NUMEROS INDICES DE MAGNITUDES ECONOMICAS

I

LOS NUMEROS INDICES DESDE UN PUNTO DE VISTA ESTADISTICO

1.—NÚMEROS ÍNDICES EN GENERAL.

1.1 *Introducción.*—La moderna investigación econométrica utiliza modelos agregativos en los que figuran magnitudes económicas cuyos valores, procedentes de informaciones estadísticas, pueden no ser homogéneos por venir referidos a distintos momentos del tiempo; en este caso hay que trasformarlos en *valores reales* (1) y el procedimiento empleado en la práctica para conseguirlo es el de utilizar *números índices de precios.* En otras ocasiones se quiere evaluar la renta nacional de un país en años sucesivos y para ello solamente se dispone de un cálculo realizado en un año determinado, aunque se sabe que existe una intensa correlación entre la renta nacional y la producción física del país; la variación de esta última puede estimarse mediante *números índices de producción* (en España, el Consejo de Economía Nacional calcula los valores anuales de la renta nacional por este procedimiento).

Todos estos números índices se refieren a distintos momentos del tiempo, pero si se quieren comparar los salarios de las distintas provincias de España en un momento dado, también se recurre a números índices, en este caso *índices espaciales o territoriales.* El objeto del número índice puede no ser económico; por ejemplo, se calculan índices de fecundidad o de mortinatalidad, de tráfico urbano, telefónico, etc.

El estudio de los números índices se acentuó al final de la se-

---

(1) LAURENCE R. KLEIN: *A textbook of econometrics*, pág. 67.

gunda guerra mundial como consecuencia de las bruscas variaciones experimentadas por el nivel general de precios de todos los países, pero en realidad es un problema que siempre ha preocupado a los investigadores de las ciencias sociales; así, por ejemplo, ya Galileo consideraba que el método de la media geométrica era superior para calcular números índices que el de la media aritmética defendido por Nozzolini; modernamente, economistas de la talla de Allen (2), Bortkiewicz, Bowley (3), Edgeworth (4), Irving Fisher (5), Frisch (6), Gini (7), Haberler (8), Jevons, Keynes (9), Konüs (10), Mitchell (11), Pigou (12), Samuelson (13), Schultz (14),

---

(2) R. G. D. ALLEN: "Wholesale Prices, 1938-48". *The Economic Journal*, junio, 1949.

(3) A. L. BOWLEY: "The precision of index numbers". *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 89, pág. 300.

(4) F. Y. EDGEWORTH: "The element of probability in index numbers". *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 88, pág. 557.

"Mr. Correa Walsh on the calculation of index numbers". *Id.*, vol. 86, página 570.

(5) IRVING FISHER: "The making of index numbers". New York, 1922.

"The best form (with discussion) index numbers". *Quarterly publication of the American Statistical Association*, vol. 17, pág. 533.

"The *total value criterion*; a new principle in index number construction". *Journal of the American Statistical Association*, vol. 22, pág. 419.

(6) R. FRISCH: "Annual Survey of General Economic Theory. The problem of index numbers". *Econometrica*, 1936, pág. 1.

"Index number which shall meet certain of Fisher's tests, necessary and sufficient conditions regarding the form of an". *Journal of the American Statistical Association*, vol. 25, pág. 308.

(7) CORRADO GINI: "Quelques considerations au subject de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues". *Metron*, vol. 4, número 1, pág. 3.

"Methods of eliminating the influence of several groups of factors". *Econometrica*, año 1937.

(8) GOTTFRIED HABERLER: "Der Sinn der Indexzahlen". Tübingen, 1927.

(9) J. M. KEYNES: "A Treatise on Money", vol. I, libro II. London, 1930.

(10) A. KONÜS: "The problem of the true index of the cost of living". *Econometrica*, 1939, pág. 10.

"Le problème du veritable indice du coût de la vie". *Bulletin de l'Institut de Conjoncture de Moscou*, octubre, 1924.

(11) W. C. MITCHELL: "The making and using of index numbers". *Bulletin of the U. S. Bureau of Labor Statistics*, años 1915, 1921, 1938.

(12) A. C. PIGOU: "Wealth and Welfare". London, 1912, cap. III (1.ª ed.), y 1924, cap. V (2.ª ed.).

Wald (15) y Yates (16), han trabajado mucho en el problema. En la actualidad, el econometrista francés René Roy y el español José Castañeda incluyen este tema como básico de sus cursos de Econometría, y en las publicaciones de Economía, Estadística y Econometría se tratan a menudo estas cuestiones.

Si tenemos una característica X que presenta las modalidades X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con valores x_i en el período de tiempo (año, mes, semana, etc.) actual y x_{i0} en en un período tomado como base de comparación, *período base*, la fórmula más sencilla para comparar estos dos valores es el cociente o porcentaje:

$$I_i = \frac{x_i}{x_{i0}} \quad \text{ó} \quad I_i = \frac{x_i}{x_{i0}} \cdot 100 . \qquad [1.1.1]$$

Este es un *número índice simple* que nos expresa las variaciones de cada modalidad a través del tiempo. Pero en la práctica se suele plantear el problema de obtener un *número índice conjunto* de todas las modalidades y se suele resolver mediante un promedio estadístico u otra fórmula adecuada a la naturaleza de la característica X. Así, pues, es obligado presentar las siguientes fórmulas:

$$a = \frac{1}{n} \sum_1^n I_i = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{x_i}{x_{i0}} \qquad \text{(media aritmética)} \qquad [1.1.2]$$

$$G = \sqrt[n]{I_1 \, I_2 \ldots I_n} = \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_{10}} \cdots \frac{x_n}{x_{n0}}}$$

(media geométrica) [1.1.3]

(13) P. A. SAMUELSON: "Foundations of Economic Analysis". Cambridge Harvard University Press, 1953, pág. 146.

"La evaluación de la renta nacional real". REVISTA DE ECONOMÍA POLÍTICA, mayo-agosto, 1955, pág. 66.

(14) H. SCHULTZ: "A misunderstanding in index number theory; the true Konüs condition". *Econometrica*, año 1939, pág. 1.

(15) A. WALD: "A new formula for the index of cost of living". *Econometrica*, año 1939, pág. 319.

(16) F. YATES: "The adjustment of the weights of compound index numbers based on inaccurate date". *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 102, pág. 185.

$$H = \frac{n}{\dfrac{1}{I_1} + \dfrac{1}{I_2} + \dots + \dfrac{1}{I_n}} = \frac{n}{\dfrac{x_{10}}{x_1} + \dots + \dfrac{x_{n0}}{x_n}}$$

(media armónica) [1.1.4]

de los tres promedios clásicos, y la denominada *índice agregativo simple*:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_{10} + x_{20} + \dots + x_{n0}} = \frac{\sum_1^n x_i}{\sum_1^n x_{i0}} \qquad [1.1.5]$$

Ahora bien, si las modalidades de X tienen comparativamente distinta importancia en la realidad, la cual puede venir simbolizada y medida por unos números w_1, w_2, ..., w_n correspondientes a cada X_i, pueden obtenerse las fórmulas anteriores ponderando sus valores con los w_i, con lo que se transforman en las:

$$a' = \frac{\sum_1^n I_i w_i}{\sum_1^n w_i} = \frac{1}{\sum_1^n w_i} \sum_1^n \frac{x_i}{x_{i0}} w_i \qquad [1.1.2']$$

$$G' = \sqrt[\sum w_i]{I_1^{w_1} \dots I_n^{w_n}} = \sqrt[\sum_1^n w_i]{\left(\frac{x_1}{x_{10}}\right)^{w_1} \dots \left(\frac{x_n}{x_{n0}}\right)^{w_n}} \qquad [1.1.3']$$

$$H' = \frac{w_1 + \dots + w_n}{\dfrac{w_1}{I_1} + \dots + \dfrac{w_n}{I_n}} = \frac{w_1 + \dots + w_n}{\dfrac{x_{10}}{x_1} w_1 + \dots + \dfrac{x_{n0}}{x_n} w_n} =$$

$$= \frac{\sum_1^n w_i}{\sum_1^n \dfrac{x_{i0}}{x_i} w_i} \qquad [1.1.4']$$

$$A' = \frac{x_1 w_1 + \dots + x_n w_n}{x_{10} w_1 + \dots + x_{n0} w_n} = \frac{\sum_1^n x_i w_i}{\sum_1^n x_{i0} w_i} \qquad [1.1.5']$$

1.2 *Artículos que deben estar incluídos en un índice general.*— Al tratar de calcular números índices económicos es muy corriente encontrarse en la práctica con que es tan grande el número de índices simples o parciales I_i que deben definir el número índice conjunto o general I, que no hay tiempo material de obtener y elaborar toda la información posible, además de lo elevado del coste de recogida de los datos y de las dificultades de orden técnico que incluye la captación de información de determinadas modalidades, deducidas de diferencia en la calidad, localización, etcétera. A estas dificultades prácticas se debe la necesidad de efectuar un estudio científico de las mercancías o modalidades X_i, cuyos valores han de incluirse en el índice obtenido y de las X'_j cuyos valores deben excluirse. A este objeto, vamos a tratar de generalizar las ideas expuestas por Duon al estudiar los números índices de precios del comercio exterior (17).

