, de modo que $\frac{dv_2}{dv_1} = 0$, y $\sigma = 0$. Entre F y G, $\sigma < 0$, puesto que

---

[58] Véase también C. S. SOPER: *The Elasticity of Substitution*, en "Economic Record", diciembre, 1965, págs. 543-544.

$\frac{v_2}{v_1} > \frac{dv_2}{dv_1}$, y en G coinciden las pendientes del radio vector y de la tangente a la isocuanta, por lo que $\frac{v_2}{v_1} = \frac{dv_2}{dv_1}$, y $\sigma = 0$. En cambio, $\frac{v_2}{v_1} < \frac{dv_2}{dv_1}$ en el intervalo GI, de donde se sigue que $\sigma > 0$. Por último, $\sigma = 0$ en el punto D, puesto que $\frac{dv_2}{dv_1} = 0$.

2.4. *Curvas de sustitución con elasticidad constante.*

Si la elasticidad de sustitución es constante a lo largo de la isocuanta, la curva de sustitución reviste una forma especial. Como se demostrará en el capítulo siguiente, cuando el valor constante de la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, las isocuantas tienen por asíntotas unas paralelas a los ejes de coordenadas; cortan a éstos si dicho valor es mayor que la unidad, y tienen por asíntotas los ejes de coordenadas, cuando el valor constante de la elasticidad de sustitución es igual a la unidad.

La integración de (6), en el supuesto de que la elasticidad de sustitución es constante y distinta de cero e infinito, determina la siguiente expresión de las respectivas curvas de sustitución:

$$R^{1}_{2} = K \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{\sigma}},$$

donde K es una constante positiva de integración. La derivada de esta ecuación respecto a la proporción de los factores, o sea

$$\frac{d\,R^{1}_{2}}{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)} = \frac{K}{\sigma} \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{\sigma} - 1}$$

es positiva, lo que demuestra que las curvas de sustitución son crecientes. Por otra parte, la derivada segunda viene dada por

$$\frac{d^2 R^{1}_{2}}{d\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2} = \frac{K}{\sigma^2} (1 - \sigma) \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{\sigma} - 2},$$

y se anula para $\sigma = 1$; es positiva para $0 < \sigma < 1$, y resulta negativa cuando $\sigma > 1$.

Por tanto, las curvas de sustitución son ramas de parábola, como las OA y OB de la figura 6, que pasan por el origen de coordenadas. La primera de ellas es cóncava hacia la dirección positiva del eje de ordenadas, de modo que la tangente en cualquiera de sus puntos corta al eje de abscisas antes que al de ordenadas, por lo que el valor constante de la elasticidad de sustitución es menor que la unidad. Por el contrario, la OB corresponde a un valor de la elasticidad de sustitución mayor que la unidad. Esta curva es cóncava hacia la dirección negativa del eje de ordenadas, de modo que la tangente a la misma en cualesquiera de sus puntos corta al eje de ordenadas antes que al de abcisas. Si la elasticidad de sustitución es igual a la unidad, la curva de sustitución se convierte

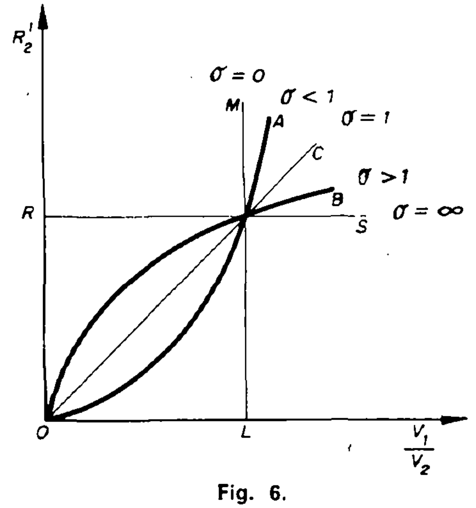

Fig. 6.

en una recta que pasa por el origen de coordenadas, como la OC de la figura.

Por último, en el caso límite de perfecta sustituibilidad de los factores, la curva de sustitución se convierte en una recta horizontal, como la RS, cuya elasticidad es infinito. La distancia OR al eje de abscisas es igual al valor constante de la relación marginal de sustitución. Si los factores son estrictamente complementarios, la recta de sustitución es paralela al eje de ordenadas, como la LM, de modo que la elasticidad es nula, y la distancia OL mide el valor de la proporción constante en que han de emplearse los factores.

III. FUNCIONES DE PRODUCCION CON ELASTICIDAD DE SUSTITUCION CONSTANTE

3.1. *Indeterminación analítica de las funciones de producción con elasticidad de sustitución constante.*

En los dos capítulos precedentes se ha hecho referencia al supuesto de invariabilidad de la elasticidad de sustitución, que establece que ésta no resulta afectada por las variaciones relativas de los factores de producción o, en otras palabras, que la sustituibilidad es la misma en todos los puntos de la isocuanta. La aceptación de este supuesto, aparte de las severas limitaciones que implica, dio lugar a la aparición de las recientes funciones de producción homohipalágicas o CES, cuyas diversas aplicaciones son en nuestros días objeto de una intensa literatura [59].

Estas importantes funciones de producción se pueden obtener directamente de la definición de la elasticidad de sustitución, en el supuesto señalado de que ésta es constante y de que el proceso productivo se realiza con rendimientos a escala. En efecto, en el apartado 2.4 se determinó la ecuación de las curvas de sustitución con elasticidad constante. Haciendo $K = \frac{1-\delta}{\delta}$, donde $0 < \delta < 1$, puesto que $K > 0$, y recordando que $R_2^1 = -\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{f_2}{f_1}$, dicha ecuación toma la forma

$$\delta \, v_1^{-\frac{1}{\sigma}} dv_1 + (1-\delta) \, v_2^{-\frac{1}{\sigma}} dv_2 = 0. \qquad (28)$$

[59] La función de producción CES fue obtenida independientemente y según métodos distintos por ARROW, CHENERY, MINHAS y SOLOW, art. cit., págs. 228-230, y por Murray BROWN y John S. DE CANI: *Technological Change and the Distribution of Income*, en "International Economic Review", septiembre, 1963, págs. 305-309. El autor, a la vez que desea hacer constar que también llegó independientemente a obtener esta clase de funciones de producción, siguiendo el método que se expone en el texto, agradece vivamente la valiosa ayuda que en este sentido recibió de los profesores Rafael Rodríguez Vidal, Angel Gil Criado y Gonzalo García López de Heredia. Antecedentes de las mismas se encuentran en H. D. DICKINSON: *A Note on Dynamic Economics*, en "Review of Economic Studies", vol. 22, núm. 59, 1954-1955, pág. 169, nota 1; Robert M. SOLOW: *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, en "Quarterly Journal of Economics", febrero, 1956, pág. 77, y J. D. PITCHFORD: *Growth and Elasticity of Factor Substitution*, en "Economic Record", diciembre, 1960, págs. 491-504. Véase también el comentario de J. K. WHITAKER: *A Note on the CES Production Function*, en "Review of Economic Studies", abril, 1964, págs. 166-167.

Suponiendo que σ es distinta de ∞, 0 y 1, la integración de (28) conduce a la siguiente ecuación de la curva isocuanta:

$$\delta v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\delta) v_2^{1-\frac{1}{\sigma}} = k, \tag{29}$$

donde k es una constante positiva de integración. Por tanto, la solución general de (28), que corresponde a la expresión de las funciones de producción con elasticidad de sustitución constante, viene dada por

$$x = f\left[\delta v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\delta) v_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right], \tag{30}$$

donde f es cualquier función arbitraria diferenciable.

