Volumen VI.—Núm. 3.—Septiembre-Diciembre 1955
REVISTA DE ECONOMIA POLITICA

EL PROCESO DE AJUSTE DE LOS PRECIOS DE LOS BIENES DE DEMANDAS CONEXAS

I.—*Observaciones previas.*

El presente trabajo tiene por objeto poner de relieve la forma en que se desarrollan los procesos de ajuste de los precios de dos bienes, que están ligados por una relación de complementariedad o de sustitución en cuanto a la demanda, y mostrar que el proceso es convergente si las funciones de demanda cumplen las condiciones de estabilidad. Queda, de esta forma, patente la doble significación de dichas condiciones, que no sólo han de cumplirse para que el equilibrio sea tal que al producirse alguna alteración en el sistema se despierten fuerzas que lo conduzcan a la antigua situación, sino que han de ser satisfechas, también, para que las alteraciones que se produzcan en los precios no desencadenen un proceso explosivo, sino más bien un movimiento amortiguado, en el que las variaciones que sucesivamente se vayan desarrollando sean cada vez de menor entidad.

* * *

Las funciones de demanda individuales, obtenidas en la estática económica mediante el sistema del equilibrio general, dependen de los precios de todos los bienes y de la renta del sujeto, es decir,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1 (p_1 , p_2 , \dots p_n , r) \\
x_2 &= f_2 (p_1 , p_2 , \dots p_n , r) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= f_n (p_1 , p_2 , \dots p_n , r)
\end{aligned}
$$

Sabido es que según la moderna Teoría, establecida a partir de la fórmula de Slutsky, las relaciones existentes entre los bienes están dadas por el sentido del efecto de sustitución (1), el cual expresa la relación que liga a la variación del precio de uno de los bienes con la provocada en la cantidad demandada de otro.

Este efecto de sustitución es de carácter global y expresa, por tanto, la variación de la cantidad demandada de un bien al variar el precio de otro, pero teniendo en cuenta no sólo la relación directa o inmediata entre ambos bienes, sino también las indirectas o mediatas, establecidas a través de todos los demás que intervienen en el sistema (2).

Una simplificación habitual en el análisis de la relación entre dos bienes, sobre todo cuando se trata de obtener experimentalmente funciones de demanda de bienes conexos, o de explicar la relación entre los mismos, consiste en aceptar que la cantidad demandada de cada uno de los bienes depende solamente de los precios de ambos y de la renta.

Aun cuando con esta simplificación se considere un sistema de solamente dos bienes, se sigue suponiendo que pertenece a otro más amplio, que no es objeto de análisis en su totalidad. De lo contrario, no se podría examinar la relación existente entre aquellos dos bienes, pues habría de ser, siempre, necesariamente, de carácter sustitutivo.

Las simplificaciones indicadas son las que ofrece Schultz en una parte de su obra monumental (3), en la que, para mayor sencillez, supone que las funciones son lineales y adoptan, por tanto, la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}\, p_1 + c_{12}\, p_2 + c_{1r}\, r + h_1 \\ x_2 &= c_{21}\, p_1 + c_{22}\, p_2 + c_{2r}\, r + h_2\,. \end{aligned} \qquad [1.1]$$

Con las simplificaciones y supuestos que se acaban de exponer, más el adicional de que los efectos de renta son despreciables con

(1) Véase CASTAÑEDA, J., *Lecciones de Teoría Económica*, en curso de publicación, pág. 154.

(2) Idem íd., pág. 158.

(3) SCHULTZ, H., *The Theory and Measurement of Demand*, Chicago, 1938, páginas 576 y 621.

respecto a los de sustitución, los coeficientes de las funciones [1.1] han de cumplir las condiciones que a continuación se indican:

$$\left.\begin{matrix} c_{11} < 0 \\ c_{22} < 0 \end{matrix}\right\} \text{ por tratarse de funciones de demanda} \qquad [1.2]$$

$$\left.\begin{matrix} c_{12} > 0 \\ c_{21} > 0 \end{matrix}\right\} \text{ si los bienes son sustitutivos} \qquad [1.3]$$

$$\left.\begin{matrix} c_{12} < 0 \\ c_{21} < 0 \end{matrix}\right\} \text{ si los bienes son complementarios} \qquad [1.4]$$

La formulación de estos dos últimos grupos de condiciones envuelve la significación de que las relaciones existentes entre los bienes se caracterizan por medio del efecto total, en lugar de por el efecto de sustitución, es decir, se considera la "complementariedad" o "sustituibilidad" brutas, en lugar de las "verdaderas" o netas (4).

El sistema [1.1] se puede expresar, empleando la notación matricial, del siguiente modo:

$$\begin{Vmatrix} x_1 - c_{1r}\, r - h_1 \\ x_2 - c_{2r}\, r - h_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix} \qquad [1.5]$$

o, en forma abreviada,

$$x - c_r\, r - h = C\, p,$$

expresión en la que C representa la matriz de los coeficientes de p_i en el sistema [1.1].

Sabido es que del sistema [1.5] se puede deducir aquel en que los precios son función de las cantidades y de la renta, puesto que se cumple

$$p = C^{-1}(x - c_r\, r - h)$$

expresión en la que C^{-1} designa a la matriz inversa de la C y que, expuesta en forma matricial, sería:

(4) V. Mosak, J. L., *General Equilibrium Theory in International Trade*, Bloomington, 1944, pág. 33.

$$\left\| \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{c_{22}}{|C|} & \frac{-c_{12}}{|C|} \\ \frac{-c_{21}}{|C|} & \frac{c_{11}}{|C|} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 - c_{1r}\, r - h_1 \\ x_2 - c_{2r}\, r - h_2 \end{matrix} \right\| , \qquad [1.6]$$

que da lugar al sistema

$$\begin{aligned} p_1 &= b_{11}\ x_1 + b_{12}\ x_2 + b_{1r}\, r + a_1 \\ p_2 &= b_{21}\ x_1 + b_{22}\ x_2 + b_{2r}\, r + a_2 \end{aligned} \qquad [1.7]$$

en el que los coeficientes guardan, con los del sistema [1.1], las siguientes relaciones:

$$b_{11} = \frac{c_{22}}{|C|} \qquad b_{12} = \frac{-c_{12}}{|C|}$$

$$b_{1r} = - \frac{\begin{vmatrix} c_{1r} & c_{12} \\ c_{2r} & c_{22} \end{vmatrix}}{|C|} \qquad a_1 = - \frac{\begin{vmatrix} h_1 & c_{12} \\ h_2 & c_{22} \end{vmatrix}}{|C|} \qquad [1.8]$$

$$b_{21} = - \frac{c_{21}}{|C|} \qquad b_{22} = \frac{c_{11}}{|C|}$$

$$b_{2r} = - \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{1r} \\ c_{21} & c_{2r} \end{vmatrix}}{|C|} \qquad a_2 = - \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & h_1 \\ c_{21} & h_2 \end{vmatrix}}{|C|} . \qquad [1.9]$$

Las condiciones de estabilidad del sistema [1.1] son las siguientes (5):

$$\begin{matrix} c_{11} < 0 \\ c_{22} < 0 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 . \qquad [1.10]$$

De ellas se deduce, teniendo en cuenta las [1.8] y [1.9], que

$$b_{11} < 0 \qquad b_{22} < 0 . \qquad [1.11]$$

---

(5) V. Hicks, J. R., *Value and Capital*, 2.ª edic., Oxford, 1950, pág. 315.