Si partimos del índice ponderado a' [1.1.2'], calculado por el método de la media aritmética, y suponemos que los coeficientes de ponderación w_i cumplen la condición de que su suma vale la unidad, lo cual siempre es posible de conseguir en la práctica, el índice general tomará la forma:

$$I = \sum_1^n I_i w_i = \sum_1^h I_i w_i + \sum_1^K I'_i w'_i \, . \qquad [1.2.1]$$

En esta expresión hemos clasificado los índices simples en dos clases: en la clase A los $I_1, I_2, \dots, I_h$ correspondientes a modalidades cuyos valores van a permitir determinar el índice general calculado, y en la clase B los $I'_1, I'_2, \dots, I'_K$, siendo $h + K = n$ los que corresponden a modalidades o mercancías que van a excluirse en el cálculo del índice general. Denominaremos (A) y (B)

(17) G. Duon: "De la théorie a la pratique des indices statistiques". Editores: Eyrolles Gauttier Villars, París, 1955, pág. 83.

a los índices generales de las modalidades de las mercancías incluídas y excluídas, respectivamente, e I al verdadero índice general que no puede ser calculado;

$$\varepsilon = I - (A)$$

mide el error, por diferencia, que se comete al estimar mediante (A) el verdadero índice I y su valor puede obtenerse utilizando las expresiones originales. Así,

$$\varepsilon = \frac{\sum_1^h I_i w_i + \sum_1^K I'_i w'_i}{\sum_1^h w_i + \sum_1^K w'_i} - \frac{\sum_1^h I_i w_i}{\sum_1^h w_i} =$$

$$= \frac{\sum_1^K I'_i w'_i \sum_1^h w_i - \sum_1^h I_i w_i \sum_1^K w'_i}{\sum_1^h w_i} = \qquad [1.2.2]$$

$$= \frac{\sum_1^K I'_i w'_i}{\sum_1^K w'_i} \sum_1^K w'_i - \frac{\sum_1^h I_i w_i}{\sum_1^h w_i} \sum_1^K w'_i = \sum_1^K w'_i \; [(B) - (A)]$$

en donde la diferencia encerrada en el corchete del último miembro dice que no se comete error alguno al utilizar (A) como índice general si éste y el de las modalidades excluídas son iguales, es decir, que:

Si pudiéramos agrupar las modalidades en dos clases con el mismo índice compuesto, la media aritmética ponderada de los índices simples de una de las clases coincide con el índice general obtenido por el mismo método.

En la realidad será difícil, en general, poder efectuar tal clasificación y, por tanto, se recurre a otras consideraciones basadas en el concepto de correlación.

Si calculamos los coeficientes de correlación lineal simple entre los índices I_i, I'_i y sus pesos respectivos w_i, w'_i, o sea:

$$\rho = \frac{\frac{1}{h}\sum_1^h I_i w_i - \overline{w}_i \overline{I}_i}{D[I_i]\, D[w_i]} \quad \text{y} \quad \rho' = \frac{\frac{1}{k}\sum_1^k I'_i w'_i - \overline{w}'_i \overline{I}'_i}{D[I'_i]\, D[w'_i]} \qquad [1.2.3]$$

en donde los valores superrayados del numerador son esperanzas matemáticas o medias aritméticas ordinarias de las correspondientes variables y los factores de los denominadores, desviaciones típicas, se tiene:

$$h \rho D[I_i]\, D[w_i] = \sum_1^h I_i w_i - \overline{I}_i \sum w_i ,$$

y de aquí:

$$\frac{\sum_1^h I_i w_i}{\sum w_i} = \overline{I}_i + \frac{\rho D[I_i]\, D[w_i]}{\overline{w}_i}$$

y análogamente puede hacerse en la expresión del segundo coeficiente de correlación, que restada miembro a miembro de la deducida, nos da:

$$(A) - (B) = [\overline{I}_i - \overline{I}'_i] +$$

$$\left\{ \frac{\rho D[I_i]\, D[w_i]}{\overline{w}_i} - \frac{\rho' D[I'_i]\, D[w'_i]}{\overline{w}'_i} \right\} \qquad [1.2.4]$$

Como consecuencia de [1.2.2] no existirá error si se anulan simultáneamente las dos expresiones encerradas en corchetes, o sea, si

$$\overline{I}_i = \overline{I}'_i \qquad [1.2.5]$$

y si además son nulos los coeficientes de correlación, o las desviaciones típicas de los índices simples, o las desviaciones típicas de los coeficientes de ponderación.

Decir que las desviaciones típicas de los pesos son nulas equivale a admitir que éstos son iguales entre sí para cada clase, o lo que es igual, que no se pondera; decir que las desviaciones típicas de los índices simples valen cero, equivale a considerar iguales entre sí los índices simples de cada clase; por lo tanto, descartamos estas dos posibilidades.

La condición

$$\rho = \rho' = 0 \qquad [1.2.6]$$

se verifica si hay independencia de I_i con w_i y de I'_i con w'_i, la cual es posible que ocurra en la práctica eligiendo convenientemente las modalidades de cada grupo, habiendo también de cumplirse la condición [1.2.5] para conseguir por completo el objetivo $\varepsilon = 0$.

Una manera de agrupar los índices simples en las clases A y B es la de dividir el conjunto total en dos subconjuntos iguales, o sea, clasificar con la condición

$$I_i = I'_i, \quad \text{siendo} \quad h = K = \frac{n}{2} \qquad [1.2.7]$$

para cualquier i. Este procedimiento origina el *método de ponderación representativa,* que consiste en suponer que se verifica la condición [1.2.7], lo que no ocurre exactamente en la realidad, y calcular así el índice general mediante la expresión:

$$(A') = \sum_1^h (w_i + w'_i)\, I_i\,. \qquad [1.2.8]$$

El error que se comete vale

$$\begin{aligned} \varepsilon' = I - (A') = \sum_1^h I_i\, w_i + \sum_1^h I'_i\, w'_i - \sum_1^h (w_i + \\ + w'_i)\, I_i = \sum_1^h (I_i - I'_i)\, w_i \end{aligned} \qquad [1.2.9]$$

que se anula cuando se cumple realmente la condición [1.2.7], o cuando

$$\sum_{1}^{h} (I_i - I'_i)\, w'_i = \frac{\sum_{1}^{h} I_i\, w'_i}{\sum w'_i} - \frac{\sum_{1}^{h} I'_i\, w'_i}{\sum w'_i} = 0\,,$$

es decir, cuando los índices compuestos obtenidos con los coeficientes de ponderación de los artículos excluídos son iguales para las dos clases.

Si calculamos los coeficientes de correlación ρ' de [1.2.3], para $K = h$ y

$$\rho_1 = \frac{\frac{1}{h} \sum I_i\, w'_i - \overline{I_i}\, \overline{w'_i}}{D\,[I_i]\; D\,[w'_i]} \qquad [1.2.10]$$

que determina el grado de interdependencia entre las variables I_i y w'_i, podemos establecer como en [1.2.4] que,

$$\varepsilon' = \frac{\sum_{1}^{h} I_i\, w'_i}{\sum w'_i} - \frac{\sum_{1}^{h} I'_i\, w'_i}{\sum_{1}^{h} w'_i} =$$

$$= [\overline{I_i} - \overline{I'_i}] + \frac{D\,[w']}{\overline{w'}} \;\{\rho_1\, D\,[I_i] - \rho'\, D\,[I'_i]\} \qquad [1.2.11]$$

lo que nos dice que el error que se comete al calcular el índice general por el método de ponderación representativa es nulo si se cumplen simultáneamente la condición [1.2.5] y una de las tres siguientes:

$$\text{a)}\quad D\,[w'] = 0\,, \qquad \text{b)}\quad \rho_1 = \rho' = 0\,,$$
$$\text{c)}\quad D\,[I_i] = D\,[I'_i] = 0\,. \qquad [1.2.12]$$

Podemos descartar la condición *c*) por las razones ya expuestas, pero existe la posibilidad de que se cumplan en la práctica las condiciones *a*) o *b*).

La desviación típica nula de los coeficientes de ponderación de los artículos excluídos implica el considerar todos ellos de la misma importancia y esto puede ser aproximadamente posible en la realidad en tanto incluyamos en la clase B artículos de poca importancia.

Si lo anterior no es posible, prácticamente sí puede serlo la condición *b*), es decir, que los pesos w'_i sean independientes tanto de los índices simples I_i como de los I'_i. Si se satisface aproximadamente una de estas dos condiciones y la [1.2.5], debe hacerse la clasificación por este método y utilizar para el cálculo del índice general la fórmula [1.2.8].

Volviendo al método ordinario, que también se denomina de *ponderación directa,* sabemos que si $(A) = (B)$ no se cometía error alguno al tomar (A) como índice general. Si (A) y (B) son números próximos, se ha de verificar:

$$\frac{(B)}{(A)} = 1 + \eta \quad \text{ó} \quad (B) = (A)\,(1 + \eta) \qquad [1.2.13]$$

en donde η es el error relativo que se comete al asimilar (B) a (A).

Vamos a calcular el error absoluto ε en función de η. Sustituyendo valores en la definición de dicho error absoluto,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= I - (A) = (A) \sum_1^h w_i + (B) \sum_1^K w'_i - (A) = \\ &= (A) \left[\sum_1^h w_i - 1\right] + (A)\,(1 + \eta) \sum_1^K w'_i = \qquad [1.2.14] \\ &= -(A) \sum_1^K w'_i + (A) \sum_1^K w'_i + \eta\,(A) \sum_1^K w'_i = \eta\,(A) \sum_1^K w'_i \,. \end{aligned}$$

Podemos ahora calcular el error relativo que se comete al estimar I mediante (A), sin más que pasar el factor (A) del último miembro al primero de la expresión anterior, o sea,

$$\delta = \frac{(\varepsilon)}{(A)} = \frac{I - (A)}{(A)} = \eta \sum_1^K w'_i = \eta\,(1 - \sum_1^h w_i)\,. \qquad [1.2.15]$$

Esta expresión nos permite, mediante un tanteo, determinar los h artículos que deben incluirse en el índice general, en el supuesto de que tengamos una estimación empírica de η, para un error δ prefijado. Basta para ello ir obteniendo cálculos sucesivos del segundo factor del segundo miembro hasta que dicho miembro sea inferior al primero; si formamos una sucesión monótona decreciente de los pesos w_i, abreviaremos el proceso en el sentido de que tendremos rápidamente la lista de productos que deben incluirse.

