

Modelos de selección de carteras de valores bursátiles, con aplicaciones a las bolsas españolas (*)

CARLOS ROMERO

Profesor Adjunto de Economía de la Empresa de la E.T.S. de Ingenieros Agrónomos de la Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Los rendimientos de los valores bursátiles son variables aleatorias. Estas variables aleatorias se pueden caracterizar por su esperanza y por su varianza. Un inversor que actúe con racionalidad, preferirá aquellos valores que tengan una esperanza de rendimiento más alta y una varianza más baja. La varianza de los rendimientos de un valor bursátil es una especie de índice que mide el riesgo de ese valor. Cuanto más grande sea la varianza, los rendimientos del valor estarán más dispersos, por lo que el riesgo será más grande.

Una cartera de valores bursátiles puede representarse por medio de un vector fila de n elementos $[X_1, \dots, X_j, \dots, X_n]$. El elemento genérico X_j representa el porcentaje de participación del j -ésimo va-

lor en la cartera. Por supuesto, se deberá verificar que $\sum_{j=1}^n X_j = 1$.

Si alguno de los elementos del vector anterior es cero, el correspondiente valor bursátil no entrará a formar parte de la cartera.

En 1952, Harry Markowitz (10) estableció la base de los modernos métodos de selección de carteras de valores bursátiles. Markowitz define una cartera de valores *eficiente* como aquella que es de varianza mínima para una esperanza de rendimiento dada, o de esperanza máxima para una varianza del rendimiento dada. El problema

(*) En este artículo se recogen las explicaciones del autor en el II Curso de Financiación de Empresas de la Universidad Politécnica de Madrid, dirigido por el profesor Enrique Ballesteros.

de la selección de carteras de valores consiste en generar el conjunto de las posibles carteras eficientes.

Los objetivos que se persiguen en el presente artículo son:

1.º Establecer una revisión de los principales modelos de selección de carteras de valores bursátiles. En el § 3 se desarrolla el modelo de Markowitz, en el § 4 el modelo de Farrar y en el § 5 se comentan algunos modelos aproximados. Asimismo, en el § 5 se enfoca la selección de una cartera de valores bursátiles como un problema de teoría en juegos.

2.º Aplicar a un caso concreto alguno de los modelos anteriores. En el § 6 se selecciona una cartera entre cuatro valores bursátiles. Los valores bursátiles elegidos son: Banco de Santander, Banco de Vizcaya, Telefónica e Ibeduero, todos ellos cotizados en la Bolsa de Madrid.

2. NOTACION Y CALCULO DEL RENDIMIENTO DE UN VALOR

A lo largo de este trabajo se utilizará la siguiente notación:

C'_{jt} = Cotización del j-ésimo valor al principio (i) del período t.

C''_{jt} = Cotización del j-ésimo valor al final (f) del período t.

D_{jt} = Dividendo producido por el j-ésimo valor en el período t.

V_j = Valor nominal del j-ésimo valor.

P_{jt} = Porcentaje de ampliación de capital *a la par* del j-ésimo valor en el período t.

Q_{jt} = Porcentaje de ampliación de capital *con cargo a reservas* del j-ésimo valor en el período t.

S_{jt} = Porcentaje de ampliación de capital *con prima* del j-ésimo valor en el período t.

π_{jt} = Prima de emisión correspondiente a la ampliación de capital del j-ésimo valor en el período t.

R_{jt} = Rendimiento del j-ésimo valor en el período t.

$E(R_j)$ = Esperanza de los rendimientos del j-ésimo valor.

σ_{jj} = Varianza de los rendimientos del j-ésimo valor.

σ_{ij} = Covarianza entre los rendimientos del j -ésimo y del i -ésimo valor.

X_j = Porcentaje de participación del j -ésimo valor en el total de la cartera.

E_T = Esperanza del rendimiento de la cartera.

V_T = Varianza del rendimiento de la cartera.

El rendimiento del j -ésimo valor en el período t puede calcularse por medio de la siguiente fórmula:

$$R_{jt} = \frac{(C'_{jt} - C^i_{jt}) + D_{jt} + (C'_{jt} - V_j) P_{jt} + C^i_{jt} Q_{jt} + \frac{(C'_{jt} - V_j - \pi_{jt}) S_{jt}}{C^i_{jt}}}{C^i_{jt}} \quad [1]$$

El primer sumando del numerador de [1] representa el rendimiento del j -ésimo valor en el período t debido a las plusvalías experimentadas por dicho valor. El segundo sumando representa el rendimiento debido a los dividendos recibidos por dicho valor. Los tres últimos sumandos representan los rendimientos debidos a las ampliaciones de capital (a la par, con cargo a reservas y con prima).

3. MODELO DE MARKOWITZ

Supongamos que un analista de valores nos hace una predicción sobre el futuro de los rendimientos de los n valores que en principio consideramos aconsejable formen parte de nuestra cartera. Esta predicción se concreta en: las esperanzas y las varianzas de los rendimientos de los n valores, así como las covarianzas correspondientes a dichos valores.

El analista puede obtener estos datos a partir de series históricas, o bien estimarlos subjetivamente. El método de las series históricas es bueno siempre que la serie sea suficientemente amplia y no se espere que en el futuro se produzcan cambios bruscos en el mercado de capitales. Ahora bien, si se esperan fuertes cambios en el mercado de capitales, las predicciones subjetivas del analista pue-

den ser preferibles a las predicciones obtenidas a partir de series históricas. En todo caso, la predicción definitiva puede obtenerse combinando la información objetiva procedente de las series históricas con la información subjetiva del analista.

Conocidas las esperanzas, varianzas y covarianzas de los rendimientos de los diferentes valores, se reduce a un sencillo problema estadístico calcular la esperanza y la varianza del total de la cartera. Según se sabe:

$$E_T = \sum_{j=1}^n E(R_j) X_j \quad [2]$$

$$V_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j \quad [3]$$

Una posible forma de generar carteras eficientes en el sentido de Markowitz es hallar las carteras de varianzas mínimas para diferentes valores del rendimiento medio. Es decir, hacer mínima la expresión [3] para un valor dado de la expresión [2]. El problema, en términos de programación matemática, puede plantearse de la siguiente forma:

Función objetivo

$$\text{Min } V_T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_j \quad [4]$$

Restricciones

$$\sum_{j=1}^n E(R_j) X_j = E^* \quad [5]$$

$$\sum_{j=1}^n X_j = 1 \quad [6]$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2 \dots n \quad [7]$$

La restricción [6] significa que toda la cartera debe invertirse. La restricción [7] significa que la participación de cualquier valor en la cartera no puede ser negativa.

Como la función objetivo [4] es de tipo cuadrático y el conjunto de restricciones [5] a [7] es lineal, el problema de generar carteras eficientes se transforma en un problema de programación cuadrática paramétrica. Para cada valor que demos al parámetro E^* obtendremos una cartera, que es eficiente por ser la de varianza más pequeña para el valor de E^* dado. Por tanto, para generar el conjunto de todas las carteras eficientes bastará con que el parámetro E^* tome todos los valores correspondientes a su campo de variación, resolviendo las correspondientes programaciones cuadráticas.

La operatividad de este procedimiento es escasa, dado que la aplicación de los algoritmos de la programación cuadrática constituye siempre una tarea muy laboriosa. El lector interesado en los algoritmos de la programación cuadrática puede consultar los trabajos (2, 10, 14), especialmente el (14).

Por lo general, el método de resolución seguido es el de los máximos y mínimos condicionados de Lagrange. La función de Lagrange para el problema anteriormente planteado, sin tener en cuenta las restricciones de no negatividad, es:

$$\begin{aligned} \text{Min } \varnothing = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j + \\ & + \mu_1 \left[\sum_{j=1}^n E(R_j) X_j - E^* \right] + \mu_2 \left[\sum_{j=1}^n X_j - 1 \right] \quad [8] \end{aligned}$$

Premultiplicando [11] por la matriz A^{-1} se obtiene:

$$X = A^{-1}B \quad [12]$$

La ecuación [12] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes. Para cada valor de E^* , penúltimo elemento del vector B , obtendremos un vector X , cuyos n primeros elementos nos dan la composición de una cartera eficiente.