Si los bienes son sustitutivos brutos en sentido directo, se han de cumplir las condiciones [1.3], o sea, $c_{12} > 0$ y $c_{21} > 0$, y, por tanto, resulta

$$b_{12} < 0 \qquad b_{21} < 0. \tag{1.12}$$

Si los bienes son complementarios brutos en sentido directo, se han de cumplir las condiciones [1.4], o sea, $c_{12} < 0$, $c_{21} < 0$, y, por tanto, se obtiene

$$b_{12} > 0 \qquad b_{21} > 0. \tag{1.13}$$

Las condiciones [1.11] expresan que las curvas de demanda de los dos bienes, empleadas habitualmente en la técnica del equilibrio parcial, son decrecientes al aumentar la cantidad.

Si se acepta la caracterización empleada por Mosak (6), según la cual el bien X_i es sustitutivo o complementario bruto en sentido inverso del bien X_j, según que un aumento en la cantidad de aquél produzca una disminución o un aumento del precio de éste, o sea, según que

$$\frac{\delta p_j}{\delta x_i} \lessgtr 0$$

las expresiones [1.12] y [1.13] ponen de relieve que si los dos bienes son complementarios o sustitutivos brutos en sentido directo, lo son también en sentido inverso.

Es conveniente recordar que esta reciprocidad solamente se da en un sistema de dos bienes como el que se está analizando. Si el sistema fuera de tres o más no existiría la reciprocidad señalada, aun cuando el sistema fuera simétrico y se cumplieran las condiciones de estabilidad perfecta. Esto se debe a que $\frac{\delta p_i}{x_j}$ vendría dada por una fracción, cuyo denominador sería el jacobiano del sistema, del cual se puede conocer el signo, merced a las condiciones de estabilidad; pero, en cambio, el numerador sería un menor, no principal, de orden $n-1$, cuyo signo no puede ser establecido con carácter necesario.

---

(6) MOSAK, J. L., *Op. cit.*, pág. 46.

Sabido es que las propiedades del término de sustitución son también aplicables a las demandas colectivas y que las relaciones entre dos bienes pueden caracterizarse en esta esfera por el signo de dicho efecto igual que en el campo individual. Asimismo, también en el colectivo se pueden considerar las relaciones de complementariedad o sustitución de carácter bruto en lugar de las netas.

Por estas razones, todo lo hasta aquí expuesto es aplicable aun en el caso de que consideremos que las funciones de demanda [1.1] o [1.7] son colectivas y las utilicemos para analizar las relaciones existentes entre dos bienes, no en el dominio de lo individual, sino en la esfera de lo colectivo.

II.—*Relaciones entre los precios de dos bienes de demandas conexas.*

Cuando se efectúa el análisis de las relaciones existentes entre los precios de dos bienes, es habitual valerse de los esquemas del equilibrio parcial. Así, si el precio del bien X_1 se eleva por haber disminuído su oferta pasando de $O^1{}_1$ a $O^2{}_1$ (figuras 1 y 2), esta elevación del precio p_1 producirá un desplazamiento de la demanda del bien X_2, que pasará de la posición $D^1{}_2$ a la $D^2{}_2$, aumentando la demanda si los bienes son sustitutivos. Como la oferta del bien X_2 se supone invariable, el resultado final es que el precio del bien X_2 aumenta también.

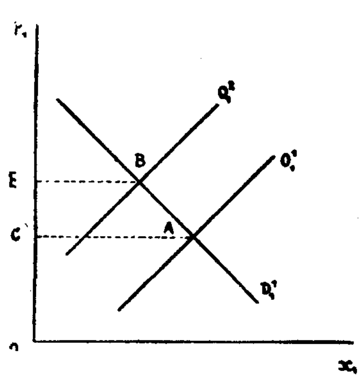

Figura 1.

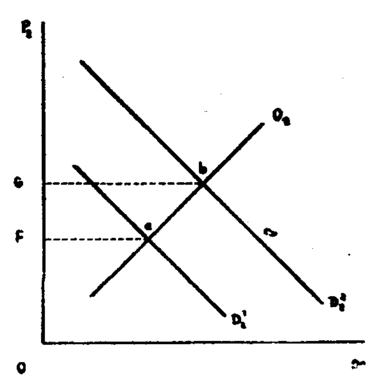

Figura 2.

Por el contrario, si los bienes son complementarios (figuras 3 y 4), el desplazamiento de la demanda del bien X_2, debido a una elevación del precio p_1, tiene lugar en sentido contrario, es decir, con disminución de ésta, pasando de la posición $D^1{}_2$ a la $D^2{}_2$, con el resultado final de que el precio del bien X_2 ha experimentado un descenso de O F a O G, frente a la subida de p_1 de O C a O E.

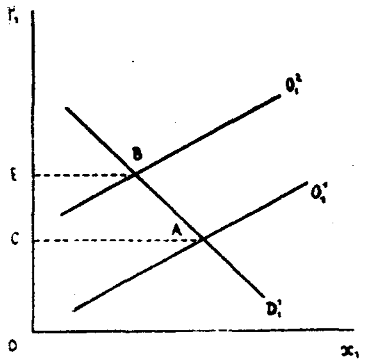

Figura 3.

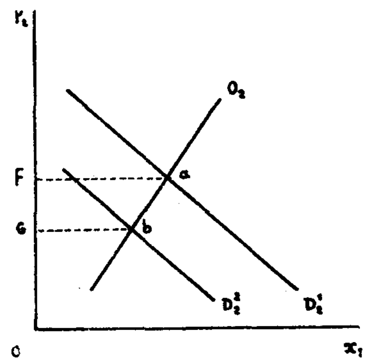

Figura 4.

Mas el equilibrio parcial encierra en sí una limitación, debida precisamente al hecho de no considerar todas las magnitudes que intervienen en los fenómenos. Así ocurre que al analizar mediante dicha técnica el problema que estudiamos, se supone que la demanda del bien X_1 es solamente función de su propio precio, p_1, y se prescinde de las demás variables de que depende, por lo que las conclusiones obtenidas pueden ser total o parcialmente erróneas.

Vamos a examinar, por tanto, cuáles son los supuestos que introduce el equilibrio parcial, para decidir si conviene o no tener en cuenta alguna relación más, que pueda ser fundamental en el análisis del problema.