Si $\sigma = 1$, la ecuación (28) se simplifica, convirtiéndose en la siguiente:

$$\delta \frac{dv_1}{v_1} + (1-\delta) \frac{dv_2}{v_2} = 0,$$

que tiene por integral, siendo C una constante positiva de integración,

$$v_1^{\delta} \, v_2^{1-\delta} = C, \tag{31}$$

y representa la ecuación de una isocuanta del tipo de Cobb-Douglas. La solución general es en este caso

$$x = f(v_1^{\delta} \, v_2^{1-\delta}). \tag{32}$$

Si $\sigma \to \infty$, los factores son perfectamente sustitutivos, y (28) se reduce a

$$\delta \, dv_1 + (1-\delta) \, dv_2 = 0,$$

ecuación diferencial cuya integral es

$$\delta v_1 + (1-\delta) v_2 = c, \tag{33}$$

donde c es una constante positiva de integración. La isocuanta es en este caso una recta decreciente, y la función se expresa por

$$x = f\left[\delta v_1 + (1-\delta) v_2\right], \tag{34}$$

donde f representa, como en los casos anteriores, cualquier función arbitraria diferenciable.

Pero se llega también a las mismas conclusiones mediante la integración de la fórmula (9) de la elasticidad de sustitución. Para ello, dicha expresión se escribe de la siguiente forma:

$$\sigma \frac{d^2 v_1}{d v_2^2} - \frac{1}{v_1} \left(\frac{d v_1}{d v_2}\right)^2 + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{d v_1}{d v_2} = 0. \qquad (35)$$

Multiplicando la anterior ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo por orden por $(dv_2)^2/dv_1$ se obtiene la siguiente:

$$\sigma \frac{\frac{d^2 v_1}{d v_2^2}}{\frac{d v_1}{d v_2}} d v_2 - \frac{d v_1}{v_1} + \frac{d v_2}{v_2} = 0,$$

cuya solución es

$$\sigma \log \left(\frac{d v_1}{d v_2}\right) - \log v_1 + \log v_2 = A,$$

y haciendo la constante de integración $\left(\frac{\delta - 1}{\delta}\right)^{\sigma} = e^{A}$ se obtiene la anterior ecuación diferencial (28).

El otro caso extremo de sustituibilidad nula de los factores se deduce fácilmente de (35). Si $\sigma = 0$, esta ecuación se convierte en

$$\frac{d v_1}{d v_2} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{d v_1}{d v_2}\right) = 0,$$

de donde se sigue que

$$\frac{d v_1}{d v_2} = 0,$$

o bien,

$$\frac{d v_1}{d v_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

cuyas soluciones son, respectivamente,

$$v_1 = a_1$$

$$\frac{v_1}{v_2} = a_2,$$

donde a_1 y a_2 son constantes positivas de integración. La solución primera determina que, para cada volumen de producción, el factor V_1 y, por consiguiente, también el V_2 se emplean en cantidad constante. Las isocuantas son entonces de la forma de Leontief, o sea paralelas a los ejes de coordenadas y formando ángulos rectos. La segunda solución puede interpretarse como la ecuación de la línea que une los vértices de las isocuantas y confirma que los factores han de combinarse en proporción constante, ya que es imposible la sustitución de uno por otro.

El desarrollo anterior pone de relieve que el supuesto de invariabilidad de la elasticidad de sustitución deja indeterminada la forma analítica de las funciones de producción. La única limitación que se desprende de (30) es que el argumento de f sea una función homogénea en v_1 y v_2, condición que es compatible con diversidad de formas analíticas. Pero esta falta de unicidad en la expresión analítica de las funciones de producción no corresponde en modo alguno a ninguna falta de unicidad en la integral misma. El sistema de isocuantas es único y no depende de la forma de la función de producción, sino del valor de la elasticidad de sustitución, que es el mismo en todos los puntos situados a lo largo de cualquier radio vector, puesto que (30) verifica la condición (13).

3.2. *Forma de las isocuantas con elasticidad de sustitución constante.*

Se F la función inversa de f, y k la cantidad de producto que corresponde a la isocuanta. Si $0 < \sigma < 1$, hallando el límite de (30) se obtiene:

$$\lim_{v_1 \to \infty} \left[\delta\, v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\delta)\, v_2^{1-\frac{1}{\sigma}} \right] = \lim_{v_1 \to \infty} F(k),$$

de donde,

$$(1-\delta)\, v_2^{1-\frac{1}{\sigma}} = k\,,$$

y, por tanto,

$$v_2 = \left(\frac{k}{1-\delta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = k_0,$$

lo que indica que la isocuanta tiende a una ordenada $v_2 = k_0$, distinta de cero, cuando la abscisa tiende a más infinito. De manera análoga se demuestra que

$$v_1 = \left(\frac{k}{\delta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} = k_1,$$

es la asíntota de la isocuanta cuando v_2 tiende a más infinito.

En cambio, si $1 < \sigma < \infty$, las isocuantas cortan a los ejes de coordenadas, puesto que en este caso

$$\lim_{v_1 \to 0} \left[\delta\, v_1^{1 - \frac{1}{\sigma}} + (1 - \delta)\, v_2^{1 - \frac{1}{\sigma}}\right] = \lim_{v_1 \to 0} F(k),$$

o sea,

$$(1 - \delta)\, v_2^{1 - \frac{1}{\sigma}} = k,$$

o bien,

$$v_2 = \left(\frac{k}{1 - \delta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} = k_0,$$

obteniéndose de manera análoga que, cuando v_2 tiende a cero,

$$v_1 = \left(\frac{k}{\delta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma - 1}} = k_1,$$

donde $(0, k_0)$ y $(k_1, 0)$ son los puntos en que la isocuanta corta a los ejes de coordenadas.

Cuando $\sigma \to \infty$, los factores son sustitutivos perfectos y las isocuantas se convierten en rectas decrecientes, que cortan igualmente a los ejes de coordenadas. En efecto, de (34) se obtiene la pendiente de las isocuantas

$$\frac{dv_1}{dv_2} = - \frac{(1 - \delta)\, f'}{\delta\, f'} = - \frac{1 - \delta}{\delta},$$

que es negativa y constante. Pero además,

$$\lim_{v_1 \to 0} \left[\delta\, v_1 + (1 - \delta)\, v_2\right] = \lim_{v_1 \to 0} F(k),$$

de donde,

$$v_2 = \frac{k}{1 - \delta} = \overline{k_0}$$

y, análogamente, cuando v_2 tiende a cero,

$$v_1 = \frac{k}{\delta} = \bar{k}_1.$$

Por tanto, las isocuantas cortan a los ejes de coordenadas en los puntos $(0, \bar{k}_0)$ y $(\bar{k}_1, 0)$.

Si $\sigma \rightarrow 0$, los factores se combinan en proporción constante, de modo que el producto no varía si únicamente lo hace uno sólo de ellos. A partir del punto correspondiente a dicha combinación, la isocuanta se convierte en un par de rectas paralelas a los ejes de coordenadas, según se ha demostrado más arriba. Por último, cuando $\sigma = 1$, las isocuantas tienen por asíntotas los ejes de coordenadas, puesto que, como fácilmente se comprueba en (31) o (32), v_1 tiende a más infinito y cero, cuando v_2 tiende a cero y más infinito, respectivamente, y viceversa. Pero además, si $\delta = {}^1/_2$, la ecuación de la isocuanta se reduce a

$$v_1 \cdot v_2 = C^2,$$

que representa una hipérbola equilátera con centro en el origen de coordenadas.

3.3. *Funciones de producción con elasticidad de sustitución constante y rendimientos a escala (CES).*

En el apartado primero de este capítulo se demostró que la forma analítica de las funciones de producción con elasticidad de sustitución constante es indeterminada. Esta indeterminación desaparece, sin embargo, en cuanto se añade el supuesto de que el proceso productivo se efectúa con rendimientos a escala, lo que implica una función de producción homogénea.