Este algoritmo presenta el inconveniente de que, para ciertos valores del parámetro E^* , algunos elementos del vector de soluciones X son números negativos. Es decir, no se cumple la restricción [7], por lo que los porcentajes de participación de algunos valores en la cartera pueden ser números negativos. A continuación explicaremos una posible forma de adaptar el algoritmo para conseguir que el vector X esté formado siempre por números positivos.

El procedimiento consiste, en esencia, en ir dando valores crecientes al parámetro E^* hasta que para un cierto $E^* = E_0^*$ el porcentaje de participación de un valor en la cartera se haga nulo. Supongamos que se trata del s -ésimo valor. Entonces eliminaremos la fila y la columna s en la matriz A , y el elemento s en los vectores X y B . Sean A , X y B las matrices reducidas. La nueva ecuación matricial que permite generar carteras eficientes será, por tanto:

$$X = A^{-1}B \quad [13]$$

A partir de la ecuación [13], dando valores a E^* superiores a E_0^* , seguimos generando carteras eficientes en las que el porcentaje de participación del s -ésimo valor es nulo. Aplicando reiteradamente este procedimiento, iremos obteniendo carteras eficientes en las que el porcentaje de participación de cualquier valor en ella es positivo o nulo. Hemos desarrollado en el § 6 un caso práctico en el que se aplica este método. Por otra parte, un método gráfico de generar carteras eficientes con coeficientes de participación positivos puede consultarse en (8).

4. MODELO DE FARRAR

Donald E. Farrar presentó en el año 1962 un método de generar carteras eficientes que difiere conceptualmente del desarrollado en el § 3. Vamos a explicar este método sin profundizar demasiado en

sus aspectos teóricos, centrándonos fundamentalmente en su vertiente operativa.

Farrar se plantea el problema de determinar la función de utilidad del inversor. Para establecer la forma de dicha función, parte de las siguientes hipótesis:

Hipótesis H₁: La función de utilidad del inversor es creciente y cóncava hacia el eje de abscisas. Esta hipótesis respeta simplemente el principio clásico de las utilidades marginales decrecientes.

Hipótesis H₂: La función de utilidad del inversor es, al menos, diferenciable dos veces en las proximidades de su media.

Según la *hipótesis H₂*, la función de utilidad del inversor se puede desarrollar en serie de Taylor alrededor de su valor medio. Efectuando el desarrollo, eliminando los términos de grado superior a dos y tomando esperanzas se obtiene, como aproximación cuadrática de la función de utilidad:

$$E(u) = E_T - \alpha V_T \quad [14]$$

siendo

$$\alpha = - \frac{u''(E_T)}{2}$$

Según la *hipótesis H₁*:

$$u''(E_T) \leq 0$$

Por lo que α es siempre positivo. Esto es lógico, ya que α es una especie de indicador de la aversión al riesgo por parte del inversor.

Una vez determinada la función de utilidad dada por [14], Farrar supone que el inversor desea hacerla máxima. Es decir, el objetivo del inversor es maximizar su utilidad. Por tanto, en este modelo la función objetivo será:

$$\text{Max } Z = E_T - \alpha V_T \quad [15]$$

Ahora bien, maximizar [15] es lo mismo que

$$\text{Max } Z = \beta E_T - V_T \quad [16]$$

siendo

$$\beta = \frac{1}{\alpha}$$

Según esto, el problema de generar carteras eficientes puede plantearse en términos de programación matemática. La función objetivo se obtiene sustituyendo, en [15], E_T y V_T por [2] y [3]. Las restricciones serán las mismas que las [6] y [7] del modelo de Markowitz. Por tanto, tenemos:

Función objetivo

$$\text{Max } Z = \beta \sum_{j=1}^n E(R_j) X_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j \quad [17]$$

Restricciones

$$\sum_{j=1}^n X_j = 1 \quad [18]$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2 \dots n$$

Como la función objetivo [17] es de tipo cuadrático y el conjunto de restricciones [18] - [19] es lineal, el problema de generar carteras eficientes se ha transformado, al igual que en el § 3, en un problema de programación cuadrática paramétrica. Pero el parámetro no figura aquí como término independiente en las restricciones, sino como coeficiente en la función objetivo.

De modo análogo que en el § 3, para hacer operativo el modelo, recurrimos al método de los máximos y mínimos condicionados de Lagrange. La función de Lagrange para el problema anteriormente planteado, sin tener en cuenta las restricciones de no negatividad, es:

$$\begin{aligned} \text{Max } \emptyset = \beta \sum_{j=1}^n E(R_j) X_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} X_i X_j + \\ + \mu \left[\sum_{j=1}^n X_j - 1 \right] \end{aligned} \quad [20]$$

Derivando la expresión [20] con relación a X_j ($j = 1, 2 \dots n$) y a μ , obtenemos el siguiente sistema de $n + 1$ ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \emptyset}{\delta X_1} &= \beta E(R_1) - 2\sigma_{11} X_1 - 2\sigma_{12} X_2 \dots 2\sigma_{1n} X_n - \mu = 0 \\ \frac{\delta \emptyset}{\delta X_2} &= \beta E(R_2) - 2\sigma_{21} X_1 - 2\sigma_{22} X_2 \dots 2\sigma_{2n} X_n - \mu = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\delta \emptyset}{\delta X_n} &= \beta E(R_n) - 2\sigma_{n1} X_1 - 2\sigma_{n2} X_2 \dots 2\sigma_{nn} X_n - \mu = 0 \\ X_1 + X_2 \dots \dots \dots X_n &= 1 \end{aligned} \quad [21]$$

El anterior sistema de ecuaciones puede expresarse, matricialmente, de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1/2 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1/2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1/2 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta E(R_1) \\ \beta E(R_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta E(R_n) \\ 1 \end{vmatrix} \quad [22]$$

El sistema de ecuaciones en forma matricial [22] puede expresarse, abreviadamente, de la siguiente forma:

$$C \cdot X = D \quad [23]$$

Donde C es la matriz de los coeficientes; X, el vector columna de las incógnitas, y D, el vector columna de los términos independientes.

Premultiplicando [23] por la matriz inversa C^{-1} se obtiene:

$$X = C^{-1} \cdot D \quad [24]$$

La ecuación [24] permite generar el conjunto de carteras eficientes. Para cada valor de β (inversa del coeficiente de aversión al riesgo) obtendremos un vector X , cuyos n primeros elementos nos dan la composición de una cartera eficiente.

Al igual que ocurría con el algoritmo desarrollado en el § 3, algunos elementos del vector de soluciones X serán números negativos, para ciertos valores del parámetro β . Este inconveniente puede resolverse de la misma manera que en el § 3; o sea, dando valores crecientes al parámetro β hasta que para un cierto $\beta = \beta_0$ el porcentaje de participación de un valor en la cartera se haga nulo. Si se trata del s -ésimo valor, eliminaremos la fila y la columna s en la matriz C y el elemento s en los vectores X y D . El método continúa como en el § 3. Hemos desarrollado en el § 6 un caso práctico para la aplicación de este método.

La diferencia fundamental entre el modelo de Markowitz y el modelo de Farrar es de tipo conceptual. Desde un punto de vista estrictamente operativo, la única diferencia que existe entre ambos modelos es que en el de Markowitz se genera el conjunto de carteras eficientes, dando valores sucesivos a la esperanza de rendimiento de la cartera, y en el de Farrar, dando valores sucesivos al coeficiente de aversión al riesgo por parte del inversor.