Si en las ecuaciones [1.1] del *apartado I* consideramos a la renta, *r*, como constante, las funciones de demanda se transformarán en las

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}\, p_1 + c_{12}\, p_2 + m_1 \\ x_2 &= c_{21}\, p_1 + c_{22}\, p_2 + m_2 \end{aligned} \qquad [2.1]$$

o, para mayor generalidad, y refiriéndonos a funciones cualesquiera

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 (p_1 , p_2) \\ x_2 &= f_2 (p_1 , p_2) . \end{aligned} \qquad [2.2]$$

Es, en nuestro caso, del mayor interés la relación funcional existente entre la cantidad demandada de un bien y los precios de ambos y, por ello, ha de ser tenida continuamente en cuenta, cuando al efectuar las representaciones gráficas en dos dimensiones, solamente aparezca de forma inmediata la relación existente entre dos variables.

Así, al representar, a la primera de las funciones por medio de una curva (7), hemos de suponer que se ha dado a p_2 un valor determinado. Análogamente, si se efectúa la representación de la segunda de dichas funciones, previamente se habrá dado un valor a p_1.

Dicho de otra forma. Cada una de las expresiones [2.2] representa una familia de curvas en que el parámetro es el precio del otro bien. Por esta razón es necesario determinar cuáles son las curvas de demanda que se corresponden, ya que, evidentemente, en una situación dada, solamente tendrán existencia simultánea una de cada familia. Para ello es preciso conocer el sistema de precios de la posición de equilibrio, y éste vendrá dado por el doble sistema que forman cada función de demanda y la correspondiente función de oferta.

Si, como suponemos, las relaciones entre los dos bienes se dan únicamente en el lado de la demanda, consideraremos que las cantidades ofrecidas de los respectivos bienes son función únicamente de sus propios precios, de forma que

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1 (p_1) \\ x_2 &= F_2 (p_2) . \end{aligned} \qquad [2.3]$$

Por todo lo expuesto, los precios de equilibrio vendrán dados por los sistemas de ecuaciones

---

(7) Para mayor claridad de los esquemas, en las representaciones gráficas emplearemos rectas.

$$\begin{cases} x_1 = f_1\,(p_1\,,\,p_2) \\ x_1 = F_1\,(p_1) \end{cases} \qquad [2.4]$$

y

$$\begin{cases} x_2 = f_2\,(p_1\,,\,p_2) \\ x_2 = F_2\,(p_2)\,. \end{cases} \qquad [2.5]$$

Llevados estos precios a las funciones de demanda quedará unívocamente determinada una curva de cada una de las familias, que designaremos por las características $f^1{}_1$ y $f^1{}_2$. Las posiciones de equilibrio vendrán dadas por los sistemas

$$\begin{cases} x_1 = f^1{}_1\,(p_1) \\ x_1 = F_1\,(p_1) \end{cases} \qquad [2.6]$$

y

$$\begin{cases} x_2 = f^1{}_2\,(p_2) \\ x_2 = F_2\,(p_2)\,. \end{cases} \qquad [2.7]$$

Así, por ejemplo, en las figuras 5 y 6, la posición $D^1{}_1$, de la curva de demanda del bien X_1 se establece para un precio deter-

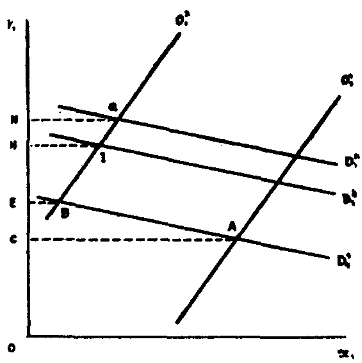

Figura 5.

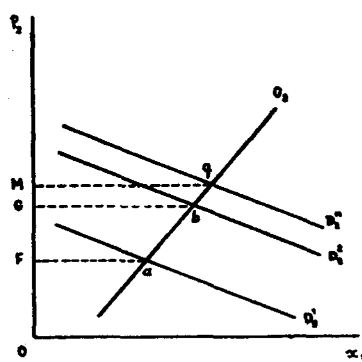

Figura 6.

minado de X_2, que es precisamente el O F, correspondiente al punto a de equilibrio en el segundo mercado, obtenido por la intersección de la curva de oferta O_2 con la de demanda $D^1{}_2$. La posición de ésta queda a su vez establecida por el precio O C del bien X_1 determinado por la intersección de la curva de oferta $O^1{}_1$ con la de demanda $D^1{}_1$.

Si, por cualquier razón, la curva de oferta del bien X_1 se desplaza y toma la posición $O^2{}_1$, se formará un nuevo punto de equilibrio, el B, al que corresponde el precio O E, que vendrá dado por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f^1{}_1\ (p_1) \\ x_1 = F^2{}_1\ (p_1)\ . \end{array} \right. \qquad [2.8]$$

Al precio así formado corresponderá una nueva curva de demanda del bien X_2. Mas ¿en qué sentido se habrá producido la traslación de la curva?

Depende de la relación que exista entre los bienes. Si ésta es de carácter sustitutivo en sentido bruto, se cumple, según hemos visto en el *apartado* 1, que

$$\frac{\delta x_2}{\delta p_1} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\delta x_1}{\delta p_2} > 0 \qquad [2.9]$$

y, por tanto, al aumentar p_1 ha de aumentar la cantidad demandada de X_2. En consecuencia, el desplazamiento de la curva de demanda del bien X_2 se realizará hacia la derecha y dicha curva vendrá a tomar la posición $D^2{}_2$ de la figura 6.

El nuevo precio de equilibrio en el mercado del bien X_2 vendrá dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = f^2{}_2\ (p_2) \\ x_2 = F_2\ (p_2) \end{array} \right. \qquad [2.10]$$

y será el O G.

Se deduce de lo expuesto que a un aumento del precio p_1 de O C corresponde un aumento del precio p_2 de O F a O G. Y podría considerarse, también, que los nuevos puntos de equilibrio son los B y *b*.

Pero sería equivocado considerar resuelto el problema de esta forma, ya que el proceso no termina en estos dos puntos. El *b* se forma para el precio O G del bien X_2, al cual no corresponde la curva $D^1{}_1$, por lo que el punto B no puede ser de equilibrio simultáneo con el *b*, ya que de serlo quedaría rota la correspondencia que más arriba hemos subrayado entre cada curva de demanda de un bien y el precio del otro.

La elevación de p_2 de O F a O G, dará lugar, de acuerdo con [2.9], a un desplazamiento hacia la derecha de la curva de demanda del bien X_1, la cual pasará a ocupar otra nueva posición, la $D^2{}_1$, por ejemplo, con lo que se tendrá un nuevo punto de equilibrio, el I, con el precio O H.

Se ve así cómo la alteración del precio p_1 no solamente influye en la situación de la curva de demanda del bien X_2, sino que también al originar la variación del precio, p_2 de este último bien, produce, por repercusión, una modificación de la posición de la curva de demanda de X_1.