2.—Números índices de precios.

Si consideramos como característica X el *precio*, como modalidad X_i *el de cada mercancía* y sustituímos el símbolo x por el p, tenemos para cada una de las ocho fórmulas anteriores otras tantas de *números índices de precios.*

La de la media aritmética simple recibe, en este caso, el nombre de *índice de Sauerbeck*:

$$a = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{p_i}{p_{i0}} \qquad [2.1]$$

quien en 1886 la dió a conocer, iniciando con esta fórmula la lista interminable que contiene las 134 analizadas por Irving Fisher en su conocida obra clásica *The making of index numbers.* Esta fórmula, que ha sido utilizada en la construcción de índices de precios en Francia, Inglaterra y España (hoy se emplea en nuestro país otra debida a Fernández Baños), tiene las ventajas de su sencillez y la de que la suma de los cuadrados de las desviaciones de los índices simples al índice general es un mínimo, por tratarse de una media aritmética (18). Por otra parte, tiene el inconveniente de la falta de ponderación, e incluso entre las fórmulas de índices conjuntos sin ponderar podría haber otra que resolviera mejor el problema.

---

(18) Harald Cramer: *Métodos Matemáticos de Estadística.* Ed. Aguilar, trad. de E. Cansado, pág. 201.

A este respecto, las observaciones de Edgeworth, confirmadas por d'Ollivier en 1920-1924, presentan una asimetría en la distribución de los índices simples.

$$I_i = \frac{p_i}{p_{i0}}$$

respecto al valor a [2.1] con preponderancia de los I_i inferiores a la media, de un 60 por 100 contra un 40 por 100. René Roy, al comentar este problema (19), considera que las condiciones que debe satisfacer un índice general I, considerado como una función del valor medio de dicha función de los índices simples I_i, o sea,

$$f(I) = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f(I_i) \qquad [2.2]$$

son:

1.º Distribución simétrica de los valores observados para $f(I_i)$.

2.ª Distribución unimodal (existencia de un solo máximo) con un número de desviaciones decreciente al aumentar su amplitud.

3.ª La frecuencia de las desviaciones tiende a cero al tender aquéllos a infinito.

Estas tres condiciones nosotros consideramos que pueden resumirse diciendo que *la distribución de las desviaciones de una función de los índices simples al valor que toma la función para el índice general debe ser aproximadamente normal.*

En virtud del Teorema Central del Límite (20), podemos admitir que el índice general I, calculado por la fórmula de Sauerbeck, tiene distribución asintóticamente normal, es decir, si n es muy grande y tuviese sentido calcular infinitas veces el valor a, los infinitos valores de a se distribuirían normalmente, lo que podría tener interés práctico para establecer proposiciones de probabilidad respecto al índice esperado en un momento determinado, pero el Teorema anterior no puede decirnos nada respecto a la consideración de René Roy. La forma de conseguir un índice que

(19) René Roy: *Teoría y Aplicación de los Números Indices.* Revista de Economía Política, vol. 1, núm. 2, abril-junio, 1945, pág. 298.

(20) Ob. cit. (18), pág. 246.

la satisfaga es la de ajustar una distribución normal a los valores $f(I_i)$ y considerar como valor $f(I_i)$ la esperanza matemática de la distribución. Si este valor coincide con el correspondiente a alguna expresión del tipo [2.2], éste será el mejor índice de acuerdo con la propuesta del econometrista francés. A este respecto, d'Ollivier ha comprobado que la función $f(I_i) = \log I_i$ origina un valor log I que satisface la condición; por lo que en dicho caso, la fórmula

$$\log I = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \log I_i = \log \sqrt[n]{I_1 \ldots I_n} = \log G$$

o sea,

$$I = G,$$

de donde la fórmula de la media geométrica [1.1.3] es la más apropiada para conocer la variación del nivel de precios.

Nosotros no nos oponemos a que la media geométrica sea más apta que la aritmética para describir el movimiento conjunto de los precios, pero existen otras consideraciones formales, además de las económicas, que nos permitirán elegir en cada caso con un criterio más justo.

Si intentamos conseguir números índices de precios ponderados es necesario medir la importancia de cada uno de los artículos que comprende el índice y esta importancia puede dárnosla alguna expresión del valor de la mercancía. Si denominamos q_i a la cantidad consumida de mercancía *i*-ésima en el universo que trabajamos durante el período de tiempo actual y q_{i0} a la cantidad consumida en el período base, podemos considerar cuatro expresiones del valor de la mercancía *i*-ésima:

(a) $p_{i0}\, q_{i0}$, (b) $p_i\, q_i$, (c) $p_{i0}\, q_i$, y (d) $p_i\, q_{i0}$. [2.3]

La expresión (*a*) corresponde al valor de la cantidad de mercancía *i*-ésima consumida en el período base. Si elegimos estos valores como coeficientes de ponderación w_i puede ocurrir que al calcular números índices de un período algo distante en el tiempo del período base haya habido un cambio estructural de alguna importancia en el país o región en que se calcula el índice y, como consecuencia, que haya cambiado la importancia relativa de las mercancías, en cuyo caso obtendremos números índices que no irán de acuerdo con la realidad. Sin embargo, en cortos intervalos de tiempo, los valores (*a*) pueden ser un buen índice de la importancia que queremos medir.

La expresión (*b*) no tiene el inconveniente anterior porque nos da siempre valores actuales, pero tiene un gravísimo inconveniente de tipo práctico: exige conocer las cantidades consumidas de cada artículo en el período que se construye el índice. Si los índices son mensuales, como es lo corriente, hay que disponer de una estadística completa de consumo mensual. Estas informaciones son muy difíciles de conseguir, incluso anualmente, y por tanto es prácticamente irrealizable, en general, el empleo de los valores (*b*).

Los coeficientes (*c*) y (*d*) no son valores que se presenten en la realidad, pues se obtienen multiplicando el precio que tiene el artículo en un período por la cantidad consumida en otro período distinto; sin embargo, su carácter medio puede hacerlos utilizables y, de hecho, el (*c*) veremos que origina una fórmula clásica de una significación económica que lo hace muy aprovechable.

Si en la fórmula de la media aritmética ponderada tomamos como coeficientes de ponderación los valores deducidos de las expresiones (*a*) y (*c*) tenemos, respectivamente:

$$L = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{p_i}{p_{i0}} p_{i0}\, q_{i0}}{\sum_{1}^{n} p_{i0}\, q_{i0}} = \frac{\sum_{1}^{n} p_i\, q_{i0}}{\sum_{1}^{n} p_{i0}\, q_{i0}} \qquad [2.4]$$

que es la conocida *fórmula de Laspeyres*, y

$$P = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{p_i}{p_{i0}} p_{i0}\, q_i}{\sum_{1}^{h} p_{i0}\, q_i} = \frac{\sum_{1}^{n} p_i\, q_i}{\sum_{1}^{n} p_{i0}\, q_i} \qquad [2.5]$$

que es la, también familiar, *fórmula de Paasche.*

La fórmula de Paasche nos permite resolver el problema de la homogeneidad de valores o transformación de valores actuales en reales con que iniciábamos este trabajo, ya que el conocimiento de P y de las cantidades consumidas en el período actual nos permite escribir:

$$\sum_1^n p_i q_i = P \sum_1^n p_{i0} q_i \quad \text{ó} \quad \frac{1}{P} \sum_1^n p_i q_i = \sum_1^n p_{i0} q_i$$

cuya última expresión nos permite poder manejar siempre valores calculados a precios constantes.

Tanto la fórmula de Laspeyres como la de Paasche podían haberse definido directamente como un índice agregativo ponderado [1.1.5′] de base constante o de base variable, respectivamente.

La media geométrica de las dos fórmulas anteriores origina la célebre fórmula de Fisher, a la que hemos de referirnos en otras ocasiones. Esta es, pues,

$$\boxed{F = \sqrt{L \cdot P} = \sqrt{\frac{\sum p_i q_{i0}}{\sum p_{i0} q_{i0}} \quad \frac{\sum p_i q_i}{\sum p_{i0} q_i}}} \,. \qquad [2.6]$$

Es también una fórmula clásica la conocida con el nombre de índice de Edgeworth, que se expresa por

$$E = \frac{\sum_1^n p_i (q_i + q_{i0})}{\sum_1^n p_{i0} (q_i + q_{i0})} \qquad [2.7]$$

y la cual no es sino un índice agregativo ponderado con la suma de las cantidades consumidas en el período actual y en el período base.

3.—Propiedades que debe satisfacer un índice de precios.

Para tratar de resolver con cierto enfoque formal el problema de la ponderación, los tratadistas de esta cuestión han considerado algunas propiedades básicas de que debe gozar un número índice conjunto de precios y han analizado a este respecto las fórmulas más usadas. Para mayor facilidad en la exposición vamos a emplear la notación $I^a{}_b$ para representar un número índice, en la que el subíndice *b* indica el período base y el superíndice *a* el período de comparación. Dichas propiedades son:

1.ª *Identidad*: $I^0_0 = I^a_a = I^b_b = 1$,

es decir, si coinciden los períodos base y de comparación el índice vale uno. De esta propiedad gozan todos los índices que hemos considerado.

2.ª *Inversión*: $I^b_a = \dfrac{1}{I^a_b}$ ó $I^b_a \, . \, I^a_b = 1$,

o sea, al cambiar entre sí los períodos base y comparación, los números índices son recíprocos.

