Funciones de calidad

DIEGO PAZOS MORAN
Doctor Ingeniero Agrónomo

1. INTRODUCCION

Con el desarrollo de los mercados, la clasificación y tipificación de los productos es un hecho que día a día va tomando una importancia creciente. La clasificación o normalización aparece como un proceso independiente en virtud del cual un producto se transforma en otros, guardando estos nuevos productos una estrecha relación con los factores que originan al primer producto.

Por el hecho de clasificar una partida de manzanas, éstas toman apellidos, y ya no es correcto hablar sólo de manzanas, hemos de hablar de manzanas de segunda o de quinta, si queremos entendernos.

Se ha producido un hecho trascendental. El proceso de producción que hasta el momento de la clasificación era simple, se ha transformado en un proceso de producción conjunto. Las manzanas de primera difieren de las de quinta no sólo en la forma, color y demás caractersticas físicas y químicas que sirvieron a base a la normalización, tienen además una diferencia fundamental: *el precio.*

El modelo que estudia a estos dos procesos se puede llamar de la calidad, pues considera a la calidad como un elemento diferenciador, tiene su origen en el modelo de la teoría de la producción, pero llega más lejos, pues añade a este proceso el de la normalización.

El productor se adapta con bastante facilidad a las nuevas técnicas y situaciones del mercado, pues a veces le va en ello la existencia, pero hay que enseñarle el camino. Más aún cuando todo se ha complicado por efecto de la normalización, que ha dividido el producto en tantos tipos como clases se hayan establecido. Como cada clase tiene su precio, se plantean las siguientes preguntas, no siempre con fácil respuesta: ¿Qué le convendrá más al productor: producir mucha cantidad de fruta o producir poca pero de mucha calidad? O formulada de distinta manera: ¿Dónde está el punto que le maximiza el beneficio? Orientarle acerca de cómo tomar una decisión de este tipo es fundamental.

El modelo de teoría de la producción basado en la hipótesis de que la producción es simple, ya no nos sirve. El óptimo económico ya no vendrá definido solamente por las productividades marginales, por los precios de los factores y por el precio del producto. Ahora existen muchos precios, tantos como clases, y muchas funciones de productividad.

Algunos lectores estarán pensando que si la producción no es simple, sino *conjunta*, se podrá estudiar como *conjunta*, y el problema de determinar el óptimo económico se resolvería con ayuda de la curva de transformación. Pero, ¿dónde está esta curva?, ¿cómo calcularla?

Temo que no sea posible encontrarla ni calcularla; si en este tipo de producción conjunta fijamos el coste, el resultado es la producción de una cantidad determinada de producto de cada una de las clases. Esto sucede por ser absolutamente comunes todos los factores que intervienen en el proceso de calidad. (Recuérdese que la curva de transformación se calculaba fijando el coste y haciendo variar los recursos hacia unos procesos u otros. De las infinitas posibilidades surgía la curva de transformación, si bien la producción de los diversos productos se realizaba según distinta técnica, es decir, los factores de producción no eran los mismos en cantidad, calidad, etc.).

Así, por ejemplo, si en la *producción de ajos en función* de un factor variable, la semilla, fijamos el coste, nos aparecen tantos puntos como clases de ajos, pero por ninguna parte aparecerá la curva de transformación. Es decir, los recursos no se pueden orientar a la producción de una clase única. Para cada plan de producción, para cada cantidad determinada de factor se obtiene una producción fija de cada una de las clases.

Los fines de la teoría de la calidad consisten en calcular el *nivel óptimo de aplicación de los factores* y en analizar el proceso.

Los objetivos que se persiguen en este artículo son:

1.° Establecer un modelo de teoría de la calidad desarrollando las ideas sobre funciones de calidad presentadas por Ballestero en 1971 (3, capítulo 13).

2.° Aplicar dicho modelo a un caso real referente al cultivo de ajos en la provincia de Albacete.

2. EL MODELO

El modelo de teoría de la calidad pretende especificar y tener en cuenta conjuntamente las circunstancias de los procesos de producción y de normalización. Estudiando como proceso único el que resulta de agregar a los dos.

Sean:

V_i = Cantidad de factor variable i (1 ... n).

T = Técnica bajo la que se desenvuelve el proceso (para cada T, los factores fijos se utilizan según una cantidad dada; los factores *variables y fijos mantienen la calidad y el orden de aplicación* de los factores es único).

X_K = Función de calidad correspondiente a la clase K (1 ... m).

X_{Ki} = Productividad marginal de la función de calidad de la clase K con respecto al factor V_i.

P_K = Precio unitario del producto correspondiente a la clase K.

C_i = Precio unitario del factor de producción V_i.

X'_{Ki} = Productividad marginal de la función de calidad de la clase K con respecto al factor V_i.

X = Función de producción.

C_F = Costes fijos del proceso.

C_V = Costes variables del proceso.

C_T = Coste total del proceso.

I = Función de ingresos.

Un proceso de calidad es la suma de un proceso de producción y uno de clasificación o normalización.

Por el proceso de producción unos bienes y servicios se transforman e notros bienes y servicios. Si sólo aparece un bien o un servicio, la producción es simple.

Por el proceso de normalización o clasificación, el producto que aparecía como único se distribuye en tantos como clases.

Una función de calidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$X_K = f_K (V_1 \dots V_n/T)$$

que se puede leer de la siguiente manera. Existe una relación entre los factores de producción y la cantidad de producto correspondiente a la clase K, desarrollándose el proceso de la producción bajo una técnica T.

Las hipótesis en que está basado el modelo de teoría de la calidad son:

Hipótesis H_1: El proceso de producción es simple; es decir, como resultado de dicho proceso aparece un solo producto.

Hipótesis H_2: El proceso de clasificación es un proceso merced al cual aparecen los productos clasificados; desde el punto de vista de la teoría de la producción es un proceso conjunto, ya que aparecen varios productos.

Hipótesis H_3: El proceso de calidad, que es una unión de los anteriores procesos, es un proceso conjunto.

Hipótesis H_4: Las funciones de calidad son continuas. Es decir, existe la derivada primera para cada una de ellas.

Hipótesis $_5$: El resultado de agregar todas las funciones de calidad es la función de producción correspondiente al primer proceso de producción simple.

Matemáticamente, la hipótesis H_5 se puede expresar como:

$$X = \sum_{k=1}^{m} X_K$$

(Suponiendo la existencia de m clases.)

Hipótesis H_6: Los factores son sustituíbles. Aunque la sustituibilidad de factores es un concepto mucho más restringido que en el proceso de producción. En éste bastaba que un factor aumentara y el otro disminuyese para que operara la sustituibilidad siempre que la cantidad se mantuviese constante. En un proceso de calidad han de mantenerse constante la cantidad de una calidad fija. Al sustituir un factor por otro se producen también aumentos o disminuciones en las otras funciones de calidad y el estudio económico resulta difícil.

A continuación, por analogía con la teoría de la producción clásica vamos a estudiar algunas definiciones básicas.

a) Se define la función de la calidad media de Z_K con respecto al factor V_i como el cociente entre la cantidad de producto y la cantidad de factor V_i

$$\left(\frac{X_K}{V_i}\right)$$

b) Se define la función de cálidad marginal (X'_{Ki}) como la derivada de la función X_K con respecto al factor V_i. El número de funciones de calidad marginal es igual al producto del número de clases por el número de factores variables ($n \times m$).

c) La clasificación se realiza teniendo en cuenta diversas normas que hacen referencia a determinadas características físicas, químicas, estéticas, etc.

d) Si hay *n* normas y todas hacen referencia a una misma característica, el número de clases es n + 1. Si hay *n* normas que hacen referencia a una característica y *h* que hacen referencia a otra, el número de clases es (h + 1) (n + 1).

e) Plan de producción es un vector cuyos componentes expresan las cantidades a emplear de cada uno de los factores variables.