5. OTROS METODOS DE SELECCION DE CARTERAS

Aunque los únicos modelos que permiten generar carteras eficientes son los desarrollados en los § 3 y 4, existen otros métodos que de una forma más simplificada generan conjuntos de carteras *cuasieeficientes*, entendiendo por carteras *cuasieeficientes* aquellas que, sin ser eficientes, se encuentran muy próximas a la frontera delimitada por las carteras eficientes. Estos métodos sacrifican precisión a cambio de simplificar considerablemente los cálculos.

Entre los modelos de este tipo, el que ha alcanzado mayor popularidad es el modelo diagonal de Sharpe (12). La principal característica de este modelo consiste en suponer que los rendimientos de

los valores bursátiles están correlacionados con un cierto índice I . Este índice puede ser el producto nacional bruto, algún índice de precios o algún otro factor que influya significativamente en los rendimientos de los valores. Así, pues, considera la recta de regresión de los rendimientos de cada valor bursátil con respecto al índice I . A continuación calcula $E(R_j)$, σ_{jj} y σ_{ji} sobre la recta de regresión anteriormente definida. La ventaja fundamental de este método es que se obtiene una matriz de varianzas y covarianzas (matriz A en el modelo de Markowitz y matriz C en el de Farrar) diagonal, lo que simplifica extraordinariamente los cálculos, ya que:

1.º No es necesario efectuar el cálculo de las covarianzas entre los rendimientos de los diferentes valores.

2.º Al ser la matriz de varianzas y covarianzas diagonal, se requieren muchas menos operaciones para invertirla.

Sharpe comprobó que un ordenador IBM modelo 7090 necesitaba, aproximadamente, treinta y tres minutos para seleccionar un conjunto de carteras eficientes entre 100 valores bursátiles. El mismo problema fue resuelto en treinta segundos empleando el modelo diagonal. Por otra parte, la capacidad de memoria de un ordenador IBM modelo 7090 permite, por un modelo no diagonal, seleccionar carteras entre 249 valores bursátiles, como máximo. Con el mismo tipo de ordenador, el modelo diagonal permite seleccionar carteras entre 2.000 valores bursátiles, como máximo.

Pese a las claras ventajas de tipo operativo que presenta el modelo diagonal, no creemos que sea de mucha aplicación en un mercado bursátil como el español. La razón es sencilla. El número de valores que se cotizan en las bolsas españolas es pequeño en comparación con el número de valores que se cotizan en las bolsas de otros países en los que el modelo diagonal se ha popularizado. Al seleccionar una cartera formada por valores cotizados en bolsas españolas, el tiempo de procesamiento en ordenador no da lugar a un coste importante, por lo que el modelo diagonal pierde, para nosotros, parte de su interés práctico.

Otro modelo simplificado para seleccionar la cartera de valores de un fondo de inversión se debe también a Sharpe (13). En algunos países, el porcentaje de participación de cualquier valor en la cartera de un fondo no puede superar un tope legal máximo del $p\%$.

En estos casos, tanto al modelo de Markowitz como al de Farrar habrá que agregar la restricción adicional:

$$X_j \leq p \quad ; \quad j = 1, 2 \dots n \quad [25]$$

La nueva restricción [25] complica extraordinariamente los cálculos. El método de resolución de Lagrange ya no es posible, por lo que para generar el conjunto de carteras eficientes hay que recurrir a la programación cuadrática paramétrica. Sharpe, en (13), propone un método aproximado que da muy buenos resultados y es muy operativo, ya que con él se consigue reducir el problema a un caso de programación lineal.

Otro interesante modelo de selección de carteras de valores se debe a Eugene Fama (3). Fama, lo mismo que Mandelbrot (7) y otros autores, creen que las variables aleatorias que miden los rendimientos de los diferentes valores bursátiles de un mercado no siguen distribuciones de tipo normal. Esta cuestión es importante, ya que si los rendimientos de los valores bursátiles no siguen leyes de distribución de tipo normal, los modelos de Sharpe pierden validez. Una interesante generalización del modelo diagonal al caso en el que los rendimientos de los valores bursátiles sigan distribuciones probabilísticas de Pareto se puede consultar en (3).

* * *

La selección de una cartera de valores puede plantearse como un juego contra la naturaleza. Como se sabe, un juego contra la naturaleza viene definido por los siguientes elementos:

- a) Un centro decisor.
- b) Un conjunto de n puntos ($S_1 \dots S_j \dots S_n$) que representan las posibles acciones o estrategias a seguir por el centro decisor.
- c) Un conjunto de n puntos ($\theta_1 \dots \theta_i \dots \theta_m$) que representan los posibles estados o situaciones que la naturaleza puede presentar.

d) Un conjunto de $n \times m$ puntos ($R_{11} \dots R_{jt} \dots R_{nm}$) que representan los posibles resultados de juego, según cuales sean la estrategia que elija el centro decisor y el estado que presente la naturaleza.

Por tanto, un juego contra la naturaleza se puede representar por medio de una matriz que recibe el nombre de matriz de pagos o matriz del juego. La estructura de esta matriz es la siguiente:

ESTADO DE LA NATURALEZA

		θ_1	θ_2	\dots	θ_t	\dots	θ_m
CENTRO DECISOR ESTRATEGIAS	S_1	R_{11}	R_{12}	\dots	R_{1t}	\dots	R_{1m}
	S_2	R_{21}	R_{22}	\dots	R_{2t}	\dots	R_{2m}
		\cdot	\cdot		\cdot		\cdot
		\cdot	\cdot		\cdot		\cdot
	S_j	R_{j1}	R_{j2}	\dots	R_{jt}	\dots	R_{jm}
		\cdot	\cdot		\cdot		\cdot
	\cdot	\cdot		\cdot		\cdot	
S_n	R_{n1}	R_{n2}	\dots	R_{nt}	\dots	R_{nm}	

Las estrategias óptimas a seguir por el centro decisor pueden ser de dos tipos: puras y mixtas. Se dice que el centro decisor sigue una estrategia pura cuando juega únicamente una de las n posibles estrategias. Por el contrario, se dice que el centro decisor sigue una estrategia mixta cuando juega las n estrategias con probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n . Por supuesto, en el caso de estrategias mixtas, habrá de cumplirse que

$$\sum_{j=1}^n p_j \geq 1$$

Si alguna de las n probabilidades toma el valor cero, ello significa que la estrategia correspondiente no se juega. Un ejemplo de estra-

tegia mixta para un centro decisor que puede elegir entre cuatro estrategias, viene dado por el siguiente vector:

$$[p_1, p_2, 0, p_4]$$

Es decir, las estrategias primera, segunda y cuarta se juegan con probabilidades p_1 , p_2 y p_4 . La tercera estrategia no se juega.

Pues bien, el proceso de selección de una cartera de valores puede asimilarse formalmente a un juego contra la naturaleza. El centro decisor estará formado por la persona o personas responsables de seleccionar la cartera. Las n estrategias representan los n valores que, en principio, pueden entrar a formar parte de dicha cartera. Los m estados de la naturaleza pueden asimilarse a m períodos de tiempo. Los $n \times m$ resultados representan los rendimientos de cada uno de los n valores en cada uno de los m períodos. Así, por ejemplo, el elemento R_{jt} representa el rendimiento que se obtuvo con el valor j -ésimo en el período t -ésimo.

Si la solución del juego viene dada por una estrategia pura, la cartera estará formada por un único valor, que será el correspondiente a esa estrategia. Si, por el contrario, la solución del juego viene dada por una estrategia mixta, el vector de probabilidades que define dicha estrategia representará la composición de la cartera.

De acuerdo con este enfoque, el proceso de selección de una cartera de valores se reduce a resolver un juego contra la naturaleza. Este método presenta claras ventajas desde un punto de vista operativo, ya que la resolución de un juego como el anteriormente expuesto no es otra cosa que la resolución de un programa lineal. Sin embargo, no está exento de inconvenientes. Los principales inconvenientes de aplicar la teoría de juegos a los problemas de selección de carteras son:

1.º La cartera obtenida por un juego no tiene que ser necesariamente eficiente en el sentido de Markowitz.