De esta propiedad gozan la media geométrica simple [1.3], el índice agregativo simple o índice de Bradstreet y Dutot [1.5] (y los ponderados correspondientes en el caso de que los pesos sean independientes del tiempo) y el índice ideal de Fisher [2.6]. Al invertir en este último los períodos base y actual se reduciría a:

$$\sqrt{\frac{\Sigma\, p_{i0}\, q_i}{\Sigma\, p_i\, q_i} \quad \frac{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}}{\Sigma\, p_i\, q_{i0}}} = \frac{1}{F}$$

3.ª *Circular*: $I^a_b \; I^b_c \; I^c_d \; I^d_a = 1$

que es una generalización de la propiedad de inversión.

4.ª *Existencia*: El índice no puede hacerse nulo, infinito o indeterminado. De esta propiedad no goza el índice de la media geométrica, ya que si un p_i fuese igual a cero G también lo sería.

5.ª *Proporcionalidad*: Si todos los precios experimentan una variación proporcional, el índice conjunto experimenta la misma variación.

Veamos si goza de esta propiedad el índice de Laspeyres, por ejemplo: Si cada p_i pasa a ser $p_i + \lambda\, p_i$, tenemos que:

$$L = \frac{\Sigma\, p_i\, q_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} \text{ pasa a ser } \frac{\Sigma\, (p_i + \lambda\, p_i)\, q_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} =$$

$$= \frac{\Sigma\, p_i\, q_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} + \lambda\, \frac{\Sigma\, p_i\, q_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} = L + \lambda\, L$$

con lo que vemos que sí satisface la propiedad de proporcionalidad.

El índice de Paasche la satisfaría en tanto que ante una variación de p_1 no sufriera ninguna el correspondiente q_1, lo que no es fácil que ocurra en la realidad.

Es inmediato ver que goza de esta propiedad el índice agregativo simple o índice de Bradstreet y Dutot, por lo que es el único que satisface todas las propiedades consideradas hasta ahora.

6.ª *Homogeneidad: El valor del índice no debe venir afectado* por un cambio de las unidades de medida de las variables que lo definen.

Esta propiedad podemos considerarla como utópica, ya que en la realidad no tiene prácticamente sentido que ante un cambio de unidad no se altere la fórmula por tratarse, en general, de un cociente de valores agregativos de sumandos positivos.

No existe, pues, ninguna fórmula conocida que satisfaga estas seis propiedades y solamente la de Bradstreet y Dutot satisface las cinco primeras. Ahora bien, esta fórmula no incluye ponderaciones, lo que la hace también rechazable; sin embargo, el profesor español Fernández Baños ha introducido una modificación que subsana este inconveniente. Consiste en sustituir los precios p_1 y p_{10} por otros tales que:

$$p'_1 = p_1 k_1 \quad \text{y} \quad p'_{10} = p_{10} k_1$$

en donde las k_1 son constantes obtenidas para cada artículo, que resumen la importancia del mismo, además de efectuar una corrección de la unidad de medida. La única objeción que podemos poner al índice de Fernández Baños, con el que están calculados los índices de precios al por mayor que publica el Instituto Nacional de Estadística, es que ¿no se habrán obtenido los coeficientes k_1 a partir de los valores del artículo? En este caso se repetirían los precios como factor y obtendríamos un índice de Laspeyres del cuadrado de los precios. Si no es así, ¿serán los k_1 números proporcionales a los q_1? Aquí caeríamos en el índice corriente de Laspeyres; y de no haberse obtenido estas constantes por ninguno de estos dos procedimientos, ¿podremos tener confianza en que el "enmascarado" coeficiente de ponderación k_1 refleje verdaderamente la importancia de la mercancía en el conjunto? Desgraciadamente nuestro querido profesor no puede respondernos a estas preguntas porque su inesperada muerte le impidió publicar con detalle el método que siguió y los datos en que se apoyó para calcular realmente los coeficientes k_i que se vienen utilizando.

4.—NÚMEROS ÍNDICES DE PRODUCCIÓN.

Los índices de producción o índices cuánticos, en contraposición con los índices valorales o de precios, tienen por objeto disponer de una serie de números de fácil manejo e interpretación que presenten el movimiento del volumen de la producción total en todos y cada uno de los sectores de la economía. Las Naciones Unidas recomiendan que "el índice de producción industrial debe relacionarse con el concepto de producto nacional (bruto o neto) al coste de factores" (21), y utilizan la palabra "industrial" porque estas instrucciones se refieren solamente a dicho sector de la economía.

Si la característica X es el *volumen físico de producción* y las modalidades X_i son los nombres de los distintos *productos* que componen el índice, sustituyendo el símbolo x por q, tenemos ocho fórmulas, como las [1.1.2] a [1.1.5] y [1.1.2'] a [1.1.5'], para calcular números índices de la producción. Abandonaremos desde luego las cuatro primeras, correspondientes a números índices simples, porque no se utilizan nunca en la realidad. En los índices de precios se emplea, y está a veces justificado el índice de Sauerbeck, porque puede haber una ponderación implícita eligiendo un número de calidades o variedades de un mismo artículo tal que dicho número sea en sí una medida de su importancia en la construcción del índice general; pero la dificultad de obtener datos de producción, especialmente mensuales, y la falta de variedades con que se suelen obtener algunos productos básicos, p. ej., energía eléctrica, hacen inaplicable en nuestro problema aquel procedimiento; por lo tanto, *sólo se emplean fórmulas de números índices ponderados.*

---

(21) OFICINA DE ESTADÍSTICA DE LAS NACIONES UNIDAS: *Números índices de la producción industrial.* "Estudios de Métodos", núm. 1, pág. 19. Nueva York, 15 septiembre 1950.

Precisamente, el problema fundamental de este tipo de índices económicos es el del cálculo del coeficiente de ponderación. También se mide la importancia por el valor del producto, pero no por el valor bruto, que implicaría contar un mismo valor en las distintas fases de un mismo proceso productivo, sino por los *valores netos o añadidos* que son la aportación en valor, al coste de los factores, del proceso productivo que transforma estos factores en producto bruto, o sea:

valor neto = valor del producto — costes.

Ordinariamente, sólo se descuenta del valor del producto el coste de las materias primas y energía.

El cálculo de los valores netos exige el conocimiento de una detallada información estadística, a ser posible un censo de producción en el período base, lo que no permite emplear de los cuatro *coeficientes de ponderación* dados en [2.3] nada más que los (*a*) y (*c*), o sea, los dos en que figura el precio del año base p_{i0}. En los índices de producción éste es un *precio neto* o valor neto unitario y el empleo de los valores netos (*a*) o (*c*) nos conduce a promedios ponderados como en el caso de los precios.

La fórmula de la media aritmética ponderada se transforma aquí en la

$$a' = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{q_i}{q_{i0}} p_{i0} q_{i0}}{\sum_{1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum q_i p_{i0}}{\sum q_{i0} p_{i0}} \qquad [4.1]$$

para $$w_i = p_{i0} q_{i0}$$

que es la versión de la *fórmula de Laspeyres* en el caso de los índices cuánticos. También aquí puede considerarse como un índice agregativo ponderado de base fija. Esta es en la práctica casi la única fórmula empleada por todos los países para calcular sus índices de producción, pues, como hemos recogido en otro trabajo nuestro, salvo Dinamarca e Irlanda, los demás países de los que publican números índices las Naciones Unidas sólo emplean la fórmula de Laspeyres (22).

Un problema que se presenta en la construcción de estos índices es el de las *industrias y establecimientos que debe comprender.* Las Naciones Unidas recomiendan incluir productos de minería, canteras, petróleo, alimentación, bebidas, tabaco, textil y vestido, piel y calzado, madera y muebles, corcho, papel, caucho, productos químicos, derivados del petróleo y del carbón, derivados de productos minerales no metálicos, metalurgia y siderurgia, productos metálicos, maquinaria, material eléctrico, material de transporte, otras industrias manufactureras, construcción, electricidad y gas y vapor, es decir, las agrupaciones 11 a 51 inclusive de la "Clasificación Industrial Internacional uniforme de todas las Actividades Económicas", de la que existe en España una clasificación detallada nacional publicada por el Instituto Nacional de Estadística. A su vez, estas industrias debe reagruparse en cuatro divisiones, de las que también deben elaborarse índices especiales; son: I, Explotación de minas y canteras; II, Industrias manufactureras; III, Construcción, y IV, Electricidad y gas.

La recomendación del número de series que deben utilizarse en el cálculo del índice general es que deben ser superior a 100 e inferior a 500. El período base varía de una nación a otra, y en España se viene empleando la media del trienio 1929-30-31. Debe realizarse una corrección de la variación estacional y del número de días trabajados, en el caso de los índices mensuales.

La dificultad que la captación de información apropiada en las industrias de la Construcción y otras, con largos períodos de producción origina el cálculo de números índices cuánticos mensuales, es causa de que la mayor parte de los países no construyan estos índices.

Esta y otras dificultades pueden solucionarse utilizando números índices mensuales del movimiento anual, es decir, utilizando como cantidades las producidas durante doce meses de los que el último es aquel a que viene referido el número índice. En nuestro trabajo, al que ya hemos hecho referencia en (22), demostramos, por métodos empíricos, diversas propiedades de estos números ín-

(22) ANGEL ALCAIDE INCHAUSTI: *Números índices mensuales del movimiento anual.* Instituto Nacional de Estadística, Madrid, 1956. Estado núm. 3.

dices, las cuales nos permiten construir con facilidad no sólo números índices mensuales de la construcción, fabricación de barcos, etc., sino incluso de la agricultura y como consecuencia del producto nacional bruto y de la renta nacional (23).

5.—Números índices de salarios.

El cálculo de estos números índices exige definir con precisión el concepto que ha de utilizarse y el objetivo que se persigue con el índice.