Como consecuencia fundamental del modelo de teoría de la calidad obtenemos el siguiente:

TEOREMA: El plan de producción con el cual el empresario obtiene el beneficio máximo nos viene definido por:

$$C_i = \sum_{k=1}^{m} P_K \, f'_{Ki} (i = 1, \ldots, n)$$

Es decir, cuando el coste unitario de un factor es igual a la suma del producto del precio unitario de cada clase por su función de calidad marginal con respecto a ese factor.

Prueba. Definimos el beneficio como la diferencia entre la función de ingresos y la función de costes.

Sea la función de ingresos:

$$I = P_1X_1 + P_2X_2 + P_3X_3 + \ldots P_mX_m \quad (2)$$

La función de costes:

$$C_T = C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots C_nV_n + C_F \quad (3)$$

La función beneficio vendrá expresada por la siguiente expresión:

$$B = I - C = P_1X_1 + P_2X_2 + \ldots + P_mX_m - (C_1V_1 + \ldots + C_nV_n + C_F) \quad (4)$$

Sustituyendo X_1, X_2 ... X_m por sus respectivas funciones en (V_1, V_2 ... V_n), tenemos:

$$B = P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots P_m f_m - (C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_n V_n + C_F) \qquad (5)$$

Maximizando esta función obtenemos el punto de óptimo económico. Para ello derivamos con respecto a V_1, V_2 ... V_n e igualamos a cero, obteniendo:

$$\begin{aligned} O &= P_1 f_{11} + P_2 f_{21} + \dots + P_m f'_{m1} - C_1 \\ O &= P_1 f_{12} + P_2 f_{22} + \dots + P_m f'_{m2} - C_2 \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ O &= P_1 f_{n1} + P_2 f_{n2} + \dots + P_m f'_{mn} - C_n \end{aligned} \qquad (6)$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{K=1}^{m} P_K f'_{K1} \\ C_2 &= \sum_{K=1}^{m} P_K f'_{K2} \\ C_n &= \sum_{K=1}^{m} P_K f'_{Kn} \end{aligned} \qquad (7)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones nos da el plan de producción que nos maximiza el beneficio.

3. PRESENTACION DE UN CASO PRACTICO

Los ajos constituyen un cultivo típico de algunos pueblos de la provincia de Albacete y, en especial, de los pueblos de Balazote y Lezuza, cobrando en estos pueblos especial importancia por la gran cantidad del factor mano de obra que absorbe.

La fase comercial se suele realizar a través de una cooperativa asentada en Bazalote; en esta cooperativa se realiza el proceso de normalización o clasificación mediante el cual el producto aparece distribuido en las siguientes clases: *Super flor, Flor, Primera, Segunda* y *Dextrio.*

Mediante la realización de una experiencia de campo y el posterior análisis de los resultados se ha pretendido contrastar el modelo de teoría de la calidad expuesto en el apartado anterior. Creo que esta experiencia es la primera que se realiza con el fin de obtener y estudiar funciones de calidad.

El lugar donde se realizó la experiencia se denomina "La Casica". Como factor variable se eligió el número de plantas y se consideraron fijos todos los demás. Se eligió el número de plantas por ser uno de los factores más relevantes en la producción de ajos.

Las clases se definen atendiendo, sobre todo, al tamaño:

— *Super flor:* Son de clase super flor las cabezas de ajos que sin tener defectos (no estar abiertas, fofas, faltarles algún diente, etc.), tienen un diámetro de más de 50 mm.

— *Flor:* Son de clase flor las cabezas de ajos que cumpliendo las condiciones de presentación de la clase flor tienen un diámetro comprendido entre 45 y 50 mm.

— *Primera:* Son de clase primera las cabezas de ajos que tienen un diámetro comprendido entre 37 y 45 mm. (cumpliendo las condiciones de las anteriores clases).

— *Segunda:* Son de clase segunda las cabezas de ajos que tienen un diámetro comprendido entre 30 y 37 mm. (cumpliendo las condiciones de las anteriores clases).

— *Dextrio:* Esta clase está compuesta por aquellas cabezas de ajos que tienen defectos o que tienen un diámetro menor de 30 mm.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación:

X_0 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. sin clasificar.

X_1 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. de clase súper flor.

X_2 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. de clase flor.

X_3 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. de clase primera.

X_4 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. de clase segunda.

X_5 = Cantidad de ajos en Kg./Ha. de clase dextrio.

4. DATOS Y AJUSTES ESTADISTICOS (*)

Como hemos mencionado en la introducción, se ha tomado como factor variable el número de plantas.

Los resultados del experimento antes de la clasificación aparecen en la columna (1) del cuadro I. Los resultados del experimento después del proceso de clasificación o normalización aparecen en las columnas (2), (3), (4), (5) y (6) de dicho cuadro.

Las cabezas de ajos se presentan peladas y cortadas las raíces. La interpretación del cuadro I es la siguiente:

— La columna (1) expresa la producción total de cabezas de ajos al aplicar una cantidad de factor V.

— La columna (2) expresa la producción de cabezas de ajos clases súper flor, al aplicar una cantidad de factor V.

— La columna (3) expresa la producción de cabezas de ajos de clase flor al aplicar una cantidad de factor V.

— La columna (4) expresa la producción de cabezas de ajos de clase primera, al aplicar una cantidad de factor V.

— La columna (5) expresa la producción de cabezas de ajos de clase segunda, al aplicar una cantidad de factor V.

— La columna (6) expresa la producción de dextrio al aplicar una cantidad de factor V.

—La columna (7) expresa los diferentes niveles de aplicación del factor variable número de plantas.

(*) Nuestro agradecimiento al profesor Javier Bermejo, del centro de procesamiento de datos del I. N. I. A., por la puesta a punto de los programas de ordenador y por los ajustes estadísticos realizados en este apartado.

Cuadro 1

X_0 (Kg/Ha.) (1)	X_1 (Kg/Ha.) (2)	X_2 (Kg/Ha.) (3)	X_3 (Kg/Ha.) (4)	X_4 (Kg/Ha.) (5)	X_5 (Kg/Ha.) (6)	V (Plantas/Ha.) (7)
2.411	833	611	611	133	222	85.555
2.088	666	555	499	166	199	65.549
3.471	1.333	888	694	166	388	101.101
2.733	999	499	733	111	388	83.333
2.522	833	722	611	133	222	74.444
5.138	1.166	1.111	1.999	305	555	137.777
4.961	1.444	1.222	1.166	555	572	147.777
4.777	1.388	1.166	1.111	555	555	153.333
4.638	1.222	1.166	1.222	499	527	139.999
4.722	1.444	888	1.611	277	499	144.444
5.388	1.222	1.305	1.611	444	805	174.444
5.083	722	1.277	1.805	388	888	181.110
5.849	527	1.888	1.833	666	933	201.110
4.616	583	1.111	1.505	694	722	188.888
5.555	444	1.555	2.333	499	722	198.888
5.972	277	1.083	2.388	1.277	944	228.888
6.777	166	1.166	3.333	805	1.361	275.555
6.344	277	1.277	2.611	955	1.222	234.444
6.333	222	1.388	2.777	666	1.277	238.888
5.794	499	1.499	1.999	905	888	205.555
5.888	277	888	2.666	1.144	1.466	257.777
6.416	194	1.138	2.777	916	1.394	237.777
6.444	222	1.277	2.055	1.166	1.722	275.555

FUENTE: Elaboración propia a partir de una experiencia de campo. El autor desea expresar su más sincero agradecimiento a la Cooperativa Santa Mónica de Balazote (Albacete), pues sin su inestimable ayuda no hubiese podido llevar a cabo la clasificación de los ajos.