En efecto, sea Y el argumento de la función (30), con lo cual

$$x = f(Y), \tag{36}$$

donde

$$Y = \delta v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1-\delta) v_2^{1-\frac{1}{\sigma}}, \tag{37}$$

y λ el grado de homogeneidad de la función de producción. Según el teorema de Euler, puede escribirse:

$$\lambda\, x = v_1 \frac{d\,f}{d\,v_1} + v_2 \frac{d\,f}{d\,v_2}, \tag{38}$$

pero teniendo en cuenta que

$$\frac{d\,f}{d\,v_1} = \frac{df}{dY} \cdot \frac{dY}{dv_1} = \frac{df}{dY} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right) \delta v_1^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\frac{df}{dv_2} = \frac{df}{dY} \cdot \frac{dY}{dv_2} = \frac{df}{dY} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right) (1 - \delta)\, v_2^{-\frac{1}{\sigma}},$$

la identidad (38) se convierte en

$$\lambda\, x = \left[\delta v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1 - \delta)\, v_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right] \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma}\right) \frac{df}{dY}.$$

Sustituyendo (36) y (37) en la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{df(Y)}{f(Y)} = \lambda \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) \frac{dY}{Y},$$

ecuación diferencial cuya solución es:

$$\log f(Y) = \lambda \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right) \log Y + \log \gamma,$$

o bien,

$$f(Y) = \gamma\, Y^{\lambda\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)},$$

donde γ es una constante positiva de integración. Por último, sustituyendo nuevamente Y y f(Y) por su valor, se obtiene la expresión:

$$x = \gamma \left[\delta v_1^{1-\frac{1}{\sigma}} + (1 - \delta)\, v_2^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]^{\lambda\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)}, \tag{39}$$

que corresponde a la forma analítica general de la función de producción con elasticidad de sustitución constante y rendimientos a escala, para el caso de dos factores de producción [60]. Esta función puede representarse también por

---

60 Otros métodos de obtención, aparte de los ya citados de Arrow, Chenery, Minhas y Solow, y Brown y De Cani, en Jacob PAROUSH: *A Note on the CES Production Function*, y *The H-Homogeneous Production Function with Constant Elasticity of Substitution: A Note*, en "Econometrica", enero, 1964, págs. 213-214, y enero, 1966, págs. 225-227, respectivamente; C. E. FERGUSON: *Substitution, Tech-*

$$x = \gamma \left[\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}}, \tag{40}$$

sin más que hacer la sustitución

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho}. \tag{41}$$

3.4. *Propiedades de la función de producción CES*[61].

La función de producción representada por (39) ó (40) se denomina habitualmente la función de producción CES, y comprende todos los casos de rendimientos a escala y elasticidad de sustitución constante. Por consiguiente, las funciones de producción de Cobb-Douglas y Harrod-Domar-Leontief son casos especiales de la misma, por cuanto implican, como es sabido, una elasticidad de sustitución constante e igual a uno y cero, respectivamente, mientras que en aquélla dicha elasticidad, aunque es igualmente constante, puede tomar cualquier valor.

En la función de producción representada por (40) figuran como parámetros γ, λ, ρ y δ. Estos se designan como parámetro de eficiencia, de homogeneidad, de sustitución y de distribución, respectivamente, y definen las condiciones técnicas en que se desarrolla el proceso productivo. Una variación de γ origina la misma variación proporcional en la cantidad de producto, con independencia de las cantidades empleadas de los factores. De ahí su denominación de parámetro de eficiencia o de escala.

Los rendimientos a escala se representan por el parámetro de homogeneidad. Si $\lambda > 1$, el proceso productivo se efectúa con rendimientos crecientes o economías internas de escala, de modo que un incremento proporcional en las cantidades aplicadas de los factores ocasiona un incremento proporcionalmente mayor en la cantidad de producto. Lo contrario sucede cuando $\lambda < 1$, en cuyo caso se presentan los rendimientos decre-

---

nical Progress, and Returns to Scale, en "American Economic Review", mayo, 1965, página 298, nota 4; T. YASUI: *The CES Production Function: A Note*, en "Econometrica", julio. 1965, págs. 646-648; Morton I. KAMIEN: *A Comment on Alternative Derivations of the Two Input Production Function with Constant Elasticity of Substitution*, en "Zeitschrift für Nationalönomie", abril, 1964, págs. 124-126; F. W. MCELROY: *Note on the CES Production Function*, en "Econometrica", enero, 1967, págs. 154-156, y C. S. Soper, art. cit., pág. 542.

[61] Véase también Murray BROWN: *On the Theory and Measurement of Technological Change*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966, capítulo IV, y Arrow, Chenery, Minhas y Solow, art. cit., págs. 230 y ss.

cientes o deseconomías internas de escala. Finalmente, si $\lambda = 1$, el producto varía en la misma proporción que los factores, y la función de producción es la propuesta por Arrow, Chenery, Minhas y Solow [62]. En consecuencia, ésta es homogénea de primer grado, o sea con rendimientos constantes a escala, y elasticidad de sustitución constante. Pero tanto las variaciones de λ, como las de γ, dejan invariable la relación marginal de sustitución, por lo que representan cambios tecnológicos neutrales, en el sentido de Hicks [63]. Son las variaciones de ρ y δ, como se demostrará más adelante, las que modifican la relación marginal de sustitución y, por consiguiente, las que implican cambios tecnológicos no neutrales.

En cuanto al parámetro de sustitución, el valor positivo de la elasticidad de sustitución exige que $\rho \geqslant -1$, puesto que para valores menores aquélla resulta negativa, según se desprende de (41). Pero además, si $0 < \rho < \infty$, entonces $0 < \sigma < 1$, mientras que $\sigma > 1$, si $-1 < \rho < 0$. Cuando $\rho \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 1$, y la respectiva función de producción es la de Cobb-Douglas. Esta puede obtenerse por métodos distintos; entre ellos, aplicando a (32) el procedimiento seguido para la obtención de (39), y asimismo hallando el límite de (40), cuando $\rho \rightarrow 0$. Según esto último, tomando logaritmos y aplicando la regla de L'Hôpital, resulta:

$$\log x = \log \gamma - \frac{\lambda}{\rho} \log \left[\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \right];$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \log x = \log \gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{-\lambda \dfrac{d}{d\rho} \left\{ \log \left[\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \right] \right\}}{\dfrac{d(\rho)}{d\rho}} \right\} =$$

$$= \log \gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\frac{\lambda \left[\delta v_1^{-\rho} \log v_1 + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \log v_2 \right]}{\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho}} \right] =$$

$$= \log \gamma + \lambda \left[\delta \log v_1 + (1 - \delta) \log v_2 \right],$$

de donde se obtiene, finalmente, la función de proaucción de Cobb-Douglas

[62] Art. cit., pág. 230.

[63] *The Theory of Wages*, págs. 121-122.

$$x = \gamma \left(v_1^{\delta}\, v_2^{1-\delta}\right)^{\lambda}.$$

Por tanto, los rendimientos a escala y la elasticidad de sustitución unitaria determinan la forma analítica de dicha función de producción. Haciendo la sustitución

$$\lambda = \alpha + \beta$$

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

donde α y β representan las elasticidades parciales del producto respecto a los factores V_1 y V_2 de producción, la función anterior se convierte en la forma más conocida

$$x = \gamma\, v_1^{\alpha}\, v_2^{\beta}, \tag{42}$$

en la que los rendimientos a escala son crecientes, constantes o decrecientes, según sea $\alpha + \beta \gtreqless 1$.