Siguiendo al experto en Estadística de las Naciones Unidas, Gaston Duon, vamos a recomendar cuatro problemas distintos que pueden incluirse dentro de nuestro epígrafe (24).

a) *Nivel general de los salarios.*—Es este nivel el que ordinariamente se intenta obtener con los números índices de salarios y debe corresponder a las variaciones del salario por hora de trabajo, o semanales, del conjunto de asalariados. Ahora bien, al dar el concepto de salario que va a emplearse es necesario delimitar perfectamente qué cantidades cobradas o no por el asalariado se incluyen y cuáles se excluyen en el concepto: horas extraordinarias, gratificaciones voluntarias de la empresa, vacaciones retribuídas, cargas sociales, impuestos personales, subsidios familiares, etc. Asimismo, es necesario precisar cómo ha de realizarse el cómputo, en su caso, de los salarios en especie, de los sueldos mensuales, de los honorarios de artesanos, profesiones liberales, etc.

La clasificación de las unidades estadísticas, de las que se ha de recabar información, debe hacerse atendiendo a las clases o grupos de los que se desea obtener índices parciales. En principio pueden obtenerse índices de origen espacial o de origen económico y dentro de cada uno de ellos deben conseguirse números índices aislados por grados jerárquicos de la cualificación profesional. También pueden subdividirse éstos en salarios de hombres, mujeres y jóvenes o aprendices. En el caso de los índices espaciales se debe tomar como base el correspondiente salario medio nacional

(23) En (22) se muestra la posibilidad de obtener gráficos de inspección de la calidad de los datos mensuales antes de proceder a la elaboración del índice; no hay necesidad de efectuar correcciones de las variaciones estacionales y dan directamente la tendencia secular de la serie.

(24) Ob. cit. (17), pág. 82.

y pueden obtenerse índices parciales de regiones, provincias, comarcas e incluso municipios o ciudades. Si los salarios son de origen económico o, mejor expresado, índices por ramas o sectores de la economía, pueden obtenerse índices de la agricultura, ganadería, pesca, minería, industrias manufactureras subdivididas en los grupos que se consideren de importancia nacional, servicios privados y públicos, artesanos y profesiones liberales.

No puede darse una norma para fijar el período base; internacionalmente se ha venido usando el año 1938 para poder comparar con los niveles de anteguerra (en España, el 1936) y, actualmente, se ha recomendado la utilización de las cifras del año 1949 como cifras base.

Las fórmulas más usadas son las de la media aritmética y geométrica ponderadas con el número de horas-hombre trabajadas en cada sector, si se dispone de esta información, o simplemente con el número de asalariados que gozan de cada tipo de salario. La obtención de los coeficientes de ponderación exige la formación de censos profesionales o la posibilidad de conseguir una detallada información a este respecto de los censos de población o económicos.

b) *Participación del factor trabajo en la producción.*—Este segundo problema, que pueden resolver los números índices de salarios, no exige que éstos se obtengan mediante una fórmula de nivel, sino de masa; deben representar el coste de la mano de obra por unidad de producción; pero este coste, antes de ser unitario, debe corresponder a la remuneración global de los trabajadores empleados en el correspondiente proceso productivo, sin discriminación por categoría, sexo, etc.

En este caso podrían obtenerse números índices para cada uno de los grupos de clasificación de actividades económicas por el método de la media agregativa simple, o de Bradstreet y Dutot, de los costes unitarios de cada producto, o lo que es igual

$$S = \frac{\sum_{1}^{n} \dfrac{s_i}{q_i}}{\sum_{1}^{n} \dfrac{s_{i0}}{q_{i0}}} \qquad [5.1]$$

en donde s_i y s_{i0} son las remuneraciones globales en el período actual y base, respectivamente, gastadas en la obtención de cada producto y q_i, q_{i0} la cantidad obtenida de dicho producto en el período actual o base.

Claro es que los costes unitarios pueden ponderarse por el número total de horas-hombre trabajadas en el período base (fórmula de Laspeyres) o en el actual (fórmula de Paasche), con lo que llamando h_i o h_{i0} al número de horas-hombre trabajadas en el período actual o en el base, se tienen las fórmulas

$$S_L = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{s_i}{q_i} h_{i0}}{\sum_{1}^{n} \frac{s_{i0}}{q_{i0}} h_{i0}} \quad \text{ó} \quad S_P = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{s_i}{q_i} h_i}{\sum_{1}^{n} \frac{s_{i0}}{q_{i0}} h_i}. \qquad [5.2]$$

Si no interesa la variación de los costes unitarios, sino sólo la de los globales, puede usarse la media aritmética ponderada, tal como

$$S_{a'_0} = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{s_i}{s_{i0}} h_{i0}}{\sum_{1}^{n} h_{i0}} \quad \text{ó} \quad S_a = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{s_i}{s_{i0}} h_i}{\sum_{1}^{n} h_i}. \qquad [5.3]$$

En estas cuatro últimas fórmulas pueden sustituirse h_i y h_{i0}, en caso de no contar con información estadística, por el número de trabajadores de la empresa, o de la industria (menos los parados).

Estas fórmulas que hemos empleado no las hemos visto aplicadas en casos particulares, ni expuestas en ningún trabajo, pero nos parece que son las que mejor pueden reflejar los cambios que queremos medir y la importancia de los valores empleados dentro de las características del problema.

c) *Poder de compra de los salarios.*—Para estudiar la variación del poder adquisitivo del salario es necesario trabajar con valores reales, que pueden conseguirse dividiendo las cifras actuales por el índice de coste de la vida. Sin embargo, pueden presentarse en la práctica diversas cuestiones que pueden hacer cambiar la interpretación y significación del índice; así puede referirse el índice al salario cobrado en un período de tiempo fijado (semana, mes, etc.) o según el número de horas trabajadas y aún, en el primer caso, podemos referirnos al salario personal o al familiar.

El salario familiar real en un período de tiempo fijado nos permite conocer la variación del nivel de vida de la familia prescindiendo del esfuerzo que le cuesta conseguirlo, o sea, el poder real de compra de familia; el salario real personal por hora trabajada nos dice cómo varía la remuneración real de la hora de trabajo o poder adquisitivo de la misma. Su distinta significación nos obligará a calcular un tipo u otro de índice según el objetivo que nos propongamos con su empleo en cada caso concreto.

Se utilizan las mismas fórmulas que en el problema del apartado *a*), empleando valores reales en lugar de actuales, y también pueden hacerse las mismas consideraciones generales establecidas allí.

d) *Renta nacional de los asalariados.*—La renta nacional (coste de factores) puede ser considerada como la suma de los ingresos de los consumidores por rentas pagadas por los empresarios y rentas pagadas por el Estado más la renta retenida o reservas de las empresas (25); pues bien, una gran parte de la renta nacional está, pues, constituída por las remuneraciones globales de los asalariados (*obreros, empleados, funcionarios, etc.*), *debiendo existir* una correlación intensa entre la renta nacional y el importe global de las remuneraciones.

El cálculo del índice general se limita en este caso al cociente del importe de las remuneraciones en el período actual y en el base. Si se quieren obtener índices de sectores o regiones pueden calcularse por el mismo procedimiento en cada uno de ellos. El conocimiento de las cifras de empleo o paro puede permitir realizar estimaciones de los valores que se utilizan en el cálculo del índice, o incluso del mismo índice.

Un estudio de la determinación de la parte de renta nacional, debida a los salarios ha sido realizado por Torti (26).

---

(25) Ob. cit. (1), pág. 66.

(26) M. Torti: "La part des salaires dans le revenue rational". *Journal de la Société de Statistique de Paris*, septiembre-octubre, 1949, pág. 342.

6.—NÚMEROS ÍNDICES DE COMERCIO EXTERIOR.

Estos números índices pueden referirse a mercancías importadas o exportadas y pueden ser cuánticos o de precios. Si en todos los índices económicos que venimos considerando tiene importancia el estudio del problema de la ponderación, aquí lo es en grado sumo, ya que la influencia de los productos pesados y baratos puede enmascarar la influencia de los productos ligeros y de gran valor. Una exportación importante de productos extraídos de canteras o simplemente de minerales puede inducir a creer en una mejora de la balanza comercial cuando el carácter oneroso de esta operación pudiera haber contribuído a perjudicarla.

También hay que cuidar en extremo la lista de productos cuyas cantidades o precios deben figurar en el correspondiente índice, dado el considerable número de artículos y variedades que figuran en cualquier nomenclatura aduanera.

Ambos problemas han sido tratados conjuntamente en la sección 1.2 de este trabajo. La aplicación de las conclusiones allí obtenidas a la determinación de números índices del Comercio Exterior nos inducen a poder aplicar el método de ponderación representativa. En el primer caso, y de acuerdo con la deducción realizada a partir de la expresión [1.2.15], debe procederse a establecer una sucesión monótona decreciente de los coeficientes de ponderación correspondientes a los artículos más importantes, en función de la cual puede obtenerse el h-ésimo o último producto de la lista de los que deben incluirse en el índice general.

Si se utiliza el método de ponderación representativa, debe establecerse una correspondencia entre índices I_i e I'_i que sean aproximadamente iguales y, aunque esto no pueda conseguirse exactamente, el error que se comete en la práctica es menor que el cometido utilizando el método de ponderación directa, en tanto en cuanto la agrupación de mercancías asegure la reunión de coeficientes de ponderación que afecten a precios relativos muy próximos.

El problema más interesante que plantean los números índices de comercio exterior es el que Duon denomina de la *cobertura incompleta* (27). Consiste en lo siguiente: en el año base el índice

(27) Ob. cit. (17), pág. 93.

cubre un determinado porcentaje del valor total de las exportaciones, el 70 por 100 por ejemplo, y al poco tiempo dicho tanto por ciento se reduce significativamente al 50 por 100, por ejemplo. Esta variación puede afectar en gran medida a la significación de los números índices considerados y, especialmente, a la del índice cuántico. Las causas de la variación son de tipo estructural: artículos antes excluídos han adquirido después una gran importancia a causa de los acuerdos comerciales, de las modas, de la escasez, etc.; pero debemos introducir correcciones en las fórmulas de Laspeyres y Paasche, que son las usadas para calcular números índices del comercio exterior, para evitar la influencia de tales alteraciones.