A la vista del cuadro 1 vamos a tratar de buscar funciones que nos expliquen las producciones de X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 en función del factor V. Las funciones que mejores resultados suelen dar son las siguientes (3, pág. 463; 13, págs. 73-107):

— Función cuadrática:

$$X = a + bV + cV^2 \qquad (8)$$

— Función raíz cuadrada:

$$X = a + bV + c\sqrt{V} \qquad (9)$$

— Función tres medios:

$$x = a + bV + cV^{3/2} \qquad (10)$$

— Función potencial:

$$X = a\ V^{b_1} \qquad (11)$$

Con vistas a las aplicaciones prácticas, la función potencial (o función de Cobb-Douglas) presenta el defecto de carecer de máximo técnico. Para comprobarlo basta derivar la función anterior con respecto a V_T e igualar a cero dicha derivada:

$$f_1 = a\ b_1\ V^{b_1-1} = O \qquad (12)$$

Como se puede comprobar fácilmente, el único valor finito de V que satisface la ecuación (12) es V = O. Por tanto, la función potencial carece de máximo técnico. Por lo que dicha función perderá validez para aquellos valores de V que se aproximen al que proporciona la máxima producción posible de x.

A continuación vamos a ensayar las funciones anteriores a los datos del cuadro I.

4.1. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN $X_0 = f(V)$, correspondiente a la cantidad de ajos sin clasificar.

4.1.1. *Función cuadrática.*

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (1) y (7) del cuadro I a la expresión (8), tenemos:

$$X_0 = 6.884.752 + \underset{(6.332)}{48.422\,V} - \underset{(0{,}018)}{0{,}82\,V^2} \qquad (12)$$

(Los números entre paréntesis debajo de cada coeficiente de regresión indican la desviación típica de dichos coeficientes.)

Coeficiente de determinación: $\rho^2 = 0{,}9477$.

Valores de la t de Student (cociente entre los coeficientes de regresión y la desviación típica de dichos coeficientes):

$$\frac{48{,}422}{\delta(b)} = 7{,}647 \qquad \frac{-0.82}{\delta(c)} = -4{,}477$$

Los valores teóricos de la t de Student para n observaciones — K (número de variables independientes) — 1 = 23 — 2 — 1 = 20 grados de libertad y para un nivel de significación del uno por ciento vale 3,850; por lo tanto, estos coeficientes de regresión son significativos al uno por ciento.

Análisis de la varianza:

Fuentes de variación		s. c.	cm	Valor de F
Debido a la regresión	2	41.279.029,055	20.639.514,527	181,225
	20	2.277.783.902	113.889,195	
Total	22			

El valor teórico de la F de Snedecor para K = 2 y n — K — 1 = 20 grados de libertad, y un nivel de significación del 1°/₀₀ es 9,95. Como en nuestro caso vale 181,225, la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

4.1.2. *Función tres medios.*

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (1) y (7) del cuadro I a la expresión (9), tenemos:

$$X_0 = -1347{,}0775 + 75{,}391\ V - 2{,}836\ V^{3/2} \qquad (13)$$

El valor del coeficiente de determinación es $\rho^2 = 0{,}9493$.

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = 6{,}315$$
$$t_2 = -4{,}616$$

Por tanto, el coeficiente de V, así como el coeficiente de $V^{3/2}$ resultan significativos al 1°/₀₀.

Ya F de Snedecor vale 187,21, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

4.1.3. *Función raíz cuadrada* (X_0).

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (1) y (7) del cuadro I a la expresión (9), tenemos:

$$X_0 = -6663{,}4297 - 32{,}516\ V + 1332{,}572\ \sqrt{V} \qquad (14)$$

El valor del coeficiente de determinación:

$$\rho^2 = 0{,}9515$$

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = -2{,}937$$
$$t_2 = \ \ 4{,}313$$

Por tanto, el coeficiente de V es significativo al 10 por 100, y el de $\sqrt{V}$ al 1°/₀₀. La F de Snedecor vale 196,144, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

4.1.4. *Función potencial.*

Para ajustar por mínimos cuadrados la función potencial deberemos, en primer lugar, linealizar dicha función. De esta manera, la expresión (11) se convierte en:

$$\log X = \log a + b_1 \log V_1 \qquad (15)$$

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (1) y (7) a la expresión (15), tenemos:

$$\log X_0 = 4{,}51031 + 0{,}775949 \log V \qquad (16)$$

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}928085$$

El valor de la t de Student correspondiente al coeficiente log V es:

$$t\ (\log V) = 16{,}4625$$

Por tanto, el nivel de significación es superior al 1°/₀₀.

El valor de la F de Snedecor es 271,014, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

Las cuatro expresiones (12), (13), (14) y (16) explican satisfactoriamente, desde un punto de vista estadstico, la producción de ajos sin clasificar. Se ha elegido como mejor función la forma cuadrática (12), por ser la de más fácil manejo.

4.2. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DE CALIDAD $X_1 = f_1$ (V), correspondiente a la cantidad de ajos de clase súper flor.

4.2.1. *Función cuadrática* (X_1).

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (2) y (7) del cuadro I a la expresión (8), tenemos:

$$X_1 = 3402319 + 12.258\ V - 0{,}05\ V^2 \qquad (17)$$

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}6853$$

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = 2{,}449$$
$$t_2 = -3{,}485$$

Por tanto, el coeficiente de x es significativo al 5 por 100 y el de V^2 es significativo al 1 °/₀₀.

La F de Snedecor vale 21,78, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1 °/₀₀.

4.2.2. *Función tres medios* (X_1).

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (2) y (7) del cuadro I a la expresión (9), tenemos:

$$X_1 = -132{,}1793 + 30{,}215\ V - 1{,}816\ V^{3/2} \qquad (18)$$

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}7074$$

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = 3{,}270$$
$$t_2 = 3{,}817$$

Por tanto, el coeficiente de V resulta significativo al 1 °/₀₀, y el de $V^{3/2}$ al 1 °/₀₀.

La F de Snedecor vale 24,178, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

4.2.3. *Función raíz cuadrada* (X_1).

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (2) y (7) del cuadro II a la expresión (10), tenemos:

$$X_1 = -3916{,}6022 - 41{,}379\ V + 916{,}362\ \sqrt{V} \qquad (19)$$

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}7502$$

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = -5{,}112$$
$$t_2 = 4{,}526$$

Por tanto, ambos coeficientes (el de V y el de $\sqrt{V}$) son significativos al 1°/₀₀.

La F de Snedecor vale 30,03, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

4.2.4. *Función potencial* (X_1).

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (2) y (7) del cuadro II a la expresión (11), tenemos:

$$\log X_1 = 12{,}2497 - 1{,}15421 \log V \qquad (20)$$

El valor del coeficiente de determinación es:

$$t = -4{,}28192$$

l valor de la t de Student correspondiente al coeficiente log v es:

$$\rho^2 = 0{,}466122$$

Por tanto, dicho coeficiente es significativo al 1°/₀₀.

La F de Snedecor vale 18,3349, con lo cual la ecuación resulta significativa al 1°/₀₀.

La función raíz dada por (19) es la que mejor explica la función de calidad $X_1 = f(V_1)$, correspondiente a la producción de ajos de clase súper flor. Por tanto, dicha función es la que utilizaremos en el cálculo de los óptimos económicos.