El paso del antiguo precio de este bien, O E al nuevo O H, volverá a producir una traslación de la curva de demanda del bien X_2 y así continúa el proceso con sucesivas modificaciones alternativas del precio de un bien y traslaciones de la curva de demanda del otro, hasta que se llega a una situación final, de equilibrio simultáneo en ambos mercados, en la que se da una doble correspondencia entre el precio de un bien y la curva de demanda del otro y el precio de este último y la curva de demanda del primero.

Esta situación vendrá dada por los sistemas

$$\begin{cases} x_1 = f_1 \ (p_1, p_2) \\ x_1 = F^2{}_1 (p_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = f_2 \ (p_1, p_2) \\ x_2 = F_2 \ (p_2) \end{cases} \qquad [2.11]$$

y para ella se formarán los precios $p^n{}_1$ y $p^n{}_2$, que son los que llevados a las funciones de demanda de los bienes X_2 y X_1, respectivamente, dan lugar a las funciones de demanda (8)

(8) Los índices altos indican distintos valores de las variables, o distintas formas de las características de las funciones.

$$x_1 = f^n{}_1\ (p_1) \qquad \text{y} \qquad x_2 = f^n{}_2\ (p_2)\ . \qquad [2.12]$$

La situación es la reflejada en las figuras 5 y 6 por los puntos Q de intersección de las rectas $D^n{}_1$ y $O^2{}_1$, y q de corte de las $D^n{}_2$ y O_2, a los que corresponden los precios O N y O M.

Los distintos valores que a lo largo del proceso irán tomando p_1 y p_2 seguirán unas leyes de recurrencia, determinadas a partir de las funciones de demanda y de oferta de ambos bienes; las condiciones de convergencia de las sucesiones así halladas, serán las que muestren que el proceso es amortiguado y que existe la posición de equilibrio final a que antes nos hemos referido.

La obtención de las leyes de recurrencia, y de las condiciones de convergencia será efectuada en el *apéndice* del presente trabajo, sin perjuicio de que en el siguiente *apartado,* se ofrezca una prueba intuitiva de dicha convergencia, desarrollada con el empleo de las funciones de demanda en que los precios son las variables dependientes y la consideración de las condiciones de estabilidad analizadas en el *apartado I.*

Dada por supuesta, de momento, aquella propiedad, podemos afirmar que la elevación del precio de uno de los bienes provoca un aumento del precio del otro bien y que las reacciones secundaria y de órdenes sucesivos, que tienen una intensidad cada vez menor, no alteran los sentidos de dichas variaciones, por lo que se deduce con carácter general, que los precios de los bienes sustitutivos varían en la misma dirección.

* * *

Si en lugar de considerar el caso de los bienes sustitutivos nos referimos a aquel en que la relación existente entre las demandas es de carácter complementario, se ha de verificar que

$$\frac{\delta\ x_2}{\delta\ p_1} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\delta\ x_1}{\delta\ p_2} < 0. \qquad [2.13]$$

Por tanto, a un aumento de p_1 sigue un desplazamiento de la curva de demanda del bien X_2 hacia la izquierda. En las figuras 7 y 8 el aumento de p_1 de O C a O E produce la traslación de $D^1{}_2$ a $D^2{}_2$ con la consiguiente disminución del precio de X_2 de O F a O G.

En virtud de [2.13] a esta disminución de p_2 corresponde una traslación hacia la derecha de la curva de demanda de X_1 que de $D^1{}_1$ pasa a $D^2{}_1$. El precio pasa, pues, de O E a O H.

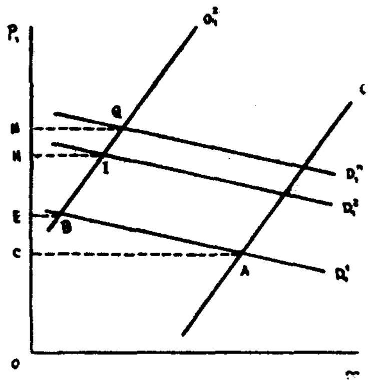

Figura 7.

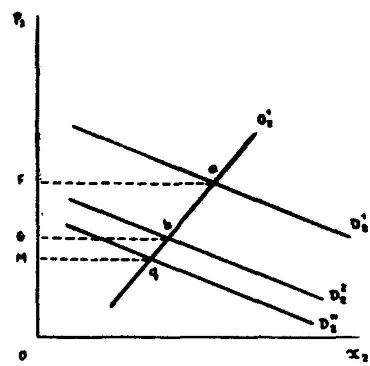

Figura 8.

Por la razón expuesta al tratar de los bienes sustitutivos, el proceso no se termina aquí, sino que prosigue, hasta llegar a una situación de equilibrio simultáneo en ambos mercados, tal como la representada por los puntos Q y q, con los precios O N y O M, respectivamente.

No repetimos, por no pecar de reiterativos, las observaciones efectuadas anteriormente en cuanto a las leyes de recurrencia y a las condiciones de amortiguamiento.

La elevación del precio de un bien produce, pues, cuando está ligado con otro por una relación de complementariedad por parte de la demanda, una disminución del precio de este último y las reacciones de órdenes sucesivos que tienen una intensidad cada vez menor, refuerzan el sentido de dichas variaciones.

III.—*Las relaciones inversas y el amortiguamiento del proceso.*

En el *apartado* que antecede se ha examinado el desarrollo del proceso que la variación del precio de un bien desencadena en el mercado de otro que esté relacionado con él por simples lazos de complementariedad o de sustitución en cuanto a la demanda, y para ello se han utilizado las funciones de demanda en que las cantidades dependen de los precios de ambos productos, es decir, las del sistema [1.1] o, en el caso de mayor generalidad, las del [2.2].

Pero si las funciones empleadas fueran aquellas en que los precios de los bienes dependen de las cantidades demandadas, tales como las del sistema [1.7], o, para mayor generalidad, como las del sistema

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1 \ (x_1 \, , \, x_2) \\ p_2 &= \varphi_2 \ (x_1 \, , \, x_2) \end{aligned} \qquad [3.1]$$

las traslaciones de las que denominaremos "curvas de demanda inversas" tendrían lugar, en determinados casos, en sentido contrario a las que se han expuesto en el *apartado* anterior, ya que, según se ha visto en el *apartado I*, aun cuando la relación directa existente entre los bienes se conserve al pasar a las relaciones inversas, los signos de $\frac{\delta f_1}{\delta p_2}$ y $\frac{\delta f_2}{\delta p_1}$ son, precisamente por ello, contrarios a los de $\frac{\delta \varphi_1}{\delta x_2}$ y $\frac{\delta \varphi_2}{\delta x_1}$.