Si $\rho = -1$, la elasticidad de sustitución alcanza el valor máximo $\sigma = \infty$. La respectiva función de producción se obtiene directamente sustituyendo $\rho = -1$ en (40), y es de la forma

$$x = \gamma \left[\delta\, v_1 + (1 - \delta) v_2\right]^{\lambda}, \tag{43}$$

o sea con rendimientos a escala y perfecta sustituibilidad de los factores. La relación marginal de sustitución es constante y las isocuantas se convierten en rectas decrecientes, según se ha demostrado anteriormente.

El caso de Leontief corresponde al valor de $\rho = \infty$, para el cual $\sigma = 0$. Las condiciones técnicas de la producción implican la aplicación de los factores en proporción constante, y no existe ninguna posibilidad de sustitución. Por tanto, si v_1' y v_2' son los coeficientes de producción técnicamente determinados, las isocuantas adoptan la forma de un ángulo recto en el punto correspondiente a dicha combinación, y la función de producción se representa analíticamente por la forma mínima:

$$x = \operatorname{Min}\left[\frac{v_1}{v_1'}, \frac{v_2}{v_2'}\right],$$

que designa al menor de los números que figuran entre corchetes.

Por último, si $\rho = 1, \sigma = {}^1/_2$. La función de producción se puede escribir en este caso particular de la forma

$$\left[v_1 - \delta \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] \cdot \left[v_2 - (1 - \delta) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] = \delta (1 - \delta) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

que muestra claramente que las respectivas isocuantas son hipérbolas equiláteras, con asíntotas

$$v_1 = \delta \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$v_2 = (1 - \delta) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

paralelas al eje de ordenadas y al de abscisas, respectivamente[64].

El análisis de la función de producción CES muestra igualmente que el comportamiento de las productividades de los factores de producción depende de la elasticidad de sustitución. Este aspecto es de gran importancia en la teoría del crecimiento económico, ya que, como es sabido, una de las características esenciales de los países subdesarrollados es la escasez relativa de capital frente a la mano de obra. De aquí que las posibilidades de incrementar el producto aplicando a un factor constante cantidades crecientes del otro dependan de la facilidad de sustitución de éstos[65].

En efecto, si $\sigma > 1$, o sea si $-1 < \rho < 0$, de (39) o (40) se obtienen los límites siguientes:

$$\lim_{v_1 \to 0} x = \lim_{v_1 \to 0} \gamma \left[\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} = \gamma (1 - \delta)^{-\frac{\lambda}{\rho}} v_2^{\lambda}$$

$$\lim_{v_1 \to \infty} x = \lim_{v_1 \to \infty} \gamma \left[\delta v_1^{-\rho} + (1 - \delta) v_2^{-\rho} \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} = \infty,$$

y, en cambio, si $0 < \sigma < 1$, o sea si $\rho > 0$, estos límites son:

---

[64] Una representación gráfica de las isocuantas, para distintos valores de los parámetros de la función de producción CES, puede verse en Ernst Helmstädter, art. cit., págs. 179 y ss., y Wilhelm SCHEPER: *Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten*, en "Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", enero, 1965, págs. 7-8.

[65] Sobre este aspecto véase, por ejemplo, André BABEAU: *Elasticité de Substitution. Répartition et Croissance*, en "Revue Economique", noviembre, 1964, páginas 961-984.

$$\lim_{v_1 \to 0} x = \lim_{v_1 \to 0} \frac{\gamma}{\left[\frac{\delta}{v_1^{\rho}} + (1-\delta)\, v_2^{-\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\rho}}} = 0$$

$$\lim_{v_1 \to \infty} x = \lim_{v_1 \to \infty} \frac{\gamma}{\left[\frac{\delta}{v_1^{\rho}} + (1-\delta)\, v_2^{-\rho}\right]^{\frac{\lambda}{\rho}}} = \gamma (1-\delta)^{-\frac{\lambda}{\rho}}\, v_2^{\lambda}$$

obteniéndose análogos resultados cuando v_2 tiende a cero o infinito y v_1 permanece constante.

De aquí se sigue que si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad, el producto aumenta ilimitadamente a partir de un valor finito y positivo, empleando mayor cantidad de uno solo de los factores. Estos son buenos sustitutivos entre sí, de forma que el factor constante es fácilmente sustituido por el variable, y el producto puede obtenerse con uno sólo de ellos, puesto que técnicamente son semejantes. Si, por el contrario, $\sigma < 1$, la producción es imposible sin la aplicación de ambos factores, y la invariabilidad de uno de ellos impone un límite superior al crecimiento del producto, que no puede superarse debido a la mala sustituibilidad de éstos. Por otra parte, el aumento más o menos que proporcional del producto viene determinado en ambos casos, según se demostrará más adelante, por los rendimientos a escala.

Las productividades media y marginal resultan también afectadas por el valor constante de la elasticidad de sustitución. Para el factor V_1, por ejemplo, la productividad media es:

$$\frac{x}{v_1} = \gamma \left[\delta\, v_1^{\frac{\rho(1-\lambda)}{\lambda}} + (1-\delta)\, v_1^{\frac{\rho}{\lambda}}\, v_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\lambda}{\rho}}, \qquad (44)$$

que puede representarse igualmente por las funciones siguientes:

$$\frac{x}{v_1} = \gamma\, v_1^{\lambda-1}\left[\delta + (1-\delta)\, v_1^{\rho}\, v_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} \qquad (45)$$

$$\frac{x}{v_1} = \gamma\, v_1^{-1}\, v_2^{\lambda}\left[\delta\, v_1^{-\rho}\, v_2^{\rho} + (1-\delta)\right]^{-\frac{\lambda}{\rho}}. \qquad (46)$$

Si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad, se obtiene de (46), cualquiera que sea el parámetro de homogeneidad:

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to 0} \gamma v_2^{\lambda} \cdot \frac{1}{v_1} \left[\delta v_1^{-\rho} v_2^{\rho} + (1 - \delta) \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} = \infty,$$

y cuando $\lambda > 1$, se sigue de (45):

$$\lim_{v_1 \to \infty} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to \infty} \gamma v_1^{\lambda - 1} \left[\delta + (1 - \delta) \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-\rho} \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} = \infty$$

y si $0 < \lambda < 1$, se deduce también de la citada expresión:

$$\lim_{v_1 \to \infty} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to \infty} \gamma v_1^{\lambda - 1} \left[\delta + (1 - \delta) \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-\rho} \right]^{-\frac{\lambda}{\rho}} = 0 .$$

En segundo lugar, sea $\sigma < 1$. Si $\lambda > 1$, se obtiene de (45):

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to 0} \frac{\gamma v_1^{\lambda - 1}}{\left[\delta + (1 - \delta) v_1^{\rho} v_2^{-\rho} \right]^{\frac{\lambda}{\rho}}} = 0 ,$$

y si $0 < \lambda < 1$, se sigue igualmente de dicha expresión:

$$\lim_{v_1 \to 0} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to 0} \frac{\gamma}{v_1^{1 - \lambda} \left[\delta + (1 - \delta) v_1^{\rho} v_2^{-\rho} \right]^{\frac{\lambda}{\rho}}} = \infty$$

Por último, de acuerdo con (46) se obtiene, cualquiera que sea el valor del parámetro de homogeneidad:

$$\lim_{v_1 \to \infty} \frac{x}{v_1} = \lim_{v_1 \to \infty} \frac{\gamma v_2^{\lambda}}{v_1 \left[\delta \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\rho} - (1 - \delta) \right]^{\frac{\lambda}{\rho}}} = 0.$$

En consecuencia, si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad, las productividades medias tienden a más infinito, al tender a cero el respectivo factor; decrecen a medida que aumenta la cantidad empleada del mismo, y se anulan, si $\lambda < 1$, o alcanzan un valor mínimo y después crecen ilimitadamente, cuando el parámetro de homogeneidad es mayor que la unidad. Finalmente, si $\sigma < 1$ y $\lambda > 1$, las productividades medias son crecientes con las cantidades aplicadas del factor, desde un valor nulo, y después de alcanzar un valor máximo tienden nuevamente a anularse, al aumentar el factor ilimitadamente. Por tanto, únicamente cuando $\lambda < 1$, las productividades medias son decrecientes, desde más infinito hasta cero, cualquiera que sea el valor de la elasticidad de sustitución. De lo contrario, dichas productividades presentan un valor máximo, si $\sigma < 1$, y un mínimo, si $\sigma > 1$, según se demuestra seguidamente.