4.3. Cálculo de la función de calidad $X_2 = f_2(V)$, correspondiente a la cantidad de ajos clase flor.

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (3) y (7) del cuadro II a las expresiones (8), (9), (10) y (11), obtenemos las siguientes funciones de calidad:

$$X_2 = -551{,}655 + 18{,}361\ V - 0{,}045\ V^2 \qquad (21)$$

$$X_2 = -871{,}595 + 32{,}261\ V - 1{,}504\ V^{3/2} \qquad (22)$$

$$X_2 = -3452{,}978 - 23{,}386\ V + 667{,}12 \sqrt{V} \qquad (23)$$

$$\log X_2 = 3{,}976 + 0{,}588 \log V \qquad (24)$$

La función cuadrática dada por (21) es la que se ha elegido como la función que mejor explica la producción de ajos de clase flor. Los "tests" estadísticos que nos han llevado a realizar esta elección son:

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}667$$

Los valores de la t de Student son:

$$t_1 = 4{,}890$$
$$t_2 = -4{,}011$$

Por tanto, ambos coeficientes (el de V y el de V^2) resultan significativos al $1^0/_{00}$.

La F de Snedecor vale 20,024, con lo cual la ecuación es significativa al $1^0/_{00}$.

4.4. Cálculo de la función de calidad $X_3 = f_3(V)$, correspondiente a la cantidad de ajos clase primera.

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (4) y (7) del cuadro II a las expresiones (8), (9), (10) y (11), obtenemos las siguientes funciones de calidad:

$$X_3 = -350{,}477 + 12{,}408\,V - 0{,}003\,V^2 \qquad (25)$$

$$X_3 = -349{,}821 + 12{,}815\,V - 0{,}066\,V^{3/2} \qquad (26)$$

$$X_3 = -368{,}657 + 11{,}009\,V - 13{,}508\,\sqrt{V} \qquad (27)$$

$$\log X_3 = 1{,}044 + 1{,}235 \log V \qquad (28)$$

La forma cuadrática dada por (25) explica muy bien la producción de ajos de la clase primera. Los "tests" estadísticos que nos han llevado a realizar la elección son:

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}846$$

Los valores de la t de Stundent son:

$$t_1 = 1{,}974$$
$$t_2 = -0{,}139$$

Por tanto, el coeficiente de V es significativo al 5 por 100, no resultando, por el contrario, significativo el coeficiente de V^2. Esto implica que la función cuadrática (25) es prácticamente una recta.

La F de Snedecor vale 193,716, con lo cual la ecuación es significativa al 1 $^0/_{00}$.

4.5. Cálculo de la función de calidad $X_4 = f_4(V)$, correspondiente a la cantidad de ajos clase segunda.

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (5) y (7) del cuadro II a las expresiones (8), (9), (10) y (11), obtenemos las siguientes funciones de calidad:

$$X_4 = -182{,}239 + 3{,}659\,V + 0{,}004\,V^2 \qquad (29)$$

$$X_4 = -137{,}171 + 2{,}131\,V + 0{,}142\,V^{3/2} \qquad (30)$$

$$X_4 = 219{,}017 + 8{,}139\,V - 81{,}740\,\sqrt{V} \qquad (31)$$

$$\log X_4 = -2{,}24181 + 1{,}64718 \log V \qquad (32)$$

La función potencial dada por (32) es la que mejor nos explica la producción de ajos de clase segunda. Los "tests" estadísticos que nos han llevado a realizar esta elección son:

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}875086$$

El valor de la t de Student es:

$$t = 12{,}1291$$

Por tanto, el valor del coeficiente es significativo al 1 °/₀₀.

La F de Snedecor vale 137,115, resultando la ecuación, en conjunto, significativa a niveles de 1 °/₀₀.

Nota: Como se puede apreciar en la ecuación (32) y en el gráfico número 1, la función de calidad es creciente en todo el intervalo de variación de v, y lo mismo pasa con la función de calidad marginal. Las razones de este comportamiento las podemos buscar en:

a) El intervalo de variación de V (0,275) fue suficiente para lograr que las funciones de calidad de las clases súper flor, flor, fueran decrecientes, pero no lo fue para las clases primera y segunda y la clase dextrio.

b) Cuando hay poca planta por Ha., los recursos por planta son abundantes y las cabezas tienden a ser de la clase súper flor y flor. Al aumentar las dosis de planta la cabeza tiende a ser menor, en beneficio de la clase segunda y el dextrio. Por otra parte, como la producción total tiende a aumentar (véase el gráfico núm. 1, función X_0) esto provoca otro aumento de las clases primera y segunda y dextrio, fundamentalmente.

c) Si el intervalo de variación hubiera sido más amplio hubieran aparecido rendimientos decrecientes incluso para las clases inferiores. Estos rendimientos hubiesen forzado a que los ajustes fuesen de otro tipo distinto al de Cobb-Douglas.

4.6. Cálculo de la función de calidad $X_5 = f_5 (V)$, correspondiente a la cantidad de ajos de clase dextrio.

Ajustando por mínimos cuadrados los datos de las columnas (6) y (7) del cuadro II a las expresiones (8), (9), (10) y (11), obtenemos las siguientes funciones de calidad:

$$X_5 = 158{,}1737 - 0{,}92\ V + 0{,}019\ V^2 \qquad (33)$$

$$X_5 = 296{,}72890 - 6{,}062\ V + 0{,}643\ V^{3/2} \qquad (34)$$

$$X_5 = 1414{,}9279 + 17{,}836\ V - 287{,}705\ \sqrt{V} \qquad (35)$$

$$\log X_5 = -0{,}606562 + 1{,}40184 \log V \qquad (36)$$

La función potencial dada por (36) es la que mejor nos explica la producción de ajos de clase dextrio. Los "tests" estadísticos que nos han llevado a realizar esta elección son:

El valor del coeficiente de determinación es:

$$\rho^2 = 0{,}955847$$

El valor de la t de Student, correspondiente al coeficiente log V, es:

$$t = 19{,}1517$$

Por lo tanto, dicho coeficiente resulta significativo a niveles inferiores al $1^0/_{00}$.

La F de Snedecor vale 366,790, resultando la ecuación en conjunto significativa a niveles del $1^0/_{00}$.

Las razones que justifican la forma creciente de la función de calidad (36) son las que están expuestas en la nota del apartado (4-5).

5. RESUMEN DE AJUSTES

Los ajustes que mejor explican las producciones de ajos de las distintas clases son:

$X_0 = -688{,}4752 + 48{,}422\ V - 0{,}82\ V^2$

Función de producción de ajos.

$X_1 = -3916{,}6022 - 41{,}379\ V + 916{,}362\ \sqrt{V}$

Función de calidad de la clase súper flor.

$X_2 = -551{,}6553 + 18{,}361\ V - 0{,}045\ V^2$

Función de calidad de la clase flor.

$X_3 = -350{,}4768 + 12{,}408\ V - 0{,}003\ V^2$

Función de calidad de la clase primera.

$$X_4 = 0{,}00573048\ V^{1{,}64718}$$

Función de calidad de la clase segunda.

$$X_5 = 0{,}247422\ V^{1{,}40184}$$

Función de calidad de la clase dextrio.

La representación gráfica de las anteriores ecuaciones está en el gráfico núm. 1.

Las hemos representado todas en un gráfico para compararlas y comprobar que la agregación de las funciones de calidad es la función de producción X_0 (demostración gráfica).

Por otra parte, hemos acotado la zona en donde se llevó a cabo el experimento. Se puede observar que dentro de dicha zona se cumple que la función de producción es la agregada de las funciones de calidad.