2.º Se obtiene solamente una cartera y no un conjunto de ellas, como con los métodos anteriores.

El segundo inconveniente puede paliarse resolviendo el juego según los diferentes criterios de la teoría de la decisión. De esta forma, podemos obtener diferentes carteras, que serán más o menos

arriesgadas según que la psicología del centro decisor sea más o menos prudente. Una ventaja adicional que se logra con este método es la de poder incluir en el modelo todas las restricciones lineales que sean necesarias. Así, por ejemplo, la selección de la cartera de valores de un fondo de inversión, en el caso de que la participación de todos o algunos de los valores deba estar acotada, se puede reducir a resolver un juego contra la naturaleza, es decir, a resolver un programa lineal.

En el § 6 hemos seleccionado una cartera de valores utilizando tres criterios clásicos de la teoría de la decisión: Wald, Savage y Agrawal-Heady. Asimismo, hemos comparado las tres carteras así halladas con el conjunto de carteras eficientes generadas a partir de los modelos de Markowitz y Farrar, anteriormente expuestos. El lector interesado en los criterios clásicos de la teoría de la decisión, así como en los métodos de resolución de los juegos contra la naturaleza, puede consultar (1, capítulo 12, 6).

6. APLICACIONES NUMERICAS (*)

6.1. Planteamiento y obtención de los datos

En este apartado vamos a aplicar a un caso concreto los modelos de selección de carteras eficientes desarrollados en los § 3 y 4, así como el modelo de juego contra la naturaleza desarrollado en el § 5, comparando los resultados obtenidos con ambos métodos.

Con objeto de no complicar demasiado los cálculos, las posibles carteras se seleccionarán únicamente entre cuatro valores bursátiles. Los valores bursátiles considerados en nuestro caso son: Banco de Santander, Banco de Vizcaya, Telefónica e Iberduero. Para calcular las esperanzas y las varianzas de los rendimientos de cada uno de los anteriores valores se ha recurrido al método de las series históricas. Dichas series históricas comienzan en el año 1962 y terminan en el año 1971. Los diferentes datos de cotización, dividendos, ampliaciones, etc., se han tomado para periodos de un año. Todos los datos necesarios para el cálculo de los rendimientos anuales de aquellos cuatro valores bursátiles están reflejados en los cua-

(*) Nuestro agradecimiento a don Luis Torres, por la ayuda prestada en la realización de los cálculos numéricos contenidos en este apartado.

dros 1, 2, 3 y 4 (*). Los rendimientos anuales, calculados según la fórmula [1], figuran en la columna (10) de dichos cuadros. En el gráfico 1 se ha representado la evolución de los rendimientos de los cuatro valores bursátiles.

A partir de los datos contenidos en la columna (10) de dichos cuadros, calculamos las esperanzas y las varianzas de los rendimientos de cada uno de los cuatro valores, así como las varianzas correspondientes a los mismos. Estos parámetros se han dispuesto en la siguiente matriz de varianzas y covarianzas, a la que hemos agregado una última columna cuyos elementos representan las esperanzas de los rendimientos de los diferentes valores bursátiles.

1.046,62	242,7	299,04	103,24	35,37	[26]
242,7	595,47	237,83	51,54	21,54	
299,04	237,83	534,26	39,63	18,93	
103,24	51,54	39,63	236,53	15,30	

Los números de la primera fila de [26] corresponden al Banco de Santander; los de la segunda, al Banco de Vizcaya; los de la tercera, a la Telefónica, y los de la cuarta, a Iberduero.

El procedimiento seguido para generar [26] admite, entre otras, las siguientes críticas:

1.º Una serie histórica de rendimientos de diez años puede no ser lo suficientemente amplia como para caracterizar un valor bursátil.

2.º Tomar los datos con carácter anual es poco exacto. En aplicaciones más reales, los datos deberían tomarse por períodos mensuales o trimestrales.

3.º En ocasiones, suele ser muy útil la corrección subjetiva por parte del analista de algunas de las esperanzas y de las varianzas obtenidas por cálculo, cosa que aquí no se ha hecho.

4.º Una gama de cuatro valores bursátiles es demasiado estre-

(*) Como valor numérico de la cotización inicial de una acción se ha tomado la cotización final del año anterior. Esta forma de proceder no es muy rigurosa, pero el error cometido influye muy poco en los resultados.

CUADRO 1
BANCO DE SANTANDER

<i>Año</i> (1)	<i>V</i> <i>ptas.</i> (2)	<i>C'</i> <i>ptas.</i> (3)	<i>C'</i> <i>ptas.</i> (4)	<i>D</i> <i>ptas.</i> (5)	<i>P</i> % (6)	<i>Q</i> % (7)	<i>S</i> % (8)	π <i>ptas.</i> (9)	<i>R</i> % (10)
1962	250	2.250	2.625	49,00	—	—	—	—	18,84
1963	250	2.625	2.475	52,80	0,10	—	—	—	4,77
1964	250	2.475	2.525	53,40	0,14	—	—	—	16,71
1965	250	2.525	2.450	50,40	1,00	—	—	—	86,15
1966	250	2.450	2.275	43,18	1,00	—	—	—	77,27
1967	250	2.275	2.865	36,26	—	—	—	—	27,53
1968	250	2.865	3.700	31,44	—	0,20	—	—	56,07
1969	250	3.700	3.530	26,90	0,33	0,17	—	—	41,28
1970	250	3.530	1.829,5	26,95	0,33	0,11	—	—	-26,23
1971	250	1.829,5	2.087,5	24,60	0,33	0,07	—	—	51,33

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos extraídos de la Agenda Financiera 1971 del Banco de Bilbao.

CUADRO 2
BANCO DE VIZCAYA

Año (1)	V ptas. (2)	C' ptas. (3)	C' ptas. (4)	D ptas. (5)	P % (6)	Q % (7)	S % (8)	π ptas. (9)	R % (10)
1962	500	4.810	5.350	119,80	0,07	—	—	—	20,43
1963	500	5.350	5.350	115,38	0,20	—	—	—	20,29
1964	500	5.350	5.030	108,92	0,10	—	—	—	4,52
1965	500	5.030	5.850	108,76	0,10	—	—	—	29,10
1966	500	5.850	4.465	102,98	0,22	—	—	—	-6,96
1967	500	4.465	4.775	96,77	0,46	—	—	—	52,99
1968	500	4.775	5.145	86,64	0,10	0,18	—	—	38,88
1969	500	5.145	6.250	77,59	0,20	0,14	—	—	62,21
1970	500	6.250	4.100	71,10	0,10	0,10	—	—	-20,94
1971	500	4.100	3.965	67,80	0,10	0,08	—	—	14,87

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos extraídos de la Agenda Financiera 1971 del Banco de Bilbao.

CUADRO 3
TELEFONICA

Año (1)	V ptas. (2)	C' ptas. (3)	C' ptas. (4)	D ptas. (5)	P % (6)	Q % (7)	S % (8)	π ptas. (9)	R % (10)
1962	500	1.000	1.050	38,25	—	—	0,10	125	13,08
1963	500	1.050	785	38,40	—	—	0,11	25	—19,64
1964	500	785	870	38,41	—	—	0,17	50	22,49
1965	500	870	775	40,37	0,20	—	—	—	—
1966	500	775	825	40,37	0,20	—	—	—	20,05
1967	500	825	900	40,37	0,20	—	—	—	23,67
1968	500	900	1.020	40,37	0,20	—	—	—	29,37
1969	500	1.020	1.335	40,37	0,20	—	—	—	51,21
1970	500	1.335	1.065	40,37	0,20	—	—	—	—8,74
1971	500	1.065	1.450	40,37	0,20	—	—	—	57,78

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos extraídos de la Agenda Financiera 1971 del Banco de Bilbao.