Para ello, de cualquiera de las expresiones (44) a (46) se deduce que

$$\frac{d\left(\frac{x}{v_1}\right)}{d\,v_1} = x^{\left(\frac{\rho+\lambda}{\lambda}\right)} v_1^{-2}\left[\delta(\lambda-1)\,v_1^{-\rho} - (1-\delta)\,v_2^{-\rho}\right],$$

derivada que resulta negativa cuando $\lambda \leqslant 1$, lo que viene a demostrar el continuo decrecimiento de la productividad media. Si $\lambda > 1$, esta derivada será positiva o negativa, según sea

$$\delta(\lambda-1)\,v_1^{-\rho} - (1-\delta)\,v_2^{-\rho} \gtrless 0,$$

y cuando

$$\delta(\lambda-1)\,v_1^{-\rho} = (1-\delta)\,v_2^{-\rho},$$

la productividad media alcanza el valor estacionario positivo

$$\frac{x}{v_1} = \gamma\, v_2^{\lambda-1}\,(\delta)^{-\frac{1}{\rho}}\,(\lambda)^{-\frac{\lambda}{\rho}}\left(\frac{\lambda-1}{1-\delta}\right)^{\frac{\lambda-1}{\rho}}, \qquad (47)$$

en cuyo caso la derivada segunda de ésta se reduce a la expresión

$$\frac{d^2\left(\frac{x}{v_1}\right)}{d\,v_1^2} = x^{\left(\frac{\rho+\lambda}{\lambda}\right)} v_1^{-(\rho+3)}\left[\rho\,\delta\,(1-\lambda)\right].$$

y como se ha supuesto que $\lambda > 1$, el signo de la derivada anterior viene determinado por el del parámetro ρ. En consecuencia, el valor estacionario de la productividad media, representado por (47), corresponderá a un máximo, si la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, y a un mínimo si es mayor que ésta.

Por otra parte, se deduce también que, si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad,

$$\frac{x}{v_1} \rightarrow \gamma(\delta)^{-\frac{\lambda}{\rho}} v_1^{\lambda-1},$$

cuando $v_2 \rightarrow 0$, y cuando $v_2 \rightarrow \infty, \frac{x}{v_1} \rightarrow \infty$. Esto significa que por ser los factores buenos sustitutivos, aunque uno de ellos permanezca constante, su productividad media aumenta ilimitadamente con el otro factor. Incluso cuando este último tiende a cero, el límite al que tiende la productividad media del factor constante es finito y positivo.

En cambio, si la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, $\frac{x}{v_1} \rightarrow 0$, cuando $v_2 \rightarrow 0$, y cuando $v_2 \rightarrow \infty$, entonces

$$\frac{x}{v_1} \rightarrow \gamma(\delta)^{-\frac{\lambda}{\rho}} v_1^{\lambda-1}.$$

La producción es imposible en este caso sin la aplicación de ambos factores y, aunque la productividad media del que permanece constante aumenta al aumentar el factor variable, converge de forma monótona creciente hacia un límite finito y positivo, que la mala sustituibilidad impide sobrepasar.

Las conclusiones son similares cuando los rendimientos a escala son constantes. En este caso las productividades medias dependen de la proporción en que se combinan los factores, y la función (44) se simplifica notablemente, convirtiéndose en

$$\frac{x}{v_1} = \gamma\left[\delta + (1-\delta)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{48}$$

Las productividades medias disminuyen monótonamente, bien desde más infinito hasta alcanzar un valor finito y positivo, que en este caso es independiente de los factores, si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad, o bien desde este límite finito y positivo, que para el factor V_1 es $\frac{x}{v_1} = \gamma\,\delta^{-\frac{1}{\rho}}$, hasta anularse, si la elasticidad de sustitución es menor que la unidad. Por otra parte, cuando un factor crece ilimitadamente con respecto al otro, la productividad media del factor escaso aumenta ilimitadamente desde dicho valor finito y positivo, si $\sigma > 1$, o bien se anula para la primera dosis infinitesimal del factor y converge hacia el citado límite finito y positivo, si $\sigma < 1$.

En cuanto a las productividades marginales, siguen un comportamiento similar al de las productividades medias. Para el factor V_1 considerado, su productividad marginal puede representarse por

$$\frac{dx}{dv_1} = \gamma \lambda \delta v_1^{-(\rho+1)} v_2^{\lambda+\rho} \left[\delta \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\rho} + (1-\delta) \right]^{-\frac{\lambda+\rho}{\rho}} \qquad (49)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{dx}{dv_1} = \gamma \lambda \delta v_1^{\lambda-1} \left[\delta + (1-\delta) \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho} \right]^{-\frac{\lambda+\rho}{\rho}} \qquad (50)$$

Es evidente que las productividades marginales, aparte de ser homogéneas de prado $\lambda - 1$, son positivas, cualesquiera que sean los rendimientos a escala y el valor distinto de cero de la elasticidad de sustitución, lo que viene a demostrar que las productividades totales son siempre crecientes. Pero además, las productividades marginales tienden a los mismos límites que las productividades medias, según puede comprobarse fácilmente en las expresiones anteriores. Por tanto, si la elasticidad de sustitución es mayor que la unidad, $\frac{dx}{dv_1} \to \infty$, cuando $v_1 \to 0$, y cuando $v_1 \to \infty$, $\frac{dx}{dv_1} \to \infty$, si $\lambda > 1$, o $\frac{dx}{dv_1} \to 0$, si $\lambda < 1$. Cuando la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, $\frac{dx}{dv_1} \to 0$, si $\lambda > 1$, y $\frac{dx}{dv_1} \to \infty$, si $\lambda < 1$, cuando $v_1 \to 0$, y cuando $v_1 \to \infty$, $\frac{dx}{dv_1} \to 0$.

En resumen, si el parámetro de homogeneidad es menor que la unidad, la productividad marginal tiende a más infinito o cero, respectivamente, cuando la cantidad aplicada del factor tiende a cero o más infinito, independientemente del valor constante de la elasticidad de sustitución. En cambio, si los rendimientos a escala son crecientes, las productividades marginales presentan, lo mismo que las productividades medias, un mínimo o un máximo, según que la elasticidad de sustitución sea mayor o menor que la unidad, hecho éste que merece ser analizado con más detalle.