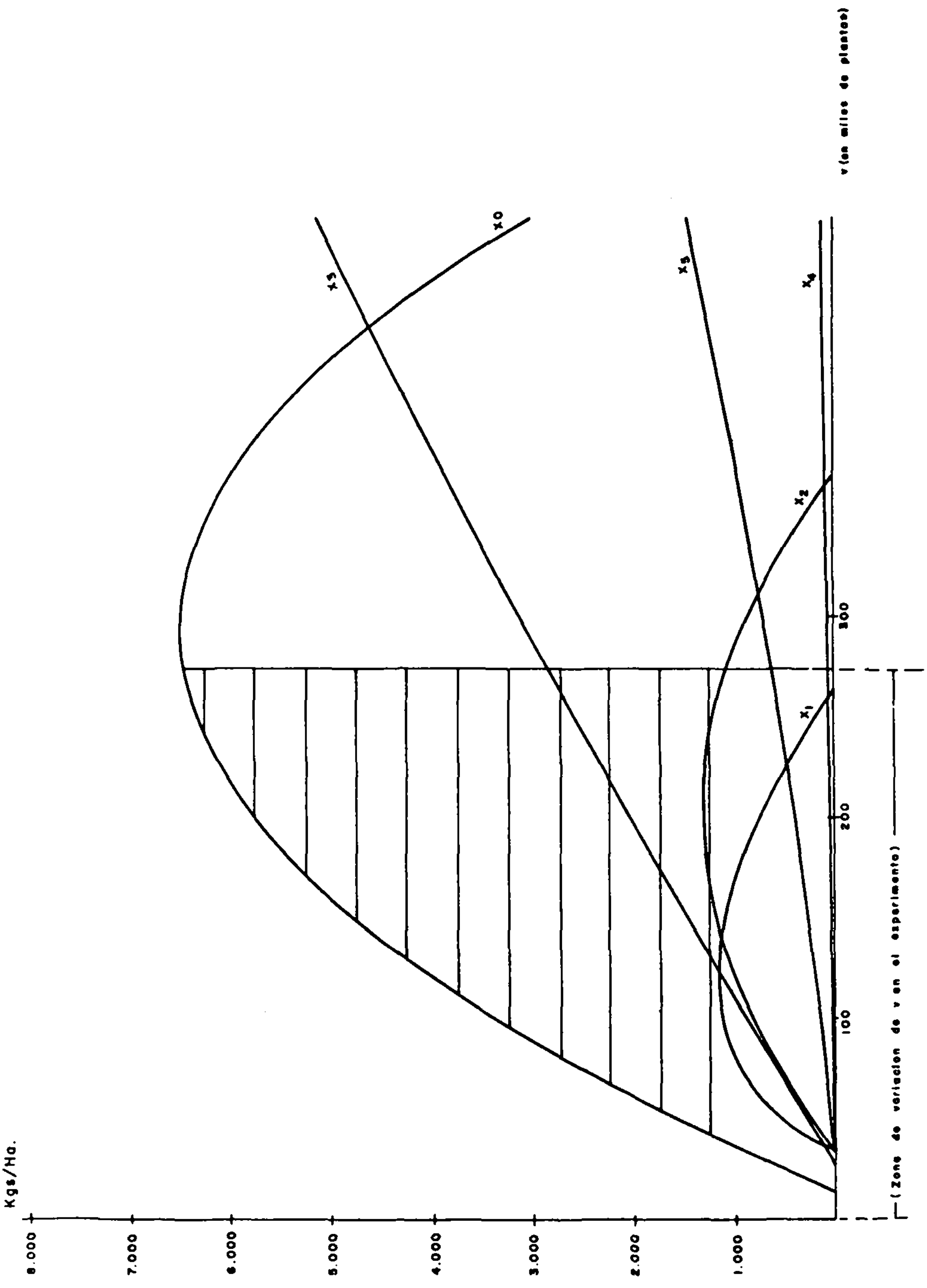

Kgs/Ha.
8.000
7.000
6.000
5.000
4.000
3.000
2.000
1.000
100
200
300
v (en miles de plantas)
(Zona de variacion de v en el experimento)
x0
x1
x2
x3
x4
x5