El método propuesto por Duon, aplicable tanto al conjunto total como a un grupo especial, al caso del índice cuántico, que es el más afectado por las variaciones de la cobertura incompleta, es el de calcular el índice cuántico de Laspeyres de los productos incluídos

$$C_L = \frac{\Sigma\, p_{10}\, q_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_{10}}, \qquad [6.1]$$

como índice básico y corregirlo mediante el cociente del índice agregativo simple de valores de los productos excluídos por el índice de precios de Paasche de los productos incluídos; dicho cociente es el de V'_A por P_P, en donde

$$V'_A = \frac{\Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}} \quad \text{y} \quad P_P = \frac{\Sigma\, p_1\, q_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_1}. \qquad [6.2]$$

El índice corregido es una media aritmética ponderada con los valores en el año base de los productos incluídos y excluídos, respectivamente, de los números

$$C_L \quad \text{y} \quad \frac{V'_A}{P_P},$$

o sea,

$$E_C = \frac{C_L\, \Sigma\, p_{10}\, q_{10} + \dfrac{V'_A}{P_P}\, \Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}}{\Sigma\, p_{10}\, q_{10} + \Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}}. \qquad [6.3]$$

Vamos a demostrar que esta corrección, de inmediata aplicación por no exigir más información de los valores excluídos que la suma de estos valores, es equivalente, en ciertas condiciones, al empleo de una fórmula cuántica de Laspeyres, extendida a todas las mercancías que comprende la nomenclatura aduanera utilizada.

En efecto, verificando determinadas transformaciones y simplificaciones en la fórmula [6.3], después de sustituir en ella los valores de [6.1] y [6.2] y llamar V_0 a su denominador, tenemos:

$$E_C = \frac{1}{V_0} \left\{ \Sigma\, p_{10}\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1 \frac{\Sigma\, p_{10}\, q_1}{\Sigma\, p_1\, q_1} \right\} = \frac{\Sigma\, p_{10}\, q_1}{V_0} .$$

$$\frac{\Sigma\, p_1\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p_1\, q_1} = \frac{\Sigma\, p_1\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_{10} + \Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}} : \frac{\Sigma\, p_1\, q_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_1} \qquad [6.4]$$

Admitiendo la igualdad de los índices de precios de Paasche de los productos incluídos y excluídos, se tiene:

$$\frac{\Sigma\, p_1\, q_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_1} = \frac{\Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p'_{10}\, q'_1} = \frac{\Sigma\, p_1\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_1 + \Sigma\, p'_{10}\, q'_1}$$

y sustituyendo esta expresión en el divisor del último miembro de [6.4],

$$E_C = \frac{\Sigma\, p_1\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_{10} + \Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}} : \frac{\Sigma\, p_1\, q_1 + \Sigma\, p'_1\, q'_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_1 + \Sigma\, p'_{10}\, q'_1} = \qquad [6.5]$$

$$= \frac{\Sigma\, p_{10}\, q_1 + \Sigma\, p'_{10}\, q'_1}{\Sigma\, p_{10}\, q_{10} + \Sigma\, p'_{10}\, q'_{10}}$$

que demuestra nuestra proposición.

El cálculo práctico de la fórmula E_C es inmediato teniendo en cuenta que puede ponerse en la forma,

$$E_C = \frac{V}{V_0}\, P_P \qquad [6.6]$$

en donde V es el valor de las exportaciones (o importaciones) en el período actual, V_0 el valor en el período base y P_P el índice de precios de Paasche.

Otros números índices de comercio exterior son los denominados *índices de valores medios* y los *índices de relaciones de cambio* de gran interés en Economía.

Los *índices de valores medios* V_M se obtienen dividiendo un índice agregativo simple de valores V_A por un índice cuántico de Laspeyres C_L y quieren ser como una generalización del valor medio de exportación (o importación) de una mercancía —*relación entre el valor total y la cantidad de mercancía exportada (o importada)*—. Su expresión será, por lo tanto,

$$V_M = \frac{V_A}{C_L} = \frac{\Sigma\, p_i\, q_i}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} : \frac{\Sigma\, p_{i0}\, q_i}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}} = \frac{\Sigma\, p_i\, q_i}{\Sigma\, p_{i0}\, q_i} = P_P \qquad [6.7]$$

que, como vemos, vuelve a darnos la fórmula de índice de precios de Paasche.

El *índice de relaciones de cambio* viene dado por la relación entre los índices de valores medios de exportación y de importación, o sea,

$$R = \frac{V^e_M}{V^i_M} = \frac{P^e_P}{P^i_P}\,. \qquad [6.8]$$

Si el valor de este índice es superior a la unidad, el precio medio de los productos exportados es superior al precio medio de los productos importados en el período de referencia, y en ese caso es posible el pago de las exportaciones con menor cantidad de importaciones; en este caso ha mejorado la relación de cambio y en el contrario ha empeorado.

Revisando todas las conclusiones a que hemos llegado en esta Sección, podemos recomendar el empleo de la fórmula de Laspeyres para calcular índices cuánticos y la de Paasche para índices de precios. El índice de valores medios coincide con el de precios en este caso, pero no si se calculan éstos por la fórmula de Laspeyres, como se suele hacer en el caso de los números índices de precios al por mayor. El índice de precios de Paasche presenta un gran inconveniente al calcularlo para períodos cortos de tiempo —caso de los números índices mensuales e incluso trimestrales— debido a las fluctuaciones de las cantidades exportadas o importadas entre pequeños intervalos de tiempo, por lo que es preferible, a nuestro parecer, el empleo de la fórmula de Laspeyres en el cálculo de los números de índices de precios mensuales, sin efectuar la corrección [6.6] en estos períodos ni obtener los índices de relaciones de cambio, y la de Paasche en el caso anual.

Otra posibilidad del empleo mensual de la fórmula de Paasche es la de calcular números índices mensuales del movimiento anual, de acuerdo con nuestra propuesta formulada en los índices de producción industrial, ya que por este procedimiento se evita el único inconveniente que surge de las fluctuaciones de q_i en períodos cortos de tiempo.

II

LOS NUMEROS INDICES DESDE UN PUNTO DE VISTA ECONOMICO

7.—Los índices infinitesimales.

Las fórmulas consideradas hasta ahora para obtener números índices de magnitudes económicas, presentan el grave inconveniente de la falta de actualidad en el período de comparación o en el período base —según la fórmula utilizada— de los coeficientes de ponderación, artículos incluídos, etc., ante variaciones en la estructura económica del país o en el nivel de vida, al comparar magnitudes observadas en períodos de tiempo algo distantes.

Para evitar este inconveniente, y ante sugerencias de los economistas Jevons y Marshall, construyeron los estadísticos los denominados *índices en cadena,* obtenidos como producto de índices simples —eslabones de la cadena— del tipo agregativo ponderado [1.1.5′], referido cada eslabón a períodos muy próximos; esto es, el índice general toma la forma

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} w_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0} w_{i1}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2} w_{i2}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} w_{i2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it} w_{it}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i,t-1} w_{it}} \qquad [7.1]$$

en donde el primer subíndice indica mercancía y el segundo, período de tiempo (en lo sucesivo abreviaremos esta notación suprimiendo el primer subíndice i).

A una solución racional y económica del problema se llega partiendo de la "ecuación de cambio"

$$P\,Q = M\,V \qquad [7.2]$$

en la que M es el volumen de dinero (en el sentido de "medios de pago"), V su velocidad media de circulación, P un índice del nivel de precios, y Q un índice de la cantidad vendida. Esta ecuación que, como dice muy bien Pedersen (28), "no prueba otra cosa sino que el valor de la cantidad de mercancía vendida es igual al importe que se ha gastado en su compra", puede expresar también la relación entre las rentas R_t y R_0 gastadas en los períodos t y 0 que han podido servir de referencia para calcular los índices P y Q, o sea,

$$P\,Q = \frac{R_t}{R_0} = \frac{\Sigma\, p_t\, q_t}{\Sigma\, p_0\, q_0} = k\, \Sigma\, p_t\, q_t \qquad [7.2']$$

en donde expresamos por p_t y q_t (en lugar de p_{it} y q_{it}) el precio y cantidad de una mercancía i-ésima en el período t, y k es una constante igual al valor recíproco de la renta gastada en el período base.

Admitiendo que P, Q, p_t y q_t toman valores dependientes de la variable tiempo t, podemos diferenciar logarítmicamente los dos miembros extremos de [7.2], con lo que

$$\log_e P + \log_e Q = \log_e k + \log_e \Sigma\, p_t\, q_t\,, \quad \text{y}$$

$$[7.3]$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q} = \frac{d\,\Sigma\, p_t\, q_t}{\Sigma\, p_t\, q_t} = \frac{\Sigma\, p_t\, d\, q_t}{R_t} + \frac{\Sigma\, q_t\, d\, p_t}{R_t}.$$

(28) JORGEN PEDERSEN: "Teoría y Política del Dinero". Madrid, 1946, página 135. Ed. Aguilar.

A partir de estos resultados se definen el *índice infinitesimal cuántico* Q, tal que,

$$\frac{d\,Q}{Q} = \frac{\Sigma\, p_t\, d\, q_t}{R_t} \qquad [7.4]$$

y el *índice infinitesimal de precios,* P, tal que,

$$\frac{d\,P}{P} = \frac{\Sigma\, q_t\, d\, p_t}{R_t} \qquad [7.5]$$

debido a *Divisia,* con cuyo nombre y el de *índice monetario* es conocido en la literatura económico-estadística.