Conviene observar, que cada una de las funciones del sistema [3.1] representa una familia de curvas en que el parámetro es la cantidad del otro bien y que, por tanto, existe entre las curvas de ambas familias una correspondencia análoga a la que se ha puesto de manifiesto para el caso examinado en el *apartado II*.

Por las razones antes expuestas conviene analizar cuál es la forma en que se desarrolla el proceso en este caso, pero, además, esta consideración de las "curvas de demanda inversas" nos ha de permitir demostrar en qué condiciones es amortiguado el proceso, según anunciamos en el *apartado II.*

Para ello es preciso determinar, en primer lugar, cuál es la posición relativa de las curvas de demanda "directa" e "inversa" y nos vamos a referir, como en el *apartado I,* al caso en que son rectilíneas. Así vamos a demostrar que si se cumplen las condiciones de estabilidad [1.10], la "recta de demanda inversa" en el plano $p_1\ x_1$, deducida del sistema [1.7], tiene una pendiente mayor en valor absoluto que la que representa en el mismo plano a la "directa", obtenida a partir del sistema [1.1]. Por tanto, las rectas de demanda han de adoptar la posición que se indica en la figura 9 y no la que se muestra en la figura 10.

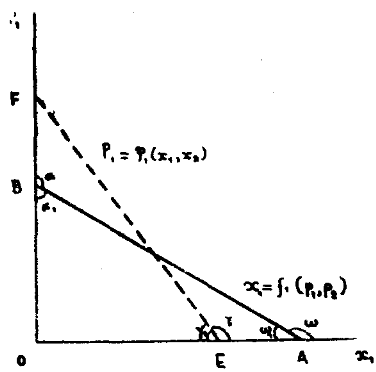

Figura 9.

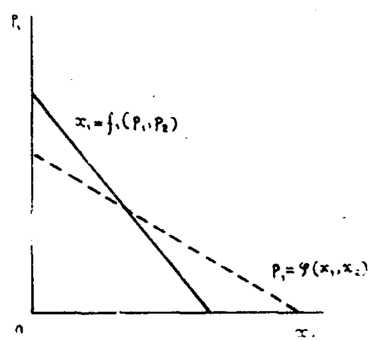

Figura 10.

Para probarlo vamos a ver que la recta E F tiene una pendiente mayor en valor absoluto que la A B, o sea que el ángulo γ_1 es mayor que el ω_1 y, por tanto, $\omega > \gamma$.

En efecto, cualquier recta de la familia $p_1 = \varphi_1\ (x_1\ ,\ x_2)$, tiene por ecuación

$$p_1 = b_{11}\ x_1 + (b_{12}\ x_2 + b_{1r}\ r + a_1)$$

y, por tanto,

$$\operatorname{tg} \gamma = b_{11}\ . \qquad [3.2]$$

Asimismo, cualquier recta del haz $x_1 = f_1\ (p_1\ ,\ p_2)$ tiene por ecuación

$$x_1 = c_{11}\ p_1 + (c_{12}\ p_2 + c_{1r}\ r + h_1) \qquad [3.3]$$

y, en consecuencia,

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{c_{11}}. \qquad [3.4]$$

Hallemos el sentido de la diferencia $\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\gamma$.

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{c_{11}} - b_{11}$$

y, según la expresión de b_{11} en [1.8], tenemos

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{c_{11}} - \frac{c_{22}}{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} - c_{11}\, c_{22}}{c_{11} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-c_{12}\, c_{21}}{c_{11} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}}.$$

Como $c_{11} < 0$, $c_{12}\, c_{21} > 0$ y $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$

resulta,

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\gamma > 0, \text{ luego } \omega > \gamma \qquad [3.5]$$

como queríamos demostrar.

Como, además, $b_{11} < 0$ y $c_{11} < 0$, las pendientes de ambas rectas son negativas. Por otra parte, las dos rectas de demanda han de cortarse en el primer cuadrante, ya que las dos han de dar un mismo punto de equilibrio al cortar a la curva de oferta del mercado, punto que, necesariamente, ha de tener ambas coordenadas positivas. De todo lo expuesto se deduce que las rectas de demanda han de tomar la posición indicada en la figura 9.

* * *

Examinada la posición relativa de las rectas de demanda, podemos pasar ya al análisis del proceso mediante la consideración de las "curvas de demanda inversas". Estudiaremos, en primer término, el caso en que la relación es de carácter sustitutivo.

Sea $d^1{}_1$ la recta de demanda "inversa" del bien X_1 que, al cortar a la curva de oferta $O^1{}_1$ da lugar al punto de equilibrio A, con el precio O C. Dicha curva $d^1{}_1$ es la que corresponde a la cantidad de equilibrio del bien X_2 para el punto *a*, de intersección de $O^1{}_2$ con $d^1{}_2$ que es la "curva de demanda inversa" correspondiente a la cantidad de equilibrio para el punto A en el mercado del bien X_1 (figuras 11 y 12).

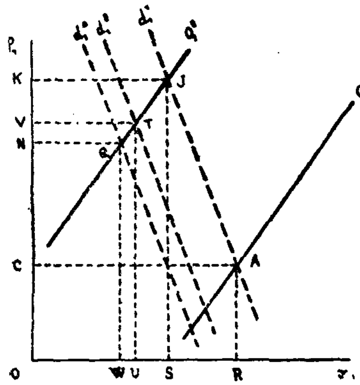

Figura 11.

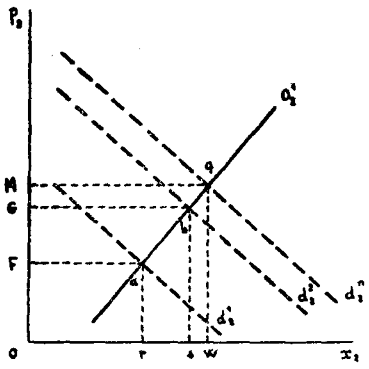

Figura 12.

Al trasladarse la curva de oferta de la posición $O^1{}_1$ a la $O^2{}_1$ el precio p_1 experimenta una elevación de O C a O K y se produce, también, una disminución de x_1 que de O R pasa a O S.

Como por ser los bienes sustitutivos en sentido inverso, se cumple que

$$\frac{\partial\ p_1}{\partial\ x_2} < 0 \qquad \frac{\partial\ p_2}{\partial\ x_1} < 0 \qquad [3.6]$$

la disminución de x_1 producirá una traslación de la "curva de demanda inversa" del bien X_2, hacia la derecha, con lo que esta curva pasará a tomar la posición $d^2{}_2$. La nueva cantidad de equilibrio en este segundo mercado será la O *s* y habrá experimentado, por tanto, un aumento, de O *r* a O *s*.