CUADRO 4
IBERDUERO

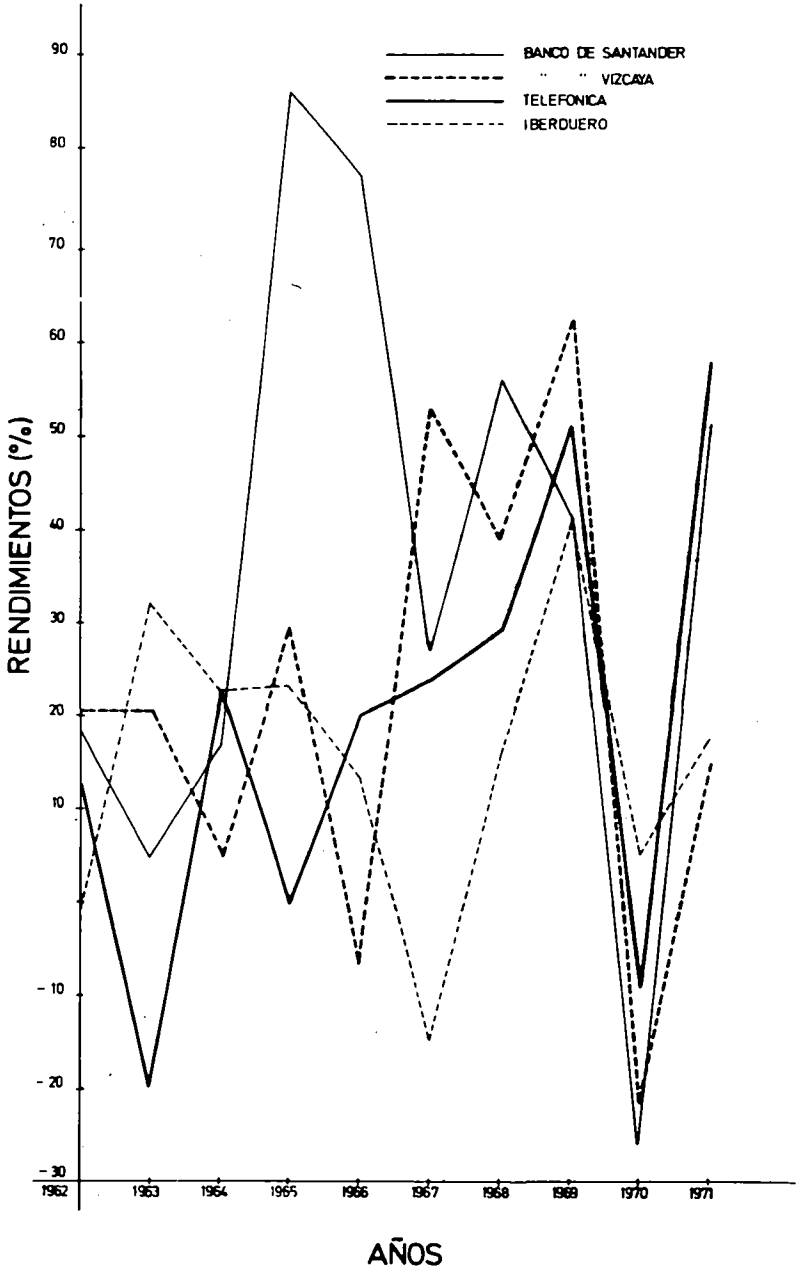
Año (1)	V ptas. (2)	C' ptas. (3)	C' ptas. (4)	D ptas. (5)	P % (6)	Q % (7)	S % (8)	π ptas. (9)	R % (10)
1962	500	1.870	1.625	60	—	—	0,14	45	—1,64
1963	500	1.625	1.875	76,67	—	—	0,14	45	31,79
1964	500	1.875	2.010	46,67	—	—	0,17	50	22,66
1965	500	2.010	2.165	60	—	—	0,17	35	23,26
1966	500	2.165	2.120	60	0,17	—	—	—	13,16
1967	500	2.120	1.410	60	0,14	0,14	—	—	—15,03
1968	500	1.410	1.340	52,50	0,10	0,20	—	—	15,77
1969	500	1.340	1.540	50	0,10	0,12	—	—	40,78
1970	500	1.540	1.345	50	0,10	0,10	—	—	4,81
1971	500	1.345	1.435	50	—	0,07	—	—	17,52

FUENTE: Elaboración propia a partir de datos extraídos de la Agenda Financiera 1971 del Banco de Bilbao.

CARLOS ROMERO

GRAFICO I

RENDIMIENTOS DE LOS VALORES ESTUDIADOS



cha para seleccionar una cartera en los mercados bursátiles españoles.

Dado que el objetivo principal que perseguimos en el caso práctico es el de ilustrar la aplicación de unos métodos, las críticas anteriores no revisten mayor importancia. Ahora bien, para que nuestros resultados no pierdan su validez, deberemos comprobar que entre las series de rendimientos de los cuatro valores bursátiles estudiados no existe correlación significativa. Para ello construiremos la siguiente matriz de correlación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,305 & 0,400 & 0,207 \\ 0,305 & 1 & 0,413 & 0,137 \\ 0,400 & 0,413 & 1 & 0,223 \\ 0,207 & 0,137 & 0,223 & 1 \end{pmatrix} \quad [27]$$

Cada elemento de la matriz [27] representa el coeficiente de correlación entre los rendimientos de los valores bursátiles relativos a la fila y a la columna que se cruzan sobre ese elemento. Así, por ejemplo, que el elemento correspondiente a la fila tercera y a la columna segunda de [27] valga 0,413, significa que el coeficiente de correlación entre los rendimientos de las acciones de Telefónica y del Banco de Vizcaya es de 0,413. Para 10 datos, los coeficientes de Fisher a niveles de significación del 5 y del 1 por 100 valen, respectivamente, 0,63 y 0,76. Al ser estas cantidades superiores a todos los valores numéricos que forman la matriz [27], podemos afirmar que no existe correlación significativa entre las series de datos estudiadas. Por tanto, los datos de la matriz [26] pueden constituir el punto de partida para nuestro proceso de selección de carteras eficientes.

6.2. Obtención de las carteras eficientes por el método de Markowitz

A partir de los datos contenidos en la matriz [26], y teniendo en cuenta que estamos seleccionando las posibles carteras entre cuatro valores bursátiles, las matrices A, X y B de la ecuación [11] son, respectivamente:

$$A = \begin{vmatrix} 1.046,62 & 242,7 & 299,04 & 103,24 & 17,69 & 0,5 \\ 242,7 & 595,47 & 237,83 & 51,54 & 10,77 & 0,5 \\ 299,04 & 237,83 & 534,26 & 39,63 & 9,46 & 0,5 \\ 103,24 & 51,54 & 39,63 & 236,53 & 7,65 & 0,5 \\ 35,37 & 21,54 & 18,93 & 15,30 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad [28]$$

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{vmatrix} \quad [29] \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E^* \\ 1 \end{vmatrix} \quad [30]$$

Sustituyendo en [11] A, X y B por [28], [29] y [30]; premultiplicando por A^{-1} y despejando X_1 , X_2 , X_3 y X_4 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,0507 E^* - 0,8582 \\ X_2 &= 0,0097 E^* - 0,0194 \\ X_3 &= 0,0213 E^* + 0,5632 \\ X_4 &= -0,0391 E^* + 1,3144 \end{aligned} \quad [31]$$

Para cada valor que demos a E^* en [31], obtenemos una cartera eficiente. Ahora bien, para $E^* = 26,44 \%$, X_3 toma el valor cero. Es decir, si queremos obtener una esperanza de rendimiento superior a 26,44 %, el tercer valor, Telefónica, no debe entrar a formar parte de la cartera. Por tanto, el sistema [31] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de E^* menores de 26,44 %. Las diez primeras filas del cuadro 5 nos dan la composición de diez carteras eficientes, para valores de E^* comprendidos entre 17 y 26. Asimismo, la última columna de dicho cuadro nos da la varianza del rendimiento de cada una de las carteras.