El decrecimiento de las productividades marginales requiere, como es sabido, que el signo de su derivada sea negativo. Ahora bien, para el factor V_1 resulta:

$$\frac{d^2x}{dv_1^2} = \lambda \delta \gamma^{-\frac{\rho}{\lambda}} v_1^{-(\rho+2)} x^{\frac{\rho}{\lambda}+1} \left[\frac{(\lambda-1) - (\rho+1)\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho}}{\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho} + 1} \right] \qquad (51)$$

derivada que tiene signo negativo, cualquiera que sea el valor no nulo de la elasticidad de sustitución, siempre que el parámetro de homogeneidad sea menor o igual que la unidad [66]. Esto significa que si los rendimientos a escala son constantes o decrecientes, las productividades marginal y media son decrecientes, mientras que la productividad total es creciente, pero menos que proporcionalmente. De aquí se sigue también que, únicamente en aquellos procesos productivos con fuertes economías de escala, las productividades marginal y media son crecientes, y, en el caso particular del factor V_1, cuando

$$\lambda > 1 + (\rho + 1)\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho}.$$

El valor extremo de la productividad marginal requiere asimismo que los rendimientos a escala sean crecientes, según se desprende de la condición necesaria:

$$\lambda = 1 + (\rho + 1)\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho},$$

que sustituída en (49) o (50) da lugar al valor estacionario y positivo

$$\frac{dx}{dv_1} = \gamma\lambda\delta^{-\frac{1}{\rho}}(\rho+1)^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\lambda+\rho)^{-\frac{\lambda+\rho}{\rho}}\left(\frac{\lambda-1}{1-\delta}\right)^{\frac{\lambda-1}{\rho}} v_2^{\lambda-1} \quad . \qquad (52)$$

La derivada segunda de la productividad marginal se reduce en este caso a

$$\frac{d^3x}{dv_1^3} = -\lambda\delta\gamma^{-\frac{\rho}{\lambda}} x^{\frac{\rho}{\lambda}+1} v_1^{-(\rho+3)}\left[\frac{\rho(\lambda-1)}{\sigma(\lambda+\rho)}\right],$$

cuyo signo viene determinado por el de ρ, puesto que $\lambda > 1$. Por ello, si la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, las productividades marginales se anulan para la primera dosis infinitesimal del medio, aumentan con la cantidad empleada de éste y, después de alcanzar el valor máximo representado por (52), decrecen hasta anularse nuevamente, para cantidades muy elevadas del factor.

Esto puede justificarse teóricamente por el hecho de que al permanecer uno de los factores constantes y ser éstos malos sustitutivos, los

[66] En el caso límite $\rho = -1$ y $\lambda = 1$, las productividades marginales son constantes, según puede comprobarse también en la respectiva función de producción (43).

rendimientos crecientes a escala únicamente consiguen incrementar la productividad marginal, al igual que ocurre con la productividad media, para las primeras dosis del respectivo factor, en relación con las cuales la cantidad constante del otro se encuentra en exceso, pero para dosis superiores a una determinada dichas productividades disminuyen ilimitadamente, como resultado de la dificultad que ofrece la sustitución del medio que permanece invariable. Sin embargo, los extraños efectos interactivos que origina la concurrencia de las fuertes economías internas de escala y la buena sustituibilidad de los factores es causa de que dichas productividades sean decrecientes al principio, presenten un mínimo y a continuación aumenten ilimitadamente, lo que constituye una severa infracción de la denominada ley de los rendimientos decrecientes.

La influencia de los parámetros de homogeneidad y sustitución se hace sentir también en la alteración ocasionada en la productividad marginal de un factor por la variación en la cantidad aplicada del otro. Según se desprende de (49) o (50), si la elasticidad de sustitución es menor que la unidad, la productividad marginal de V_1 se anula cuando lo hace el factor V_2, aumenta con la cantidad empleada de éste, pero no puede sobrepasar un límite determinado, cualquiera que sea el valor del parámetro de homogeneidad, por cuanto, si $v_2 \rightarrow \infty$,

$$\frac{dx}{dv_1} \rightarrow \gamma\, \lambda (\delta)^{-\frac{\lambda}{\rho}} (v_1)^{\lambda - 1} \; ; \tag{53}$$

límite que no coincide con el correspondiente a la productividad media, excepto si $\lambda = 1$.

En cambio, cuando los factores son buenos sustitutivos entre sí y el parámetro de homogeneidad es mayor que la unidad, la productividad marginal crece ilimitadamente, a partir del valor finito representado por (53). Esto mismo sucede cuando el parámetro de homogeneidad es menor que la unidad, pero se cumple que $|\lambda| > |\rho|$. De lo contrario, o sea si $|\lambda| < |\rho|$, el aumento en la cantidad de V_2 perjudica la aplicación del factor V_1, puesto que su productividad marginal tiende al límite señalado por (53), cuando v_2 se anula, disminuye continuamente y tiende a anularse, para cantidades muy elevadas de V_2. Finalmente, si $|\lambda| = |\rho|$, y siempre claro está para $\sigma > 1$, las productividades marginales no dependen más que del respectivo factor.

Si los rendimientos a escala son constantes, o sea si $\lambda = 1$ la función (49) o (50) se convierte en

$$\frac{dx}{dv_1} = \gamma\delta \left[\delta + (1-\delta)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho} \right]^{-\frac{\rho+1}{\rho}} .$$

En este caso las productividades marginales dependen de la proporción en que se combinan los factores. Las variaciones de éstos dan lugar a efectos análogos a los descritos para las productividades medias y tienden a idénticos límites, si bien, como es sabido, el decrecimiento de estas últimas implica que han de ser mayores que las productividades marginales.

Antes de finalizar este análisis sobre las propiedades de la función de producción CES, conviene hacer una breve referencia a la afirmación anterior de que las variaciones de los parámetros de distribución y sustitución implican cambios tecnológicos no neutrales en el sentido de Hicks, o sea que modifican la relación marginal de sustitución. En efecto, ésta viene dada por

$$R^1_2 = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho+1} ; \tag{54}$$

de donde se sigue que las variaciones de los parámetros de homogeneidad y de eficiencia o escala, aunque alteran la función de producción, no afectan a la relación marginal de sustitución, y de ahí su consideración de cambios tecnológicos neutrales. Los cambios tecnológicos no neutrales son ocasionados únicamente por las variaciones de los parámetros de distribución y sustitución [67].

En cuanto a la influencia de este último sobre la relación marginal de sustitución, se obtiene de (54) que

$$\frac{dR^1_2}{d\rho} = \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\rho+1} \log\left(\frac{v_1}{v_2}\right),$$

derivada que resulta positiva, nula o negativa, según que v_1 sea mayor, igual o menor que v_2. En consecuencia, si el proceso productivo emplea mayor cantidad de V_1 que de V_2, un aumento de la elasticidad de sustitución o, lo que es lo mismo, una disminución de este parámetro, da lugar a una disminución de la relación marginal de sustitución. Esto signi-

[67] Un análisis más detallado sobre este aspecto puede verse en Murray Brown, *op. cit.*, especialmente págs. 55-59.

fica que aumenta la productividad marginal de V_1 respecto a la de V_2, o bien que para el mismo valor de la relación marginal de sustitución es necesario emplear menor cantidad de este último factor por unidad del otro. Por el contrario, si la cantidad empleada de V_2 es mayor que la de V_1, al aumentar la elasticidad de sustitución aumenta también la relación marginal de sustitución, lo que se traduce en un aumento de la productividad marginal de V_2 respecto a la de V_1. Por tanto, un incremento de la elasticidad de sustitución implica un cambio tecnológico no neutral que es ahorrador de aquel factor que se aplica en menor cantidad [68].

Las variaciones del parámetro de distribución, denominado otras veces de intensidad de un factor, implican asimismo cambios tecnológicos no neutrales, que son ahorradores de uno u otro factor, según el sentido de la variación de dicho parámetro [69]. En efecto, derivando parcialmente la expresión (54) respecto a δ, resulta:

$$\frac{d R^{1}_{2}}{d \delta} = -\frac{1}{\delta^2} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\rho + 1},$$

derivada cuyo signo es siempre negativo. Por consiguiente, un incremento de este parámetro ocasiona un aumento de la productividad marginal de V_1 respecto a la de V_2, y una disminución del mismo da lugar a un aumento de la productividad marginal de V_2 respecto a la de V_1. De aquí que en el primer caso el cambio tecnológico sea ahorrador de V_2, y en el segundo de V_1.