Este aumento de x_2 provocará, en virtud de [3.6], un desplazamiento de la "curva de demanda inversa" del bien x_1 hacia la izquierda, pasando a ocupar la posición $d^2{}_1$, con lo que se formará el nuevo punto de equilibrio T, con el precio O V y la cantidad O U. La reducción de la cantidad x_1 de O S a O U provoca un nuevo desplazamiento de la "curva de demanda inversa" de X_2, y el proceso continuará, con variaciones cada vez menores de los precios y de las cantidades hasta que en ambos mercados se llegue a las "curvas de demanda inversas" $d^n{}_1$ y $d^n{}_2$, con los puntos de equilibrio final Q y *q* a los que corresponden los precios O N y O M, respectivamente.

El precio p_1 ha aumentado en definitiva, aunque no tanto como en el primer paso, y p_2 también ha aumentado, pasando de O F a O M.

Es decir, los precios de ambos bienes, que consideramos son sustitutivos, han variado en el mismo sentido.

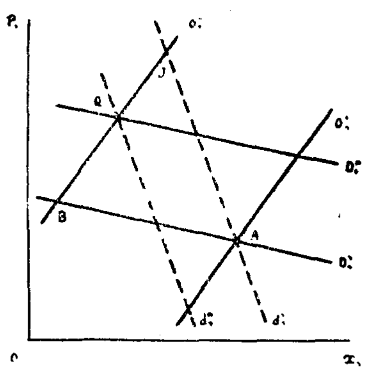

Figura 13.

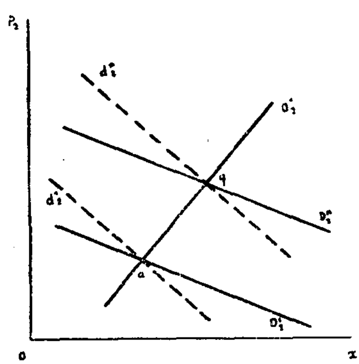

Figura 14.

El amortiguamiento del proceso, al que nos hemos referido en el *apartado II*, se hace patente si superponemos las figuras 11 y 5 por una parte, y las 12 y 6 por otra. Al realizar esta sencilla operación obtenemos las 13 y 14 en las que podemos observar que el desplazamiento de las rectas D^i_1 hacia la derecha está limitado por el punto J y el de las rectas d^i_1 hacia la izquierda está, asimismo, condicionado, por el punto B. El punto de equilibrio final del bien X_1 es, por tanto, uno tal como el Q, comprendido en el segmento B J, en el cual se cortan con la curva de oferta O^2_1, tanto una curva de demanda "directa", D^n_1, como una de demanda "inversa", d^n_1.

La limitación de los desplazamientos de las curvas de demanda del mercado de X_2 es fácil de ver si se observa que aquéllos están causados por las variaciones de la cantidad o del precio del bien X_1, las cuales están frenadas y limitadas en la forma que se acaba de explicar.

* * *

Si pasamos ahora al análisis del caso en que la relación existente entre las demandas de los bienes es de carácter complementario, observaremos que el proceso es semejante y se diferencia

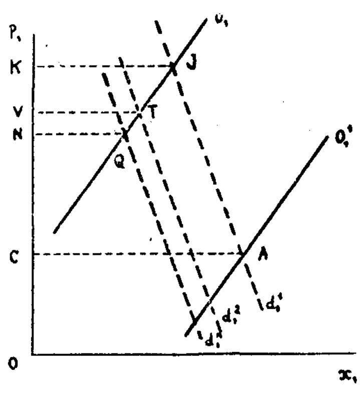

Figura 15.

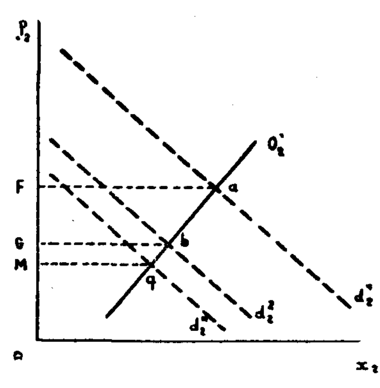

Figura 16.

únicamente del caso de los bienes sustitutivos, en que el desplazamiento de las "curvas de demanda inversas" del bien X_2 tiene lugar hacia la izquierda en lugar de hacia la derecha. Las distintas posiciones son las reflejadas en las figuras 15 y 16.

El resultado final en lo que respecta a los precios de ambos bienes, es que en tanto que el precio del bien X_1 aumenta en definitiva, pasando de O C a O N, el de X_2 disminuye, ya que de O F desciende a O M.

Si se superponen las figuras 15 y 7 y las 16 y 8 se obtienen las 17 y 18, en las que se han representado únicamente las posicio-

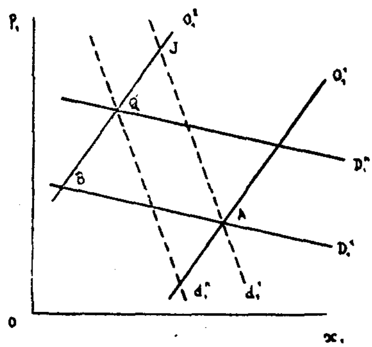

Figura 17.

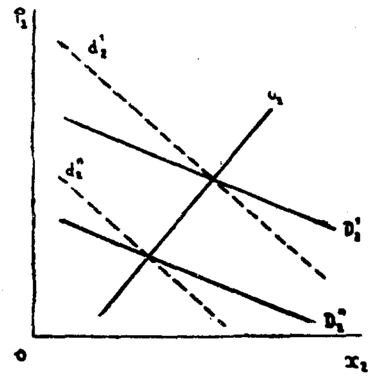

Figura 18.

nes inicial y final de las curvas de demanda "directas" e "inversas". En ellas se observa cuáles son los puntos de equilibrio inicial y final en ambos mercados. Las razones aducidas en el caso de los bienes sustitutivos permiten deducir, también en este caso, que el proceso es amortiguado.

IV.—*Apéndice.*

A continuación vamos a demostrar, analíticamente, que existe la convergencia examinada, de forma intuitiva y gráfica, en el *apartado III* del presente trabajo, y a determinar los valores que alcanzarán los precios de ambos bienes, en función de los precios iniciales y de los coeficientes que figuran en las funciones de demanda y de oferta de los mismos.

Para ello utilizaremos una representación en tres dimensiones, con el objeto de apreciar con mayor claridad las relaciones existentes entre las distintas variaciones.

En las figuras 19 y 20 los planos π y ρ representan, respectivamente, a las funciones de demanda de los dos bienes (9)

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}\ p_1 + c_{12}\ p_2 + c_{1r}\ r + h_1 \\ x_2 &= c_{21}\ p_1 + c_{22}\ p_2 + c_{2r}\ r + h_2 . \end{aligned} \qquad [4.1]$$

Al ser cortado el plano π por los paralelos al $x_1\ p_1$ y proyectar sobre él las intersecciones, se obtienen las rectas de demanda $D^1{}_1$, $D^2{}_1$ ... correspondientes a distintos valores de p_2.