CUADRO 5

X_1	X_2	X_3	X_4	$E(R_i)$	$Var(R_i)$
0,0037	0,1455	0,2011	0,6497	17	169,30
0,0544	0,1552	0,1798	0,6106	18	171,45
0,1051	0,1649	0,1585	0,5715	19	176,11
0,1558	0,1746	0,1372	0,5324	20	190,54
0,2065	0,1843	0,1159	0,4933	21	207,48
0,2572	0,1940	0,0946	0,4542	22	229,33
0,3079	0,2037	0,0733	0,4151	23	256,12
0,3586	0,2134	0,0520	0,3760	24	287,83
0,4093	0,2231	0,0307	0,3369	25	324,46
0,4600	0,2328	0,0094	0,2978	26	366,02
0,4335	0,3617	—	0,2048	27	412,11
0,4957	0,3533	—	0,1510	28	465,50
0,5579	0,3448	—	0,0978	29	524,81
0,6200	0,3363	—	0,0437	30	578,43
0,6841	0,3159	—	—	31	654,13
0,7564	0,2436	—	—	32	723,59
0,8287	0,1713	—	—	33	805,14
0,9010	0,0990	—	—	34	898,78
0,9739	0,0261	—	—	35	1.005,44

Para obtener carteras eficientes con una esperanza de rendimiento superior al 26,44 %, eliminamos la tercera fila y la tercera columna de la matriz A, así como el tercer elemento de los vectores X y B. Sustituyendo en [13] A^{-1} por la inversa de la matriz reducida de A, X y B por los vectores reducidos de X y B, y despejando X_1 , X_2 , X_4 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,062 E^* - 1,2451 \\ X_2 &= -0,0084 E^* + 0,5897 \\ X_4 &= -0,0537 E^* + 1,6554 \end{aligned} \quad [32]$$

Para $E^* = 30,81$, el elemento X_4 de [32] se hace cero. Por tanto, el sistema [32] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de E^* mayores de 26,44 % y menores de 30,81 %. Las filas once, doce, trece y catorce del cuadro 5 nos dan la composición de cuatro carteras eficientes para valores de E^* comprendidos entre 17 y 30. Asimismo, la última columna de dicho cuadro nos da la varianza del rendimiento de cada una de las carteras.

Para obtener carteras eficientes con un rendimiento superior al 30,81 %, eliminamos la cuarta fila y la cuarta columna de la matriz A, así como el tercer elemento de los vectores X y B. Es decir, eliminamos a Iberduero de la composición de la cartera. Repitiendo las operaciones matriciales anteriores y despejando X_1 y X_2 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,07231 E^* - 1,5575 \\ X_2 &= 0,07231 E^* + 2,5575 \end{aligned} \quad [33]$$

El sistema [33] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de E^* superiores al 30,81 %. De esta manera obtenemos las cinco últimas filas del cuadro 5, que corresponden a las carteras eficientes de composición más arriesgada.

6.3. Obtención de las carteras eficientes por el método de Farrar

A partir de los datos contenidos en la matriz [26], y teniendo en cuenta que estamos seleccionando las posibles carteras entre cuatro valores bursátiles, las matrices C, X y D de la ecuación [23] son, respectivamente:

$$C = \begin{vmatrix} 1,046,62 & 242,7 & 299,04 & 103,24 & 0,5 \\ 242,7 & 595,47 & 237,83 & 51,54 & 0,5 \\ 299,04 & 237,83 & 534,26 & 39,63 & 0,5 \\ 103,24 & 51,54 & 39,63 & 236,53 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad [34]$$

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \mu \end{vmatrix} \quad [35] \quad D = \begin{vmatrix} 35,37 \beta \\ 21,54 \beta \\ 18,93 \beta \\ 15,30 \beta \end{vmatrix} \quad [36]$$

Sustituyendo en [23] C, X y D por [34], [35] y [36]; premultiplicando por C^{-1} y despejando X_1 , X_2 , X_3 y X_4 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,0103 \beta + 0,0069 \\ X_2 &= 0,0020 \beta + 0,1455 \\ X_3 &= -0,0043 \beta + 0,2002 \\ X_4 &= -0,0080 \beta + 0,6474 \end{aligned} \quad [37]$$

Para cada valor que demos a β en [37], obtenemos una cartera eficiente. Ahora bien, para $\beta = 46,55$, la variable X_3 toma el valor cero. Es decir, si el coeficiente de aversión al riesgo es inferior a $1/46,55$, el tercer valor, Telefónica, no debe entrar a formar parte de la cartera. Por tanto, el sistema [37] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de β menores de 46,55. Las siete primeras filas del cuadro 6 nos dan la composición de siete carteras eficientes, para valores de β comprendidos entre 0 y 40. Asimismo, las dos últimas columnas de dicho cuadro nos dan la esperanza y la varianza del rendimiento de cada una de las carteras.

Si el coeficiente de aversión al riesgo es inferior a $1/46,55$, para obtener carteras eficientes deberemos eliminar la tercera fila y la tercera columna de la matriz C, así como el tercer elemento de los vectores X y D. Sustituyendo en [24] C^{-1} por la inversa de la matriz reducida de C, los vectores X y D por los vectores reducidos de

X y D , y despejando X_1 , X_2 y X_4 se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,0093 \beta + 0,0487 \\ X_2 &= 0,0002 \beta + 0,2492 \\ X_4 &= -0,0094 \beta + 0,7021 \end{aligned} \quad [38]$$

Para $\beta = 74,69$, el elemento X_4 de [38] se hace cero. Por tanto, el sistema [38] nos permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de β mayores de 46,55 y menores de 74,69. Las filas ocho, nueve, diez, once y doce del cuadro 6 nos dan la composición de cinco carteras eficientes para valores de β comprendidos entre 50 y 70. Asimismo, las dos últimas columnas de dicho cuadro nos dan la esperanza y la varianza del rendimiento de cada una de las carteras.

Si el coeficiente de aversión al riesgo es inferior a $1/74,69$, para obtener carteras eficientes deberemos eliminar la cuarta fila y la cuarta columna de las matrices reducidas anteriores. Es decir, eliminamos a Iberduero de la composición de la cartera. Repitiendo las operaciones matriciales anteriores y despejando X_1 y X_2 , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= 0,0062 \beta + 0,2736 \\ X_2 &= -0,0062 \beta + 0,7264 \end{aligned} \quad [39]$$

El sistema [39] permite generar el conjunto de carteras eficientes para valores de β superiores a 74,69. De esta manera obtenemos las cinco últimas filas del cuadro 6, que corresponden a las carteras eficientes de composición más arriesgada.

En el gráfico 2 se ha representado el conjunto de carteras eficientes que separa el semiplano de las carteras imposibles del semiplano de las carteras posibles eficientes.