Gráfico I

Gráfico 2

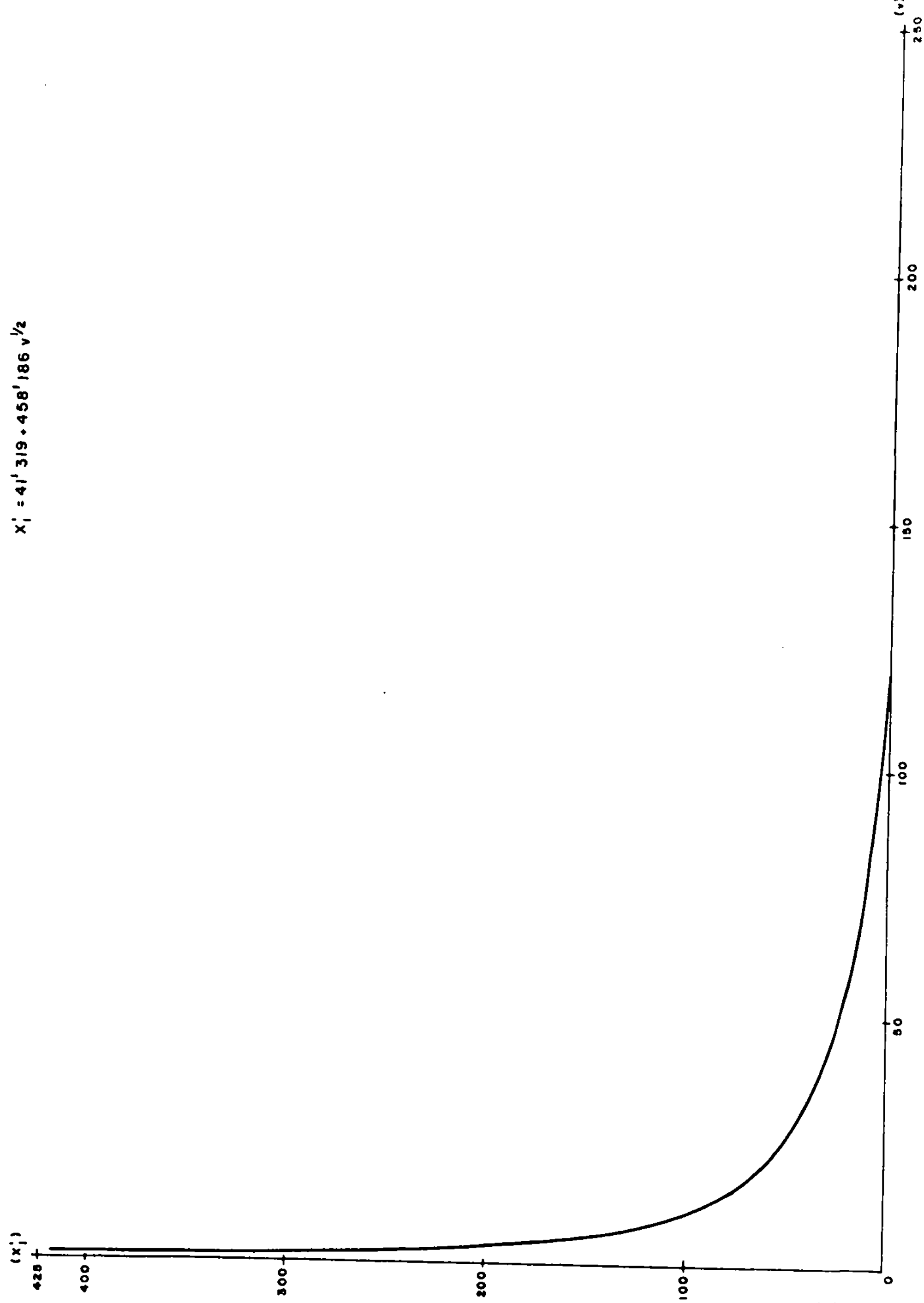


Gráfico 3

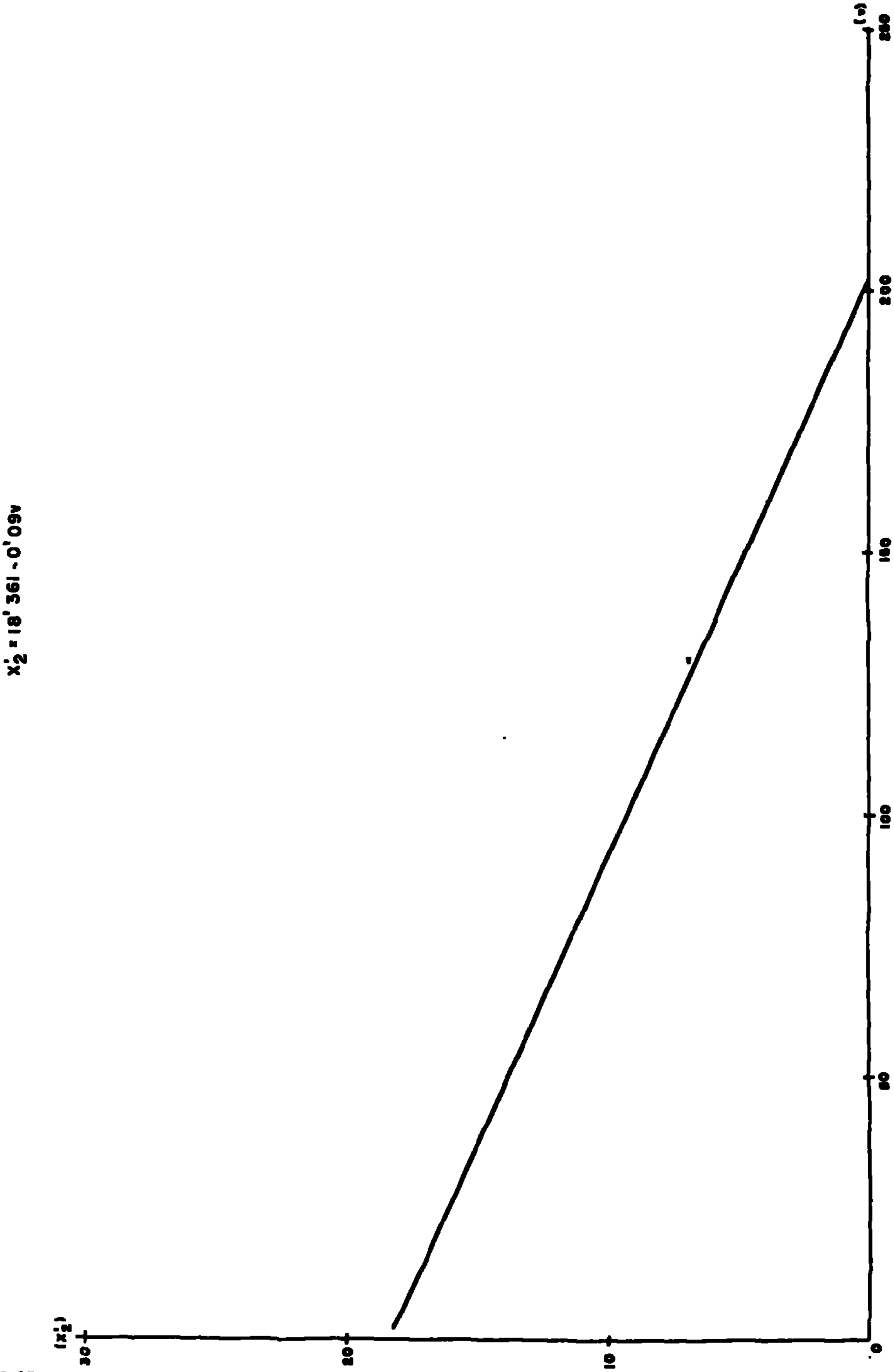


Gráfico 4

$x'_3 = 12'408 - 0'006v$

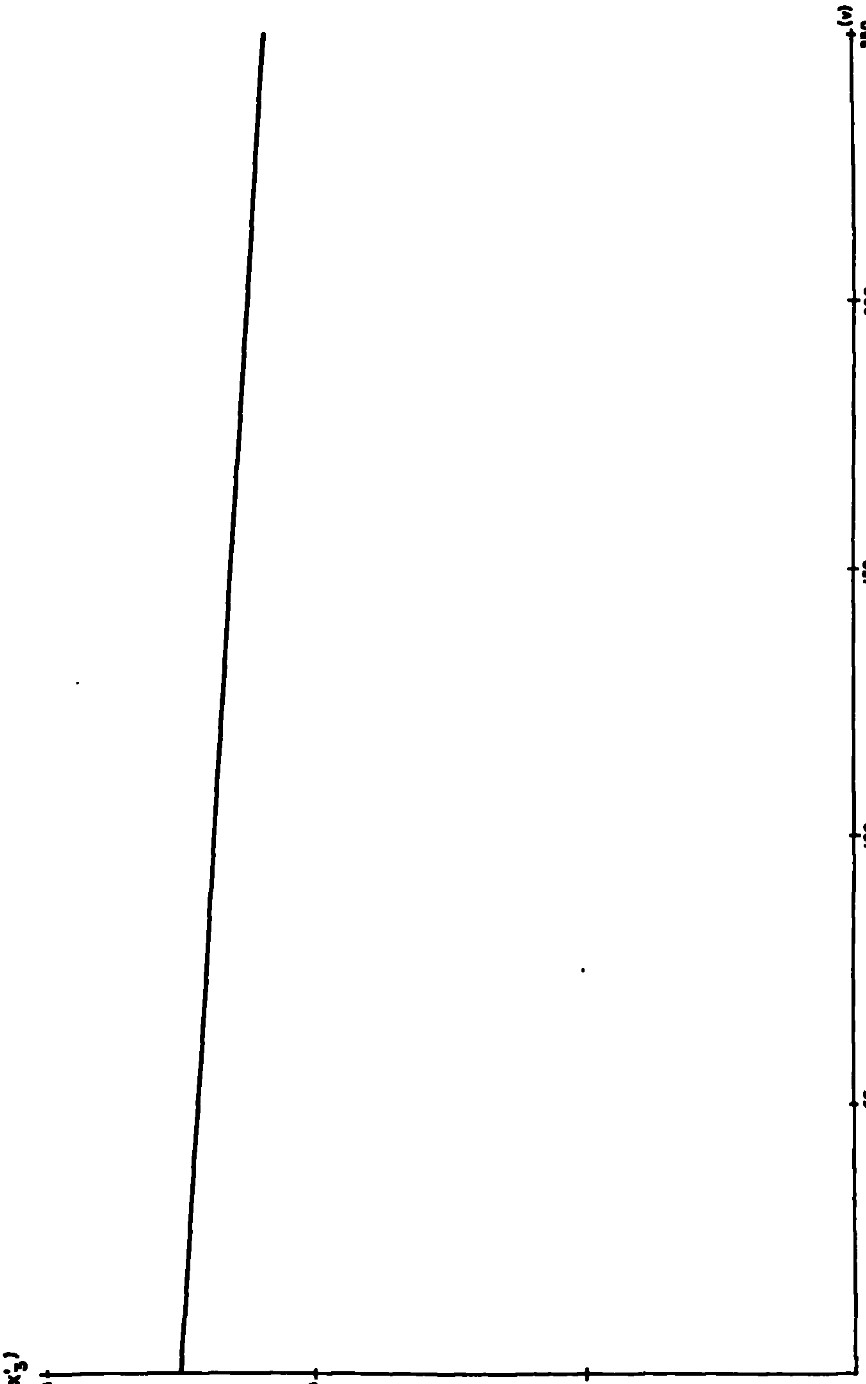


Gráfico 5

$x'_4 = 0'009439\, v^{0'64718}$

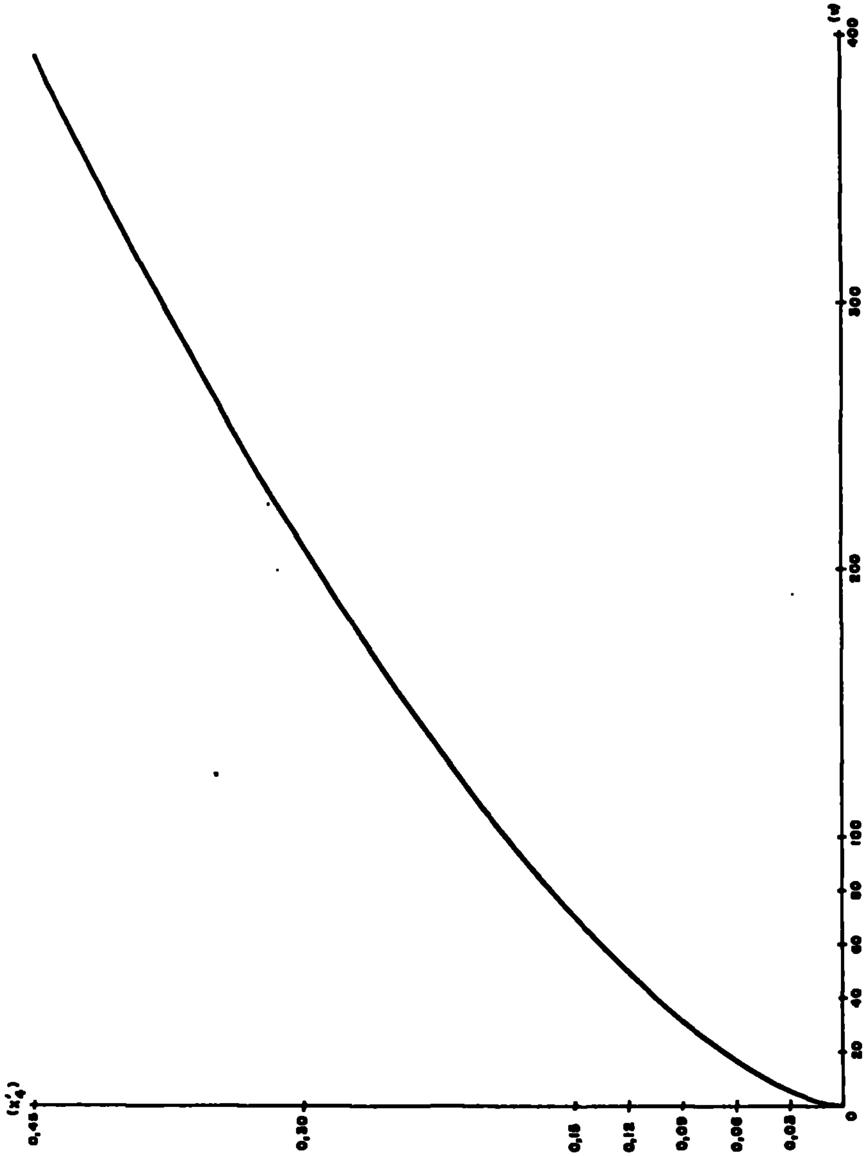
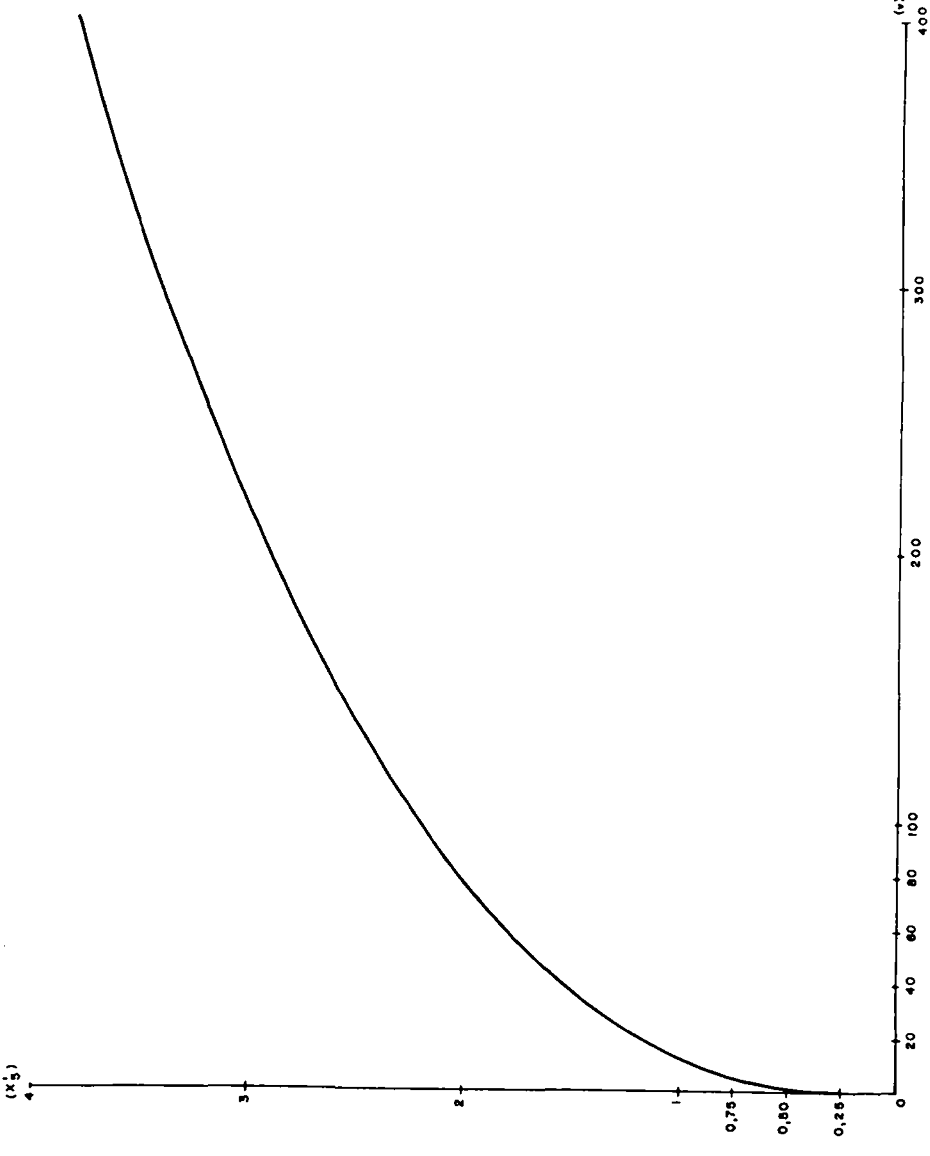


Gráfico 6

$X'_5 = 0'3468 v^{0'40184}$



6. CONTRASTACION DEL MODELO

6.1. Fugciones de calidad marginal

Derivando con respecto a la variable V las funciones de calidad, obtenemos las funciones de calidad marginal.

Derivando, tenemos:

$X'_1 = —41,379 + 458,186\ V^{-1/2}$

Función de calidad marginal de la clase súper flor.

$X'_2 = 18,361 — 0,09\ V$

Función de calidad marginal de la clase flor.

$X'_3 = 12,408 — 0,006\ V$

Función de calidad marginal de la clase primera.

$X'_4 = 0,009439\ V^{0,64715}$

Función de calidad marginal de la clase segunda.

$X'_5 = 0,3468\ V^{0,40184}$

Función de calidad marginal de la clase dextrio.

6.2. Representaciones gráficas

Las funciones de calidad marginal anteriores están representadas en las figuras 2, 3, 4, 5 y 6.

7. CALCULO DE LOS OPTIMOS ECONOMICOS (*)

Sea, por ejemplo, la siguiente estructura de precios:

$P_1 = 60$ = Precio unitario del kilo de ajos clase súper flor.

$P_2 = 40$ = Precio unitario del kilo de ajos clase flor.