3.5. *Generalización de las funciones de producción con elasticidades de sustitución constantes.*

Aunque la generalización de las funciones de producción con elasticidades de sustitución constantes es un tema que por su interés y complejidad merece ser objeto de un extenso análisis, el presente apartado no tiene otra finalidad que la de resumir en líneas generales las principales aportaciones que han tenido lugar en este sentido.

---

[68] Es evidente que si los factores se emplean en la misma cantidad, o si $\rho = -1$, la relación marginal de sustitución toma un valor constante.

[69] La denominación de este parámetro es imprecisa, en el sentido de que no es el único que determina la retribución de los factores ni su intensidad, salvo en casos particulares.

La generalización más simple de la función de producción CES se debe a Uzawa [70], y es de la forma

$$x = \gamma \left(a_1 v_1^{-\rho} + a_2 v_2^{-\rho} + \ldots + a_n v_n^{-\rho} \right)^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{55}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes positivas y la notación restante tiene el mismo significado que anteriormente. Esta función de producción es homogénea de primer grado y posee la propiedad de que todas las elasticidades de sustitución son constantes e idénticas para los diferentes pares de factores de producción, de modo que

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho} \, .$$

En su segunda formulación, Uzawa considera el conjunto de los n factores dividido en subconjuntos, y obtiene una función de producción muy compleja, cuya característica esencial radica en que las elasticidades parciales de sustitución de Allen entre aquellos pares de factores que pertenecen a subconjuntos distintos son iguales a la unidad. Sin embargo, si los factores pertenecen al mismo subconjunto, dichas elasticidades son también constantes e iguales entre sí, pero distintas de la unidad y, en general, diferentes de las relativas a aquellos pares de factores que pertenecen a otro subconjunto [71].

Mukerji [72], por su parte, propone la siguiente función de producción:

$$x = \gamma \left(a_1 v_1^{-\rho_1} + a_2 v_2^{-\rho_2} + \ldots - a_n v_n^{-\rho_n} \right)^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{56}$$

en la que las elasticidades de sustitución de Allen vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{(1 + \rho_i)(1 + \rho_j)} \quad (i \neq j = 1, 2, \ldots, n),$$

donde k es un factor variable de proporcionalidad. Por consiguiente, dichas elasticidades varían proporcionalmente, pero las relaciones entre dos cualesquiera de ellas son constantes, aunque no necesariamente iguales entre sí. Para que se verificase esta última igualdad sería necesario que $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n$, en cuyo caso la función (56) sería homogénea de grado ρ_i / ρ, y se reduciría a la (55) de Uzawa, si $\rho_i = \rho$.

---

[70] Hirofumi Uzawa, art. cit., en "Review of Economic Studies", págs. 291-299.

[71] Una variante asimétrica de esta función de Uzawa ha sido propuesta por Wilhelm Scheper, art. cit., págs. 17-22.

[72] Vatsala MUKERJI: *A Generalized SMAC Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1963, páginas 233-236.

Pero, como ha demostrado Gorman [73], la generalización de las funciones de producción con elasticidades parciales de sustitución de Allen proporcionales se cierra con las aportaciones de Uzawa y Mukerji. En efecto, dejando aparte la posible generalización en cuanto al grado de homogeneidad, o en cuanto a la introducción de los factores limitativos, la proporcionalidad de estas elasticidades de sustitución se verifica si, y solamente si, la función de producción es del tipo de Uzawa o Mukerji.

El supuesto de invariabilidad de la elasticidad de sustitución fue extendido por McFadden a las otras dos definiciones del concepto: la elasticidad-sombra y la elasticidad parcial directa de sustitución [74]. Pero las condiciones impuestas a los valores de estas elasticidades conducen a resultados fuertemente restrictivos y de escasa utilidad en las estimaciones empíricas. En la compleja formulación de McFadden, los valores de dichas elasticidades de sustitución son constantes e iguales a la unidad entre cualquier par de factores que pertenecen al mismo subconjunto, y es constante y común, aunque no unitario, si los factores pertenecen a subconjuntos distintos.

Por último, Sato ha propuesto más recientemente un nuevo tipo de función de producción generalizada, que es mucho más flexible que las anteriores y con las que coincide en determinados supuestos [75]. La función de producción de Sato consta de dos niveles; el primero se refiere a la agregación de los factores, y el segundo corresponde a la función global. Ambos niveles son de la forma CES, y las variables satisfacen la condición de separabilidad. Los valores de las elasticidades parciales directas de sustitución son constantes y positivas, aunque no iguales ni entre sí ni a la unidad, si los factores pertenecen al mismo subconjunto, pero dejan de ser constantes, si bien resultan positivas y diferente de la unidad, cuando los factores pertenecen a subconjuntos distintos. Pero además, la función de Sato da lugar a elasticidades parciales de sustitución de Allen constantes e iguales a la elasticidad entre los grupos, si los factores pertenecen a distintos subconjuntos, pero son variables e incluso negativas, cuando los factores pertenecen al mismo subconjunto.

---

73 W. M. GORMAN: *Production Functions in which the Elasticities of Substitution Stand in Fixed Proportion to each Other*, en "Review of Economic Studies", julio, 1965, págs. 217-224. Véase asimismo la puntualización a este autor de M. S. RAMANUJAM: *Production Functions in which the Elasticities of Substitution Stand in Fixed Proportion to each Other: A Comment*, en "Review of Economic Studies", octubre, 1967, pág. 432.

74 Daniel McFadden, art. cit., págs. 74 y ss.

75 K. Sato, art. cit., págs. 201-218.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists,* MacMillan and Co., Londres, 1938. Hay traducción castellana con el título *Análisis Matemático para Economistas,* Aguilar, S. A., Madrid, 1959.

ARROW, K., CHENERY, H. B., MINHAS, B. S., y SOLOW, R. M.: *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency,* en "Review of Economics and Statistics", agosto 1961, págs. 225-250.

BABEAU, A.: *L'élasticité de substitution entre facteurs,* en "Revue Economique", julio 1964. págs. 533-566.

— *Elasticité de substitution· Répartition et croissance,* en "Revue Economique", noviembre 1964, págs. 942-984.

BROWN, M.: *On the Theory and Measurement of Technological Change,* Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

— y DE CANI, J. S·: *Technological Change and the Distribution of Income,* en "International Economic Review", septiembre 1963, págs. 289-309.

CASTAÑEDA, J.: *Lecciones de Teoria Económica,* Aguilar, S. A., Madrid, 1968.

CHAMPERNOWNE, D. G.: *A Mathematical Note on Substitution,* en "Economic Journal", junio 1935, págs. 246-258.

CHANG, T. C.: *A Statistical Note on World Demand for Exports,* en "Review of Economics and Statistics", mayo 1948, págs. 106-116.

CHENG, H. S.: *Statistical Estimates of Elasticities and Propensities in International Trade: A Survey of Published Studies,* en "Staff Papers", abril 1959, págs. 107-158.

DERYCKE, P. H.: *Elasticité et Analyse Economique.* Editions Cujas, París, 1964.

DICKINSON, H· D.: *A Note on Dynamic Economics,* en "Review of Economic Studies", vol. 22, núm. 59, 1954-55, págs. 169-179.

FERGUSON, C. E.: *Substitution, Technical Progress, and Returns to Scale,* en "American Economic Review", Papers and Proceeding, mayo 1965, págs. 296-305.

FRIEDMAN, M.: *Further Notes on Elasticity of Substitution. I. Note on Dr. Machlup's Article,* en "Review of Economic Studies", febrero 1936, págs. 147-148.

FRISCH, R.: *Lois Techniques et Economiques de la Production,* Dunod, París, 1963. Hay traducción castellana con el título *Las Leyes Técnicas y Económicas de la Producción,* Sagitario, S. A., Barcelona, 1963.

GORMAN, W. M.: *Production Functions in which the Elasticities of Substitution*

Stand in Fixed Proportion to Each Other, en "Review of Economic Studies", julio 1965, págs. 217-224.