6.4. Obtención de una cartera de valores por medio de un juego contra la naturaleza

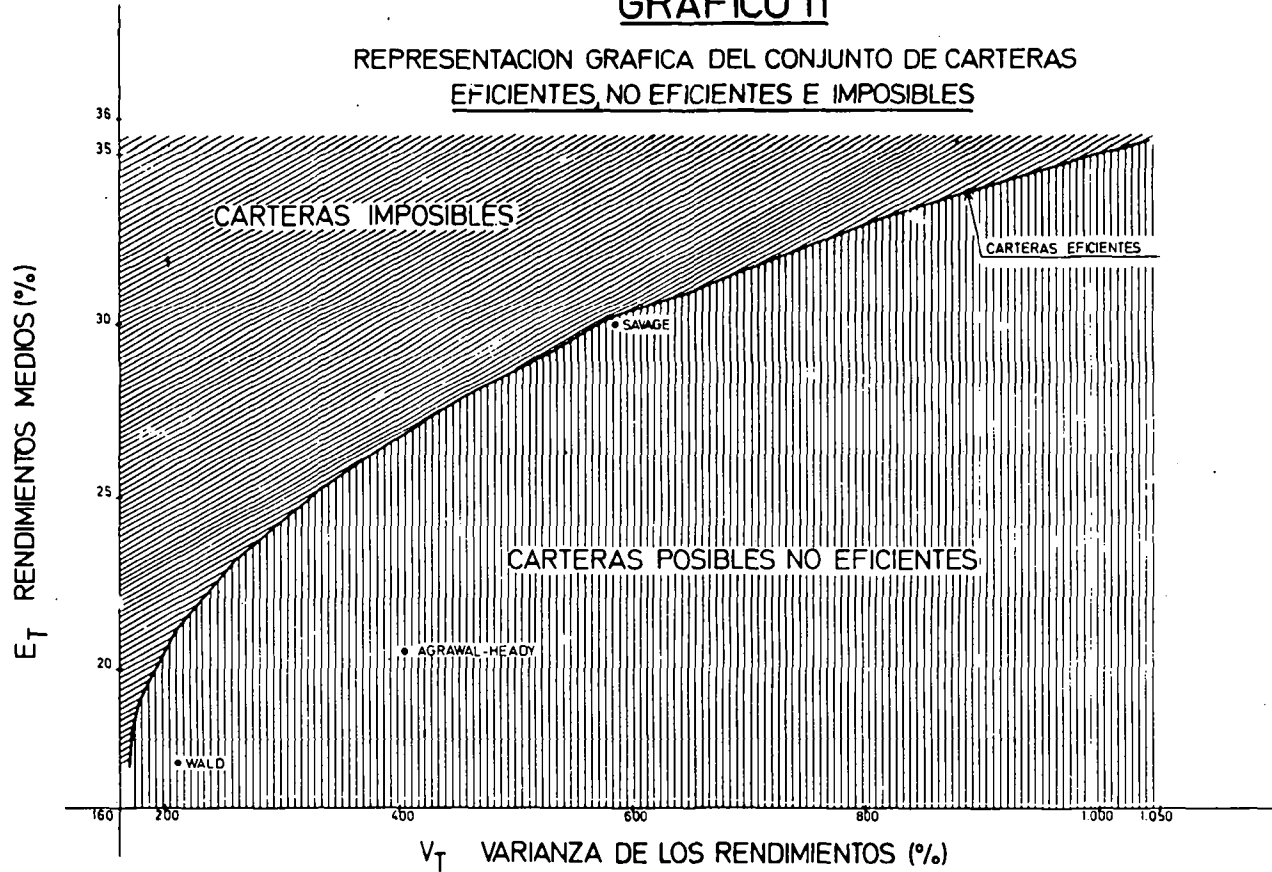
Como se dijo en el § 5, el proceso de selección de una cartera de valores puede asimilarse formalmente a un juego contra la naturaleza. Pues bien, utilizando los datos anteriores vamos a determi-

CUADRO 6

B	X_1	X_2	X_3	X_4	$E(R_i)$	$Var(R_i)$
0	0,0069	0,1455	0,2002	0,6474	17,07	169,33
2	0,0275	0,1495	0,1916	0,6314	17,48	169,78
5	0,0584	0,1555	0,1787	0,6074	18,09	171,82
10	0,1099	0,1655	0,1572	0,5674	19,11	179,46
20	0,2129	0,1855	0,1142	0,4874	21,15	210,03
30	0,3159	0,2055	0,0712	0,4074	23,18	260,98
40	0,4189	0,2255	0,0282	0,3274	25,52	332,32
50	0,5137	0,2592	—	0,2271	27,22	423,18
55	0,5602	0,2602	—	0,1796	28,16	472,75
60	0,6067	0,2612	—	0,1321	29,11	527,03
65	0,6532	0,2622	—	0,0846	30,24	586,22
70	0,6997	0,2632	—	0,0371	30,99	649,74
80	0,7696	0,2304	—	—	32,18	736,98
90	0,8316	0,1684	—	—	33,04	808,66
100	0,8936	0,1064	—	—	33,90	888,64
110	0,9558	0,0442	—	—	34,76	977,81
115	0,9860	0,0140	—	—	35,17	1.024,33

GRAFICO II

REPRESENTACION GRAFICA DEL CONJUNTO DE CARTERAS
EFICIENTES, NO EFICIENTES E IMPOSIBLES



nar la mejor cartera de valores para un centro decisor cuya psicología se adapte a los criterios clásicos de la teoría de la decisión: Wald, Savage y Agrawal-Heady. Conviene recordar que, de los tres criterios anteriores, el que corresponde a una psicología más pesimista del centro decisor es el de Wald. Por tanto, con este criterio obtendremos la cartera de composición más conservadora. El criterio de Savage corresponde a la psicología más optimista del centro decisor, por lo que obtendremos con él la cartera de composición más arriesgada. El criterio de Agrawal-Heady representa un compromiso entre el pesimismo del criterio de Wald y el optimismo del criterio de Savage.

A partir de los datos contenidos en la columna (10) de los cuadros 1, 2, 3 y 4, formamos la matriz de Wald. Esta matriz aparece en el cuadro 7. El programa lineal que una vez resuelto proporciona la mejor estrategia mixta, según el criterio de Wald, figura en el cuadro 10. Al resolver la programación lineal, se encontró que no existía ninguna solución compatible con todo el conjunto de restricciones impuestas por el juego, debido a que la restricción novena es incompatible, entre otras, con la restricción sexta. Con objeto de que el programa lineal diera una solución compatible, se eliminó la restricción novena. Esta forma de proceder no es rigurosa, pero permite obtener una cartera de valores cuya composición se adapta a la psicología propia del criterio de Wald. La composición de esta cartera, así como la esperanza y la varianza de su rendimiento, figuran en el cuadro 13.

A partir de la matriz de Wald se puede deducir con facilidad la matriz de Savage o matriz de errores. Esta matriz se ha recogido en el cuadro 8. Para formarla basta con restar al elemento máximo de cada columna cada uno de los demás elementos de la misma columna. El programa lineal que proporciona la mejor estrategia mixta, según el criterio de Savage, figura en el cuadro 11. El resultado de esta programación lineal, que representa la mejor composición de una cartera para un centro decisor cuya psicología sea la propia del criterio de Savage, figura en el cuadro 13. Asimismo, en dicho cuadro figura la esperanza y la varianza del rendimiento de la cartera.

A partir de la matriz de Wald, se puede deducir con facilidad la matriz de Agrawal-Heady o matriz de aciertos. Esta matriz apa-

rece en el cuadro 9. Para formarla basta con restar a cada uno de los elementos de una columna el elemento mínimo de dicha columna. El programa lineal que proporciona la mejor estrategia mixta, según el criterio de Agrawal-Heady, figura en el cuadro 12. El resultado de esta programación lineal, que indica la mejor composición de una cartera para un centro decisor cuya psicología sea la propia del criterio de Agrawal-Heady, figura en el cuadro 13. Asimismo, en dicho cuadro figura la esperanza y la varianza del rendimiento de la cartera.

En el gráfico 2 vienen representados los puntos correspondientes a las carteras de valores obtenidas según los criterios de teoría de las decisiones anteriores. Se observa con facilidad que, en el caso estudiado, los criterios de Wald y de Agrawal-Heady proporcionan carteras conservadoras muy alejadas del conjunto de carteras eficientes. Por otra parte, el criterio de Savage proporciona una cartera bastante arriesgada y que prácticamente es eficiente. Este resultado puede ser importante, pues en caso de poderse generalizar colocaría el criterio de Savage en una situación de superioridad respecto a los otros criterios. Ahora bien, por tratarse de un ejemplo, no es naturalmente lícito deducir conclusiones rigurosas al respecto.