De forma análoga se obtienen las rectas de demanda $D^1{}_2$, $D^2{}_2$ ... del bien X_2, correspondientes a diferentes valores de p_1.

Las rectas de oferta $O^1{}_1$, $O^2{}_1$ y O_2 son las trazas de los planos correspondientes, paralelos al eje p_2 los dos primeros, en la figura 19 y al eje p_1 el último, en la figura 20, ya que hemos supuesto que las cantidades ofrecidas de cada uno de los dos bienes dependen, solamente, del precio del propio bien. Representaremos a dichas funciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{Recta } O^1{}_1 \quad x_1 = \mu\ \ p_1 + s_1 \\ &\text{Recta } O^2{}_1 \quad x_1 = \lambda_1\ p_1 + n_1 \\ &\text{Recta } O_2 \quad\ \ x_2 = \lambda_2\ p_2 + n_2 . \end{aligned}$$

Al disminuir la oferta de X_1 y trasladarse la curva de $O^1{}_1$ a $O^2{}_1$ aumenta el precio p_1, según antes hemos visto, en una cantidad h.

Esta variación inicial de p_1, llevada al eje $O\,p_1$ de la figura 20, ocasiona una traslación de la curva de demanda de X_2, de la posición $D^1{}_2$ a la $D^2{}_2$. Por permanecer inalterada la curva de oferta O_2, el precio p_2 experimenta un incremento, k, el cual, llevado al eje $O\,p_2$ de la figura 19, muestra la traslación experimentada por la demanda de X_1, desde $D^1{}_1$ a $D^2{}_1$.

Vamos a estudiar la relación que existe entre estos dos incrementos h y k, para lo cual es preciso determinar los valores de

(9) Aun cuando la representación gráfica se ha efectuado para el caso de bienes sustitutivos, la demostración desarrollada y las fórmulas obtenidas son generales.

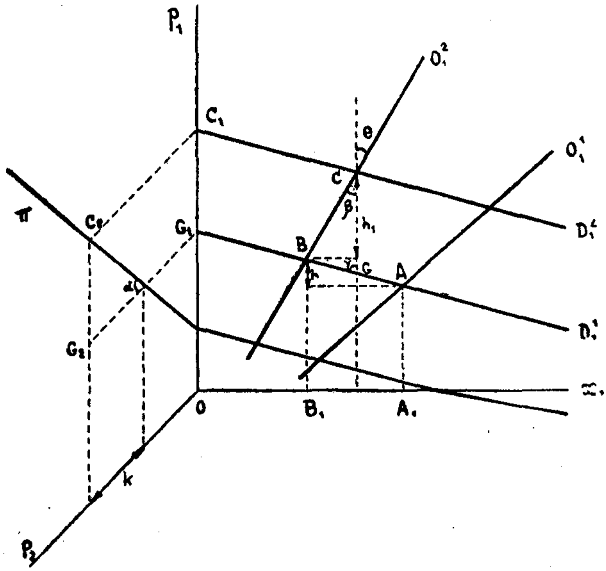

Figura 19.

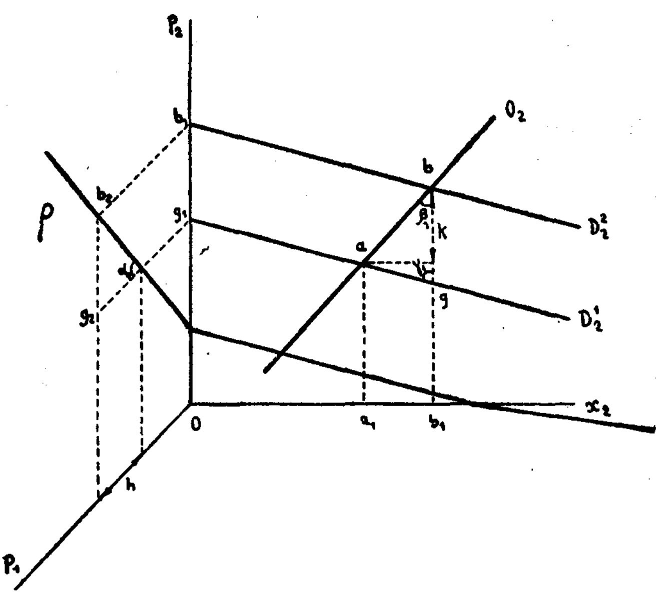

Figura 20.

las tangentes de los ángulos α, β, γ y α_1, β_1, γ_1, en las figuras 19 y 20, respectivamente.

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = - c_{11}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \theta = \lambda_1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial p_1}{\partial p_2} = - \frac{\dfrac{\partial x_1}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}} = - \frac{c_{12}}{c_{11}} \qquad [4.3]$$

Análogamente

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = - c_{22}$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \lambda_2 \qquad [4.4]$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{c_{21}}{c_{22}} .$$

En la figura 20 tenemos:

$$b_2\, g_2 = h \operatorname{tg} \alpha_1 .$$

Ahora bien, en el triángulo $a\, b\, g$, se tiene

$$\frac{b\, g}{\operatorname{sen} (\beta_1 + \gamma_1)} = \frac{a\, b}{\operatorname{sen} \gamma_1} .: a\, b = b\, g \frac{\operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{sen} (\beta_1 + \gamma_1)}$$

y como $\qquad b\, g = b_1\, g_1 = b_2\, g_2 = h \operatorname{tg} \alpha_1$

resulta

$$a\, b = h \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\operatorname{sen} \gamma_1}{\operatorname{sen} (\beta_1 + \gamma_1)} . \qquad [4.5]$$

Por otra parte, en el mismo triángulo $a\,b\,g$, se cumple:

$$k = a\,b \cos \beta_1 = h \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\operatorname{sen} \gamma_1 \cos \beta_1}{\operatorname{sen} (\beta_1 + \gamma_1)} =$$

$$= h \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\operatorname{sen} \gamma_1 \cos \beta_1}{\operatorname{sen} \beta_1 \cos \gamma_1 + \cos \beta_1 \operatorname{sen} \gamma_1} =$$

$$= h \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{1}{1 + \dfrac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \gamma_1}} = h \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \beta_1}. \qquad [4.6]$$

Si hacemos

$$R = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \beta_1} = \frac{-\dfrac{c_{21}}{c_{22}} (-c_{22})}{-c_{22} + \lambda_2} = \frac{c_{21}}{\lambda_2 - c_{22}} \qquad [4.7]$$

tenemos

$$k = R\,h. \qquad [4.8]$$

De forma análoga obtendríamos, en la figura 19, que para un incremento k, de p_2, el precio p_1 experimentaría un aumento, h_1, dado por la expresión

$$h_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} k. \qquad [4.9]$$

Si hacemos

$$T = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{-\dfrac{c_{12}}{c_{11}} (-c_{11})}{\lambda_1 - c_{11}} = \frac{c_{12}}{\lambda_1 - c_{11}} \qquad [4.10]$$

tenemos

$$h_1 = T\,k = T \,.\, R \,.\, h. \qquad [4.11]$$

A este incremento, h_1, de p_1, corresponde uno de p_2 igual a

$$k_1 = \mathrm{R}\, h_1 = \mathrm{R}\,.\,\mathrm{T}\,.\,\mathrm{R}\, h = \mathrm{T}\,\mathrm{R}^2\, h. \qquad [4.12]$$