HELMSTADTER, E.: *Die Isoquanten gesamtwirtschaftlicher Produktionsfunktionen mit konstanter Substitutionselastizität*, en "Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", junio 1964, págs. 177-195.

HICKS, J. R.: *Théorie Mathématique de la Valeur en Régime de Libre Concurrence*, Hermann et Cie, París, 1937.

— *The Theory of Wages*, MacMillan and Co., Londres, 1932 (segunda edición en 1963).

— *Notes on Elasticity of Substitution*, IV. *A note on Mr. Kahn's Paper*, en "Review of Economic Studies", octubre 1933, págs. 78-80.

— y ALLEN, R. G. D.: *A Reconsideration of the Theory of Value*, en "Economica", febrero y mayo 1934, págs. 52-76 y 196-219, respectivamente.

JONES, R. W.: *Neutral Technological Change and the Isoquant Map*, en "American Economic Review", septiembre 1965, págs. 848-855.

KAHN, R. F.: *Notes on Elasticity of Substitution*, III. *The Elasticity of Substitution and the Relative Share of a Factor*, en "Review of Economic Studies", octubre 1933, págs. 72-78.

— *Notes on Elasticity of Substitution: Reply*, en "Review of Economic Studies", octubre 1933, pág. 80.

KAMIEN, M. I.: *A Comment on Alternative Derivations of the Two Input Production Function with Constant Elasticity of Substitution*, en "Zeitschrift für Nationalökonomie", abril 1964, págs. 124-126.

KUBINSKI, Z. M.: *The Elasticity of Substitution between Sources of British Imports, 1921-1938*, en "Yorkshire Bulletin of Economic and Social Research", enero 1950, págs. 17-29.

LAMY, R.: *Esquisse d'une analyse du phénomène de substitution*, en "Bulletin de l'Institut de Recherches Economiques et Sociales de l'Université de Louvain", septiembre 1948, págs. 107-181.

LERNER, A. P.: *The Economics of Control*, MacMillan and Co., Nueva York, 1944. Hay traducción castellana con el título *Teoría Económica del Control*. Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1951.

— *Notes on Elasticity of Substitution*, II. *The Diagrammatical Representation*, en "Review of Economic Studies", octubre 1933, págs. 68-71.

— *Notes on the Elasticity of Substitution*, en "Review of Economic Studies", febrero 1934, págs. 147-148.

— *Further Notes on Elasticity of Substitution*, III. *The Question of Symmetry*, en "Review of Economic Studies", febrero 1936, págs. 150-151.

— *The Analysis of Demand*, en "American Economic Review", septiembre 1962, págs. 783-797.

MACHLUP, F.: *The Commonsense of the Elasticity of Substitution*, en "Review of Economic Studies", junio 1935, págs. 202-213.

— *Further Notes on Elasticity of Substitution.* IV. *Reply,* en "Review of Economic Studies", febrero 1936, págs. 151-152.

— *Elasticity Pessimism in International Trade,* en "Economia Internazionale", febrero 1950, págs. 118-137.

McELROY, F. W.: *Note on the CES Production Function,* en "Econometrica", enero 1967, págs. 154-156.

McFADDEN, D.: *Further Results on CES Production Functions,* en "Review of Economic Studies", junio 1963, págs. 73-83.

MEADE, J. E.: *A Neo-Classical Theory of Economic Growth,* George Allen and Unwin, Ltd., Londres, segunda edición, 1962.

MINHAS, B. S.: *The Homohypallagic Production Function, Factor-Intensity Reversals, and the Heckscher-Ohlin Theorem,* en "Journal of Political Economy", abril 1962, págs. 138-156.

MORGAN, J. N.: *Consumer Substitution between Butter and Margarine,* en "Econometrica", enero 1951, págs. 18-39.

MORRISSETT, I.: *Some Recent Uses of Elasticity of Substitution: A Survey,* en "Econometrica", enero 1953, págs. 41-62.

MUKERJI, V.: *A Generalized SMAC Function with Constant Ratios of Elasticity of Substitution,* en "Review of Economic Studies", octubre 1963, págs. 233-236.

NICHOLSON, R. J.: *Product-Elasticities of Substitution in International Trade,* en "Economic Journal", septiembre 1955, págs. 441-446.

PAROUSH, J.: *A Note on the CES Production Function,* en "Econometrica", enero 1964, págs. 213-214.

— *The H-Homogeneous Production Function with Constant Elasticity of Substitution: A Note,* en "Econometrica", enero 1966, págs. 225-227.

PEARCE, I. F.: *A Contribution to Demand Analysis,* Clarendon Press, Oxford, 1964.

PIGOU, A. C.: *The Elasticity of Substitution,* en "Economic Journal", junio 1934, págs. 232-241.

PITCHFORD, J. D.: *Growth and the Elasticity of Factor Substitution,* en "Economic Record", diciembre 1960, págs. 491-504.

RAMANUJAM, M. S.: *Production Functions in which the Elasticities of Substitution Stand in Fixed Proportion to Each Other: A Comment,* en "Review of Economic Studies", octubre 1967, pág. 432.

ROBINSON, J.: *The Economics of Imperfect Competition,* MacMillan and Co., Londres, 1933. Hay traducción castellana con el título *La Economía de la Competencia Imperfecta,* Aguilar, S. A., Madrid, 1946.

— *Further Notes on Elasticity of Substitution,* II. *Dr. Machlup's Commonsense of the Elasticity of Substitution,* en "Review of Economic Studies", febrero 1936, págs. 148-150.

SAMUELSON, P. A.: *Foundations of Economic Analysis,* Harvard University Press, Cambridge, 1947. Hay traducción castellana con el título *Fundamentos del Análisis Económico,* El Ateneo, Buenos Aires, 1957.

SATO, K.: *A Two-Level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function,* en "Review of Economic Studies", abril 1967, págs. 201-218.

SCHEPER, W.: *Produktionsfunktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten,* en "Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik", enero 1965, págs. 1-21.

SCHUMPETER, J. A.: *History of Economic Analysis,* quinta edición en George Allen and Unwin, Ltd., Londres, 1963.

SHEPHARD, R. W.: *Cost and Production Functions,* Princeton University Press, Princeton, 1953.

SOLOW, R. M.: *A Contribution to the Theory of Economic Growth,* en "Quarterly Journal of Economics", febrero 1956, págs. 65-94.

SOPER, C. S.: *The Elasticity of Substitution,* en "Economic Record", diciembre 1965, págs. 539-548.

TARSHIS, L.: *Notes on the Elasticity of Substitution,* en "Review of Economic Studies", febrero 1934, págs. 144-147.

TINBERGEN, J.: *Some Measurements of Elasticity of Substitution,* en "Review of Economics and Statistics", agosto 1946, págs. 109-116.

— y BOS, H. C.: *Mathematical Models of Economic Growth,* McGraw-Hill Book Company, Londres 1962. Hay traducción española con el título *Modelos Matemáticos del Crecimiento Económico,* Aguilar, S. A., Madrid, 1966.

TORRE DE MIGUEL, J. M. de la: *La elasticidad de sustitución y las curvas de transformación,* en "De Economía", septiembre-octubre 1959, págs. 853-886.

UZAWA, H.: *The Analysis of Demand. Mathematical Appendix,* en "American Economic Review", septiembre 1962, págs. 797-801.

-- *Production Functions with Constant Elasticities of Substitution,* en "Review of Economic Studies", octubre 1962, págs. 291-299.

WHITAKER, J. K.: *A Note on the CES Production Function,* en "Review of Economic Studies", abril 1964, págs. 166-167.

YASUI, T.: *The CES Production Function: A Note,* en "Econometrica", julio 1965, págs. 646-648.