La condición [7.2], conocida como *condición de reversibilidad,* puede aplicarse a períodos de tiempo finito, pero como dice R. Roy (29), "a François Divisia corresponde el mérito de haberla aplicado a un periodo de tiempo infinitamente pequeño y haber sacado así el mejor partido posible de la misma".

Sobre el tratamiento y propiedades del índice monetario existen otras publicaciones, además del trabajo de Divisia (30), los del profesor francés René Roy, a los que hemos hecho y haremos diversas referencias y las lecciones, no publicadas hasta ahora, del catedrático español José Castañeda. Como hay un artículo en castellano de Roy publicado en esta misma revista (29), sólo vamos a exponer algunas cuestiones fundamentales o las que hemos de utilizar en las secciones siguientes.

En primer lugar, para obtener explícitamente los índices P y Q, es necesario integrar las ecuaciones diferenciales [7.4] y [7.5]. Todas las variables que incluyen dependen de la variable independiente t (tiempo), y en el segundo miembro de la [7.5], por ejemplo, existen n funciones que representan paramétricamente una curva en el espacio n — dimensional; considerados sobre ella dos puntos A y B correspondientes a los valores t_0 y t del parámetro t,

(29) René Roy: "Teoría y Aplicación de los Números Indices. Revista de Economía Política, vol. 1, núm. 2, Madrid, 1945, pág. 305.

(30) Divisia, F.: "L'indice monétaire et la théorie de la monnaie". *Revue d'économie politique,* 1925.

la integral del segundo miembro de [7.5] es una integral curvilínea, que podemos expresar por:

$$\Sigma \int_{t_0}^{t} \frac{q_t}{R_t} \frac{d p_t}{d t} d t = \Sigma \int_{t_0}^{t} F(t)\, p'_t\, d t = \log_e P \qquad [7.6]$$

como puede comprobarse consultando algún tratado de Cálculo Integral (31). Como consecuencia, las fórmulas de P y Q son:

$$P = e^{\Sigma \int_{t_0}^{t} \frac{q_t}{R_t} p'_t d t} \quad \text{y} \quad Q = e^{\Sigma \int_{t_0}^{t} \frac{p_t}{R_t} q'_t d t} \qquad [7.7]$$

Los segundos miembros de [7.5] y [7.4] no son sino medias aritméticas ponderadas de las variaciones relativas infinitesimales de los precios o las cantidades; en efecto:

$$\frac{\Sigma q_t d p_t}{R_t} = \Sigma \frac{q_t}{R_t} d p_t = $$
$$= \Sigma \frac{q_t p_t}{R_t} \frac{d p_t}{p_t} = \Sigma w \frac{d p_t}{p_t} = \frac{d P}{P} \qquad [7.8]$$

con $\Sigma w = 1$, y análogamente podemos hacer en la ecuación [7.4].

Si denominamos P_1 al índice monetario en el momento t_1 y P_2 al índice en el momento $t_1 + d t_1$ y aplicamos a [7.4] una conocida propiedad de las proporciones, se tiene que

$$\frac{P_1 + d P_1}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{\Sigma q_1 d p_1 + R_1}{R_1} =$$
$$\frac{\Sigma (q_1 d p_1 + q_1 p_1)}{R_1} = \frac{\Sigma q_1 (p_1 + d p_1)}{R_1}$$
$$= \frac{\Sigma q_1 p_2}{R_1} = \Sigma \frac{q_1}{R_1} p_2 = \Sigma \frac{q_1 p_1}{R_1}. \qquad [7.9]$$
$$\frac{p_2}{p_1} = \Sigma w_1 \frac{p_2}{p_1},$$

(31) F. NAVARRO BORRÁS: "Curso Superior de Análisis Matemático". Madrid, 1942, pág. 160.

en donde

$$\Sigma\, w_1 = \Sigma\, \frac{p_1\, q_1}{R_1} = \frac{\Sigma\, p_1\, q_1}{R_1} = 1$$

por lo que deducimos:

1.° La relación entre los índices de precios de Divisia en dos momentos del tiempo es una media aritmética ponderada de los correspondientes índices simples de precios.

2.° El producto de las relaciones de índices en cada dos momentos consecutivos, que nos da la variación del índice en el momento t respecto al base, es un índice en cadena, o sea,

$$\frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \ldots \cdot \frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_0} = \tag{7.10}$$

$$\frac{\Sigma\, q_0\, p_1}{\Sigma\, q_0\, p_0} \cdot \frac{\Sigma\, q_1\, p_2}{\Sigma\, q_1\, p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\Sigma\, q_{t-1}\, p_t}{\Sigma\, q_{t-1}\, p_{t-1}}$$

obtenido aplicando sucesivamente la igualdad

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Sigma\, q_1\, p_2}{R_1} = \frac{\Sigma\, q_1\, p_2}{\Sigma\, q_1\, p_1}$$

deducida en [7.9]; es una expresión análoga a la [7.1].

También puede llegarse directamente a un índice en cadena, a partir de la fórmula de P dada en [7.6]; para ello podemos descomponer el intervalo de tiempo (t_0, t) en intervalos parciales (t_0, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{t-1}, t), de índices $P^1{}_0$, $P^2{}_1$, ... $P^t{}_{t-1}$, tales que

$$P^1{}_0 \cdot P^2{}_1 \cdot \ldots \cdot P^t{}_{t-1} = e^{\Sigma \int_{t_0}^{t_1} \frac{q_t}{R_t} p'_t\, dt + \ldots + \Sigma \int_{t-1}^{t} \frac{q_t}{R_t} p'_t\, dt} =$$

$$= e^{\Sigma \int_{t_0}^{t} \frac{q_t}{R_t} p'_t\, dt} = P = P^t{}_0 . \tag{7.11}$$

Las ecuaciones [7.10] y [7.11] nos demuestran, además, que el índice de Divisia goza de las propiedades circular y de inversión en el tiempo expuestas en la Sección 3.

Análogas consideraciones pueden establecerse para el índice cuántico Q.

Una aplicación interesante del índice de Divisia es la obtención de *índices económicos* o *índices parciales*, de acuerdo con la terminología de Roy (32). Tales índices corresponden a los pagos realizados en los distintos estadios del proceso económico y pueden obtenerse descomponiendo en sumas parciales la que figura en el segundo miembro de la ecuación básica [7.2]. Dichas sumas parciales pueden referirse a los pagos efectuados por los productores, intermediarios (mayoristas, minoristas, etc.) y por los consumidores; pero nosotros, para dar mayor generalidad a los resultados, vamos a descomponer la suma total en h sumas parciales, que expresaremos así:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it}\, q_{it} = \sum_{i=1}^{n_1} p_{it}\, q_{it} + \sum_{i=1}^{n_2} p_{it}\, q_{it} + \dots + \sum_{i=1}^{n_h} p_{it}\, q_{it} = S_1 + S_2 + \dots + S_h = S . \qquad [7.12]$$

Diferenciando miembro a miembro, suponiendo sólo variables con el tiempo a los precios,

$$\sum_{i=1}^{n} q_{it}\, d\, p_{it} = \sum_{i=1}^{n_1} q_{it}\, d\, p_{it} + \sum_{i=1}^{n_2} q_{it}\, d\, p_{it} + \dots + \sum_{i=1}^{n_h} q_{it}\, d\, p_{it} , \qquad [7.13]$$

o con notación abreviada,

$$d\,S = d\,S_1 + d\,S_2 + \dots + d\,S_h . \qquad [7.14]$$

---

(32) René Roy: "Les divers concepts en matière d'indices". *Journal de la Societé de Statistique de Paris* (septiembre-octubre, 1941), o "Os diversos conceitos em matéria de índices". *Revista Brasileira de Statistica,* núm. 40, 1949, pág. 583. También puede consultarse en op. cit. (2), pág. 307.

Los índices parciales, que denominaremos $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ..., $P^{(h)}$, los definiremos como definimos a P en [7.5], o sea,

$$\frac{d\,P^{(1)}}{P^{(1)}} = \frac{d\,S_1}{S_1}, \quad \frac{d\,P^{(2)}}{P^{(2)}} = \frac{d\,S_2}{S_2}, \ldots, \frac{d\,P^{(h)}}{P^{(h)}} = \frac{d\,S_h}{S_h}. \qquad [7.15]$$

Podemos establecer una relación lineal que ligue estas variaciones infinitesimales relativas de los índices parciales con la correspondiente del índice general, tal como la

$$\frac{d\,P}{P} = \alpha_1 \frac{d\,P^{(1)}}{P^{(1)}} + \alpha_2 \frac{d\,P^{(2)}}{P^{(2)}} + \ldots + \alpha_h \frac{d\,P^{(h)}}{P^{(h)}} \qquad [7.16]$$

en la que cada coeficiente vale

$$\alpha_r = \frac{S_r}{S} = \frac{\sum_{i=1}^{n_r} p_{it}\, q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it}\, q_{it}} \quad (r = 1, 2, \ldots, h) \qquad [7.17]$$

y cumplen la condición

$$\sum_{r=1}^{h} \alpha_r = \frac{\sum_{r=1}^{h} S_r}{S} = \frac{S}{S} = 1. \qquad [7.18]$$

Al pasar a forma finita la ecuación [7.16] hay que admitir la constancia de los coeficientes α_r, lo que sólo debe hacerse ante una pequeña variación en el tiempo; en estas condiciones

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\,P}{P} = [\log_e P]_{t_0}^{t} = \log_e P - \log_e P_0 = \log_e \frac{P}{P_0}$$

es decir, la [7.16] conduce a la relación,

$$\log_e \frac{P}{P_0} = \alpha_1 \log_e \frac{P^{(1)}}{P^{(1)}_0} + \alpha_2 \log_e \frac{P^{(2)}}{P^{(2)}_0} + \qquad [7.19]$$

$$+ \dots + \alpha_h \log_e \frac{P^{(h)}}{P^{(h)}_0}$$

que, según el profesor francés, está particularmente indicada si los índices parciales están muy ligados por una relación de dependencia, como es el caso considerado de una descomposición del conjunto de los pagos en aquellos que satisfacen los productores, intermediarios y consumidores.