El siguiente incremento de p_1 sería

$$h_2 = \mathrm{T}\, k_1 = \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^2\, h. \qquad [4.13]$$

Continuando de esta misma forma, obtendríamos los distintos valores de los incrementos de ambos precios y, por tanto, éstos en la posición de equilibrio final, tendrían por expresión:

$$\mathrm{P}_1 = p_1 + h + \mathrm{T}\,\mathrm{R}\, h + \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^2\, h + \ldots = p_1 + \\ + h\,(1 + \mathrm{T}\,\mathrm{R} + \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^2 + \ldots)$$

$$\mathrm{P}_2 = p_2 + \mathrm{R}\, h + \mathrm{T}\,\mathrm{R}^2\, h + \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^3\, h + \ldots = \\ = p_2 + h\,\mathrm{R}\,(1 + \mathrm{T}\,\mathrm{R} + \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^2 + \ldots)\,. \qquad [4.14]$$

La suma

$$1 + \mathrm{T}\,\mathrm{R} + \mathrm{T}^2\,\mathrm{R}^2 + \ldots \qquad [4.15]$$

constituye una serie geométrica para la cual es condición necesaria y suficiente de convergencia que tienda a cero el término general

$$(\mathrm{T}\ \ \mathrm{R})^n \qquad [4.16]$$

para lo cual basta que sea

$$|\,\mathrm{T}\,\mathrm{R}\,| < 1 \qquad [4.17]$$

Teniendo en cuenta [4.7] y [4.10], la condición [4.17] se puede expresar en la forma

$$|\,\mathrm{T}\,\mathrm{R}\,| = \frac{|\, c_{12}\ \ c_{21}\,|}{|\,(\lambda_1 - c_{11})\ \ (\lambda_2 - c_{22})\,|} < 1. \qquad [4.18]$$

Supuesto, en virtud de [1.2], que

$$c_{11} < 0 \quad \text{y} \quad c_{22} < 0$$

y teniendo en cuenta que se ha de cumplir la condición de estabilidad [1.10]

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$$

la condición de convergencia [4.18] queda satisfecha si se cumplen simultáneamente las

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_2 &> 0, \end{aligned} \qquad [4.19]$$

es decir, si las dos curvas de oferta son *normales*, o sea, si son crecientes con la cantidad de producto.

En efecto, al cumplirse las condiciones [4.19] la fracción [4.18] es positiva y, por tanto, para que se cumpla la condición de convergencia basta que

$$c_{12}\, c_{21} < (\lambda_1 - c_{11})\ (\lambda_2 - c_{22}) \qquad [4.20]$$

Pero como

$$(\lambda_1 - c_{11})\ (\lambda_2 - c_{22}) = c_{11}\, c_{22} - \lambda_1\, c_{22} - \lambda_2\, c_{11} + \lambda_1\, \lambda_2\,,$$

en virtud de las condiciones [1.2], esta expresión es mayor que $c_{11}\, c_{22}$, y como debido a la condición de estabilidad [1.10].

$$c_{11}\ c_{22} > c_{12}\ c_{21}$$

a *fortiori* resulta que

$$c_{11}\, c_{22} - \lambda_1\, c_{22} - \lambda_2\, c_{11} + \lambda_1\, \lambda_2 > c_{12}\, c_{21}$$

con lo que queda satisfecha la condición [4.20] y, por tanto, la general de convergencia [4.18].

Las condiciones [4.19] son suficientes, pero no necesarias, por lo cual los procesos de alteración de los precios pueden ser amortiguados aun en algunos casos, que aquí no vamos a examinar, en que una o ambas ofertas son anormales.

La suma [4.15] tiene por expresión:

$$S = \frac{1}{1 - TR} = \frac{1}{1 - M} \qquad [4.21]$$

si hacemos M = T R. Dicha suma, S, no es más que un *multiplicador* del precio, que indicará cuál es el factor por el que hay que multiplicar el alza inicial, para obtener el incremento total experimentado por el precio. El parámetro M = T R expresa la relación existente entre dos incrementos sucesivos del mismo.

En virtud de todo lo expuesto, los precios finales serán:

$$P_1 = p_1 + h \frac{1}{1 - TR}$$
$$P_2 = p_2 + h \frac{R}{1 - TR} \quad [4.22]$$

o, sustituyendo los valores de T y de R,

$$P_1 = p_1 + h \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 - c_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_2 - c_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 - c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda_2 - c_{22} \end{vmatrix}}$$
$$P_2 = p_2 + h \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 - c_{11} & 0 \\ 0 & c_{21} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 - c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & \lambda_2 - c_{22} \end{vmatrix}} \quad [4.23]$$

Las expresiones [4.23] constituyen la confirmación analítica de los resultados obtenidos gráficamente en los *apartados* anteriores. Bajo el supuesto adoptado de que las curvas de oferta de los dos bienes son normales, expresado por las condiciones [4.19], la primera de aquellas expresiones muestra que si el precio de un bien, p_1, experimenta un incremento inicial *h*, el incremento total será del mismo signo; pues, en virtud de [4.19] y [4.20], tanto el denominador como el numerador del multiplicador de *h*, son positivos.

En cambio, el signo del multiplicador de *h* en la segunda de las expresiones [4.23] depende del que tenga el numerador, el cual viene dado por el del término c_{21}. Si los dos bienes son sustitutivos se cumple, según hemos visto en [1.3], que $c_{21} > 0$, con lo que el incremento total de p_2 tendrá el mismo signo que el h, inicial, de p_1. Por lo tanto, si dos bienes son sustitutivos, sus precios se mueven en el mismo sentido.

Por el contrario, si los bienes son complementarios, en virtud de [1.4] se cumple que $c_{21} < 0$, con lo que el incremento total de p_2 es de signo contrario al h, inicial de p_1. Es decir, si dos bienes son complementarios, sus precios reaccionan en sentido opuesto.

* * *

En el presente trabajo se han examinado solamente las relaciones existentes entre los precios de dos bienes conexos en cuanto a la demanda, con el supuesto adicional de que las funciones de oferta, dependientes de una sola variable, son crecientes. Pero el procedimiento empleado es susceptible de ser aplicado con funciones de oferta anormales, en cuyo caso habrían de ser consideradas las condiciones de convergencia silenciadas en el *apéndice*. También puede ser utilizado en el estudio de las conexiones de oferta y aun en el de las verticales y de las dobles.

HUBERTO VILLAR