CUADRO 7

MATRIZ DE WALD

	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Banco de Santander	18,84	4,77	16,71	86,15	77,27	27,53	56,07	41,28	-26,23	51,33
Banco de Vizcaya	20,43	20,29	4,52	29,10	-6,96	52,99	38,88	62,21	-20,94	14,87
Telefónica	13,08	-19,64	22,49	—	20,05	23,67	29,37	51,21	-8,74	57,78
Iberduero	-1,64	31,79	22,66	23,26	13,16	-15,03	15,77	40,78	4,81	17,52

CUADRO 8

MATRIZ DE SAVAGE

	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Banco de Santander	1,59	27,02	5,95	—	—	25,46	—	20,93	31,04	6,45
Banco de Vizcaya	—	11,50	18,14	57,05	84,23	—	17,19	—	25,75	42,91
Telefónica	7,35	51,43	0,17	86,15	57,22	29,32	26,70	11,00	13,55	—
Iberduero	22,17	—	—	62,89	64,11	68,02	40,30	21,43	—	40,26

CUADRO 9
MATRIZ DE AGRAWAL-HEADY

	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
Banco de Santander	20,48	24,41	12,19	86,15	84,23	42,56	40,30	0,50	—	36,46
Banco de Vizcaya	22,07	39,93	—	29,10	—	68,02	23,11	21,43	5,29	—
Telefónica	14,72	—	17,97	—	27,01	38,70	13,60	10,43	17,49	42,91
Iberduero	—	51,43	18,14	23,26	20,12	—	—	—	31,04	2,65

CUADRO 10

MODELO DE PROGRAMACION LINEAL QUE GENERA LA MEJOR
ESTRATEGIA MIXTA, SEGUN EL CRITERIO DE WALD

Función objetivo:

$$\text{Max } W$$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} 18,84X_1 + 20,43X_2 + 13,08X_3 - 1,64X_4 &\geq W \\ 4,77X_1 + 20,29X_2 - 19,64X_3 + 31,79X_4 &\geq W \\ 16,71X_1 + 4,52X_2 + 22,49X_3 + 22,66X_4 &\geq W \\ 86,15X_1 + 29,10X_2 + 23,26X_4 &\geq W \\ 77,27X_1 - 6,96X_2 + 20,05X_3 + 13,16X_4 &\geq W \\ 27,53X_1 + 52,99X_2 + 23,67X_3 - 15,03X_4 &\geq W \\ 56,07X_1 + 38,88X_2 + 29,37X_3 + 15,77X_4 &\geq W \\ 41,28X_1 + 62,21X_2 + 51,21X_3 + 40,78X_4 &\geq W \\ -26,23X_1 - 20,94X_2 - 8,74X_3 + 4,81X_4 &\geq W \\ 51,33X_1 + 14,87X_2 + 57,78X_3 + 17,52X_4 &\geq W \end{aligned}$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

CUADRO 11

MODELO DE PROGRAMACION LINEAL QUE GENERA LA MEJOR
ESTRATEGIA MIXTA, SEGUN EL CRITERIO DE SAVAGE

Función objetivo:

Min H

Conjunto de restricciones:

$$1,59X_1 + 7,35X_3 + 22,17X_4 \leq H$$

$$27,02X_1 + 11,50X_2 + 51,43X_3 \leq H$$

$$5,95X_1 + 18,14X_2 + 0,17X_3 \leq H$$

$$57,05X_2 + 86,15X_3 + 62,89X_4 \leq H$$

$$84,23X_2 + 57,22X_3 + 64,11X_4 \leq H$$

$$25,46X_1 + 29,32X_3 + 68,02X_4 \leq H$$

$$17,19X_2 + 26,70X_3 + 40,30X_4 \leq H$$

$$20,93X_1 + 11,00X_3 + 21,43X_4 \leq H$$

$$31,04X_1 + 25,75X_2 + 13,55X_3 \leq H$$

$$6,45X_1 + 42,91X_2 + 40,26X_4 \leq H$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

CUADRO 12

MODELO DE PROGRAMACION LINEAL QUE GENERA LA MEJOR
ESTRATEGIA MIXTA, SEGUN EL CRITERIO
DE AGRAWAL-HEADY

Función objetivo:

$$\text{Max } T$$

Conjunto de restricciones:

$$20,48X_1 + 22,07X_2 + 14,72X_3 \geq T$$

$$24,41X_1 + 39,93X_2 + 51,43X_4 \geq T$$

$$12,19X_1 + 17,97X_3 + 18,14X_4 \geq T$$

$$86,15X_1 + 29,10X_2 + 23,26X_4 \geq T$$

$$84,23X_1 + 27,01X_3 + 20,12X_4 \geq T$$

$$42,56X_1 + 68,02X_2 + 38,70X_3 \geq T$$

$$40,30X_1 + 23,11X_2 + 13,60X_3 \geq T$$

$$0,50X_1 + 21,43X_2 + 10,43X_3 \geq T$$

$$5,29X_2 + 17,49X_3 + 31,04X_4 \geq T$$

$$36,46X_1 + 42,91X_3 + 2,65X_4 \geq T$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1$$

$$X_j \geq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

CUADRO 13

<i>Criterio</i>	X_1	X_2	X_3	X_4	E_T	V_T
WALD	—	0,0323	0,4903	0,4774	17,28	211,11
SAVAGE	0,6578	0,1578	0,1056	0,0788	29,90	587,63
AGRAWAL-HEADY	0,0525	0,2763	0,6712	—	20,51	405,37

7. BIBLIOGRAFIA

- (1) BALLESTERO, ENRIQUE: *Principios de Economía de la Empresa*. Madrid, Alianza Universidad, 1973.
- (2) BOOT, JOHN C. G.: *Quadratic Programming*. Amsterdam-Chicago, North-Holland Publishing Company y Rand McNally Company, 1964.
- (3) FAMA, EUGENE: «Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market». *Management Science*, enero (1965), págs. 404-419.
- (4) FARRAR, DONALD E.: *The Investment Decision under Uncertainty*. New Jersey, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1962.
- (5) FRANCIS, JACK, y ARCHER, STEPHEN: *Portfolio Analysis*. New Jersey, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1971.
- (6) LUCE, DUNCAN, y RAIFFA, HOWARD: *Games and Decisions*. New York, John Wiley and Sons Inc., 1957.
- (7) MANDELBROT, BENOIT: «The Variation of Certain Speculative Prices». *Journal of Business*, octubre (1963), págs. 394-419.
- (8) MARTIN, A. D.: «Mathematical Programming of Portfolio Selections». *Management Science*, enero (1955), págs. 152-166.
- (9) MARKOWITZ, HARRY: «Portfolio Selection». *Journal of Finance*, marzo (1952), págs. 77-91.
- (10) MARKOWITZ, HARRY: «The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints». *Naval Research Logistic Quarterly*, marzo-junio (1956), págs. 111-133.
- (11) MARKOWITZ, HARRY: *Portfolio Selection* (Cowles Foundation Monografía, n.º 16). New York, John Wiley and Sons, 1959.
- (12) SHARPE, WILLIAM: «A Simplified Model for Portfolio Analysis». *Management Science*, enero (1963), págs. 277-293.
- (13) SHARPE, WILLIAM: «A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portfolio Selection». *Management Science*, marzo (1967), págs. 499-510.
- (14) WOLFE, PHILIP: «The Simplex Method for Quadratic Programming». *Econometrica*, julio (1959), págs. 382-398.

R E S U M E N

En este artículo se hace una revisión de los métodos modernos de selección de carteras de valores bursátiles. El artículo se centra fundamentalmente en los modelos de Markowitz y Farrar, ya que permiten generar carteras eficientes. Asimismo, se plantea el problema de la selección de una cartera de valores como un problema de teoría de juegos. El artículo se completa con una aplicación de los anteriores modelos a un problema real de selección de una cartera de valores cotizados en la Bolsa de Madrid.