(*) Nuestro agradecimiento a los profesores Luis Torres y César Pasamón, del Gabinete de Cálculo de la E. T. S. de Ingenieros Agrónomos de Madrid, por la ayuda prestada en la realización de los cálculos numéricos contenidos en este apartado, así como por la realización de los gráficos de los apartados 5 y 6.

$P_3 = 20$ = Precio unitario del kilo de ajos clase primera.

$P_4 = 10$ = Precio unitario del kilo de ajos clase segunda.

$P_5 = 3$ = Precio unitario del kilo de ajos clase dextrio.

C (coste del millar de planta de ajos) = 343,7 ptas./millar.

Se trata de calcular cuál es el nivel de plantas por Ha. que nos maximiza el beneficio.

Particularizando el sistema (véase apartado 3) para una variable y cinco funciones de calidad, adopta la expresión:

$$C = P_1 f'_1 + P_2 f'_2 + P_3 f'_3 + P_4 f'_4 + P_5 f'_5$$

Sustituyendo en esta expresión precios y funciones de calidad marginal, tenemos:

$$347,7 = 60\ (-41,379 + 458,186\ V^{-1/2}) + 40\ (18,361 - 0,09\ V) + 20$$
$$(12,408 - 0,006\ V) + 10\ (0,009439\ V^{0,64718}) + 3\ (0,3468\ V^{0,40184})$$

Simplificando:

$$O = -1883,81 - 3,72\ V + 27491\ V^{-1/2} + 0,09439\ V^{0,64714} + 1,0404\ V^{0,40184}$$

Calculando el valor que nos anula la anterior ecuación, resulta:

$$V = 135,5825$$

(en miles de plantas por Ha.)

El óptimo económico se ha conseguido para una dosis de aplicación del factor variable V de 135.582 plantas/Ha.

Sin duda, esta dosis es distinta de la que se hubiera conseguido en el caso de haber utilizado únicamente la función de producción X_0 y un precio medio para el kilo de ajos.

Por otra parte, el precio medio hubiera sido difícil de calcular, ya que hubiera sido variable en cada punto. Esto es fácil de demostrar desde un punto de vista de la teoría de la calidad.

8. EL EXPERIMENTO (*)

8.1. Cultivo anterior

El cultivo anterior fue de judías blancas, que se recolectaron en noviembre.

8.2. Labores preparatorias

Se dio una labor vertedera hacia últimos de noviembre. Una labor de grada a principios de diciembre, una labor de rotovador días antes de la siembra y una labor de cultivador para lomear el terreno momentos antes de la siembra.

8.3. Estaquillado

Se formó un cuadrado regular de 15 × 15 metros, el cual se subdividió en 25 cuadrados de 3 × 3 metros cada uno.

8.4. Elección del factor variable

La cantidad de planta se eligió por ser un factor muy fácil de cuantificar, por suponer que variaciones en la cantidad de planta por Ha. ocasionaban variaciones fácilmente cuantificables en las funciones de calidad. Por otra parte, la siembra está muy poco mecanizada, y el factor mano de obra necesario en esta operación hay que contabilizarlo ligado a la planta encareciéndola sensiblemente. En la actualidad, los dientes de ajos se introducen en la tierra uno a uno.

8.5. Siembra y dosis de siembra (cuadro I, parágrafo 4).

El experimento tenía por fin obtener una colección de datos que permitiesen estudiar la relación entre la calidad y cantidad con el factor de calidad y número de plantas.

Se procuró que el número de plantas cubriera toda la zona de variación; así se le hizo variar entre 85.555 plantas Ha. y 275.555 plantas Ha.

(*) Nuestro agradecimiento a don Ulpiano García Bonifacio por habernos proporcionado la parcela donde se llevó a cabo el experimento.

En un principio se pretendió que cada fila de cuadrados tuviera, aproximadamente, el mismo número de plantas, pero esto no fue posible debido a las marras, y cada cuadrado de cada fila tuvo un número de plantas ligeramente distinto (véase cuadro núm. 1).

8.6. Recolección

Los ajos se recolectaron cuadro por cuadro, el haz correspondiente a cada cuadro se iba numerando. La recolección se efectuó arrancando planta por planta con ayuda de una azada.

Normalmente las plantas se arrancan con ayuda de un arado preparado para esta operación; por ser la parcela pequeña, sustituímos el arado por la azada.

8.7. Limpieza y corte de raíces

Esta operación puede marcar el límite entre los procesos de producción y los procesos de comercialización. Muchas veces el ajo se vende antes de realizar esta operación, aunque el comprador la tendrá que efectuar posteriormente.

Si el ajo se vende a través de una cooperativa, ésta suele exigir a los socios la limpieza y corte de raíces.

Esta operación, como las demás que rodean al ajo, está aún poco mecanizada y necesita mucha mano de obra. Una vez realizada se embasan en unas cajas de poco fondo, y de esta manera se llevan a la clasificadora. Esta operación puede empezar a realizarse a los quince o veinte días después de haberlos arrancado; es decir, de mediados a últimos de julio. La operación la realizan mujeres y muchachos jóvenes.

8.8. Clasificación

Esta operación está totalmente mecanizada. Se realiza mediante una cinta clasificadora. En esta cinta los ajos van cayendo según el volumen de sus cabezas a los sacos correspondientes a las clases: súper flor, flor primera, segunda y dextrio.

Las cinco calidades están definidas de acuerdo con unas normas que acotan el volumen de las cabezas (véase la definición de clases).

9. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

[1] ABRAHAM, T. P. (1965): *Optimal fertilizar dressings and economics.* "Indian Journal Agricultural Economic", núm. 20, págs. 1-20.

[2] ANTILL, A. G. (1955): *Towards a production function for dairy farms.* "The Farm Economist", núm. 8, págs. 1-11.

[3] BALLESTEROS, E. (1975): *Principios de economía de la empresa.* Alianza Universidad.

[4] BRONFENBRENNER, M. (1944): *Production function: Cobb-Douglas, interfirm, intrafirm.* "Econometrica", núm. 12, págs. 35-44.

[5] BROWN, W. G., and ARSCOTT, G. H. (1960): *Animal production functions and optimum ration specifications.* "Journal Farm Economics", núm. 42, págs. 69-78.

[6] CARLSON, S. (1939): *A study on the pure theory of production.* New York: Kelley and Mac Millman.

[7] DILLON, J. L. (1968): *The analysis of response in crop and livestock productions.* Pergamon Press.

[8] DOLL, J. P.; JEBE, E. H., and MUNSON, R. C. (1960): *Computation of varance estimator for marginal physical products and marginal rates of substitution.* "Journal Farm Economics", núm. 42, págs. 596-607.

[9] FRISCH, H. (1963): *Las leyes técnicas y económicas de la producción.* Sagitario, S. A.

[10] FULLER, W. A. (1976): *Some topics in production function analysis.* J. L. Dillon (Ed.), "Agricultural Production Economics in the 1960's".

[11] HEADY, EARL O. (1957): *An econometric investigation of the technology of agricultural production functions.* "Econometrica", núm. 25, págs. 249-268.

[12] HEADY, EARL O. (1958): *Output in relation to input, for the agricultural industry.* "Journal Farm Economics", núm. 40, págs. 393-406.

[13] HEADY, E. O., and DILLON, J. L. (1961): *Agricultural production functions.* Iowa State Univ. Press, Ames.

[14] HOCH, Irving (1958): *Simultaneus equation bias in tre context of the Cobb-Douglas production function.* "Econometrica", núm. 26, págs. 566-579.

[15] MUNDLAR, Y. (1964): *Transcendetal multiproduct production functions.* "International Economic Reviw", núm. 5, págs. 273-284.

[16] VALDÉS, A. (1966): *Análisis económico del uso de fertilizantes en trigo, maíz y papas.* Facultad de Agronomía, Universidal Católica de Chile, Santiago.

[17] WALLIS, K. (1976): *Introducción a la Econometría.* Alianza Universidad.