Haciendo

$$\frac{P}{P_0} = 1 + z \quad \text{y} \quad \frac{P^{(r)}}{P^{(r)}_0} = 1 + z_r$$

y sustituyendo en [7.19], se tiene

$$\log_e (1 + z) = \sum_{r=1}^{h} \alpha_r \log_e (1 + z_r) = \sum_{r=1}^{h} \alpha_r \left(z_r - \right.$$

$$\left. - \frac{z^2_r}{2} + \frac{z^3_r}{3} - \dots\right) \simeq \sum_{r=1}^{h} \alpha_r z_r$$

despreciando los términos de grado superior al primero. Realizando la misma simplificación en el primer miembro de la igualdad anterior, tenemos la fórmula aproximada

$$z \simeq \sum_{r=1}^{h} \alpha_r z_r ,$$

o sea,

$$\frac{P}{P_0} - 1 = \sum_{r=1}^{h} \alpha_r \left(\frac{P^{(r)}}{P^{(r)}_0} - 1 \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{h} \alpha_r \frac{P^{(r)}}{P^{(r)}_0} - \sum_{r=1}^{h} \alpha_r = \sum_{r=1}^{h} \alpha_r \frac{P^{(r)}}{P^{(r)}_0} - 1,$$

lo que permite escribir

$$\frac{P}{P_0} = \alpha_1 \frac{P^{(1)}}{P^{(1)}_0} + \alpha_2 \frac{P^{(2)}}{P^{(2)}_0} + \dots + \alpha_h \frac{P^{(h)}}{P^{(h)}_0}, \qquad [7.19]$$

que es la denominada por Roy *ecuación lineal general*, la cual coincide con una media aritmética ponderada de los índices parciales y es muy usada en la práctica.

Esta ecuación equivale a admitir una proporcionalidad entre los coeficientes q_{it} y q_{i0}; en efecto, si

$$\frac{q_{1t}}{q_{10}} = \frac{q_{2t}}{q_{20}} = \dots = \frac{q_{nt}}{q_{n0}} = \lambda$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\sum_1^n q_{it}\, d\, p_{it}}{\sum_1^n q_{it}\, p_{it}} = \frac{\sum_1^n \lambda\, q_{i0}\, d\, p_{it}}{\sum_1^n \lambda\, q_{i0}\, p_{it}} = \frac{\sum q_{i0}\, d\, p_{it}}{\sum q_{i0}\, p_{it}} = \frac{d \sum q_{i0}\, p_{it}}{\sum q_{i0}\, p_{it}},$$

que equivale a

$$d \log_e P = d \log_e \sum_1^n q_{i0}\, p_{it}$$

e integrando miembro a miembro en el intervalo (t_0, t), tenemos

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i0}\, p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0}\, p_{i0}} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{q_{i0}\, p_{i0}}{\sum_1^n q_{i0}\, p_{i0}} \cdot \frac{p_{it}}{p_{i0}} + \dots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_h} \frac{q_{i0}\, p_{i0}}{\sum_1^h q_{i0}\, p_{i0}} \cdot \frac{p_{it}}{p_{i0}} = \alpha_1 \frac{P^{(1)}}{P^{(1)}_0} + \dots + \alpha_h \frac{P^{(h)}}{P^{(h)}_0} \qquad [7.20]$$

en donde α_r toma los valores de [7.17], salvo que el subíndice t es aquí 0, lo cual es compatible dado el supuesto de constancia en el tiempo de los coeficientes α_r.

8.—Indices funcionales.

8.1 *Consideraciones generales.*—Los índices funcionales, denominados así por Ragnar Frisch, son los introducidos por Konüs con la denominación de "Indices verdaderos del coste de la vida". Este autor, al plantear el problema, dice (33):

"Por la expresión *coste de la vida* entendemos el valor monetario de aquellas mercancías de consumo que se han consumido *de hecho* a través de un cierto período de tiempo por una familia media perteneciente a un estrato dado de una población. El gasto de las cantidades dadas de mercancías de consumo que define el estado general de satisfacción de las necesidades, lo denominamos *nivel de vida* de la familia en cuestión. Cualquier nivel de vida puede alcanzarse mediante distintas combinaciones de cantidades de mercancías consumidas (que dependen de los precios relativos y gastos monetarios del consumidor).

Si a través de dos períodos de tiempo el estado general de satisfacción de las necesidades de la familia —o el *nivel de vida* de la familia— permanece constante, obtenemos *el índice verdadero del coste de la vida* dividiendo el coste de la vida en un período de tiempo por el coste de la vida en el otro período."

Como podemos observar, la idea de Konüs se basa en la renta o valor de las disponibilidades en dos momentos distintos, gastada por un mismo sujeto económico de consumo; cada renta depende a su vez de un sistema de precios relativos en cada momento y de un nivel de satisfacción o hipersuperficie de indiferencia.

Sean, para $i = 1, 2, \dots, n$, p_i y p_{i0} los precios pagados por el sujeto económico en el período de tiempo actual y en el período base, respectivamente; q_i y q_{i0} las cantidades de mercancía i-ésima consumidas por el sujeto económico en los períodos actual y base; y R y R_0 las rentas gastadas por el sujeto en los períodos actual y

---

(33) A. A. Konüs: "The problem of the true index of the cost of living". *Econometrica*, enero, 1939, pág. 10.

base, con la condición de que la satisfacción U producida al sujeto por el consumo de las combinaciones q_i y q_{i0} sea la misma; en estas condiciones el índice funcional de Konüs viene dado por

$$I = \frac{R}{R_0}. \qquad [8.1.1]$$

Ahora bien, la condición exigida sobre constancia del nivel de vida exige la resolución de un problema de equilibrio del consumidor.

Si los niveles de vida o de satisfacción del sujeto vienen dados por una familia de hipersuperficies de indiferencia, de ecuación

$$U = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad [8.1.2]$$

y consideramos un sistema de precios p_i independientes de la actuación del sujeto, y un nivel de satisfacción fijado en U_0, el sujeto elegirá la combinación que satisface [8.1.2], para $U = U_0$, y que le ocasiona un gasto mínimo, o sea, los q_i que satisfagan el sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\delta U}{\delta q_1}\dfrac{1}{p_1} = \dfrac{\delta U}{\delta q_2}\dfrac{1}{p_2} = \ldots = \dfrac{\delta U}{\delta q_n}\dfrac{1}{p_n} \\ U_0 = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{array} \qquad [8.1.3]$$

que determina las condiciones de equilibrio del consumidor (34). Si el sistema ha podido resolverse, las cantidades q_i nos permiten obtener un valor R, tal que

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_n q_n = \Sigma p q. \qquad [8.1.4]$$

Para el sistema de precios p_{i0} y el mismo nivel de utilidad U_0, obtenemos una nueva combinación, $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$, que nos determina una renta R_0, tal que

$$R_0 = p_{10} q_{10} + p_{20} q_{20} + \ldots + p_{n0} q_{n0} = \Sigma p_0 q_0 \qquad [8.1.5]$$

(34) José Castañeda: *Lecciones de Teoría Económica*, 1.ª edición. Madrid, pág. 123.

por lo que el índice funcional I toma el valor

$$I = \frac{R}{R_0} = \frac{\Sigma\, p\, q}{\Sigma\, p_0\, q_0}. \qquad [8.1.6]$$

En la práctica se presentan los siguientes inconvenientes al tratar de calcularlo:

1) Al haber necesidad de resolver un problema de equilibrio del consumidor, los datos y resultados han de referirse a un solo sujeto. Esto lo salva Konüs al decir "por una familia media perteneciente a un estrato dado de una población". Es decir, sólo en estas condiciones de familias pertenecientes a una misma clase económico-social, con niveles de vida muy parecidos, pueden ser válidos los resultados obtenidos.

2) La distancia en el tiempo entre el período actual y el período base debe ser pequeña para que no hayan cambiado las condiciones de vida de las familias, ya que el nivel de utilidad U_0 ha de permanecer fijo.

El índice funcional también ha sido denominado *índice de compensación de los precios*, ya que en [8.1.6], $I\, R_0 = R$ significa que si el consumidor gasta la renta $I\, R_0$ comprará con los precios p_i una combinación de cantidades que le reporta la misma utilidad que la combinación de cantidades comprada a precios p_{i0} con un gasto R_0. En estas condiciones, suele decirse que las rentas R y R_0 son *equivalentes*, o que, si R es la *renta nominal* en el período actual, R_0 es la correspondiente *renta real* referida al período base.

Para ilustrar las consideraciones expuestas vamos a efectuar una representación gráfica en el caso más simple de dos mercancías.

En la figura 1 el conjunto de líneas curvas son la representación gráfica del mapa de líneas de indiferencia de ecuación

$$U = f\,(q_1\,,\, q_2) \qquad [8.1.7]$$

y de ellas, la E E' corresponde al nivel de vida del sujeto considerado y que toma, en [8.1.7], el valor U_0.

Ante un sistema de precios dados en el período base, p_{10}, p_{20}, tenemos una ecuación de balance del tipo

$$r_0 = p_{10}\, q_1 + p_{20}\, q_2 \qquad [8.1.8]$$

que define, para cada valor de r_0, un haz de rectas paralelas a la A B, de las que ésta es tangente a la curva de nivel U_0 en un punto E cuyas coordenadas, O F $= q_{10}$ y E F $= q_{20}$, satisfacen la condi-

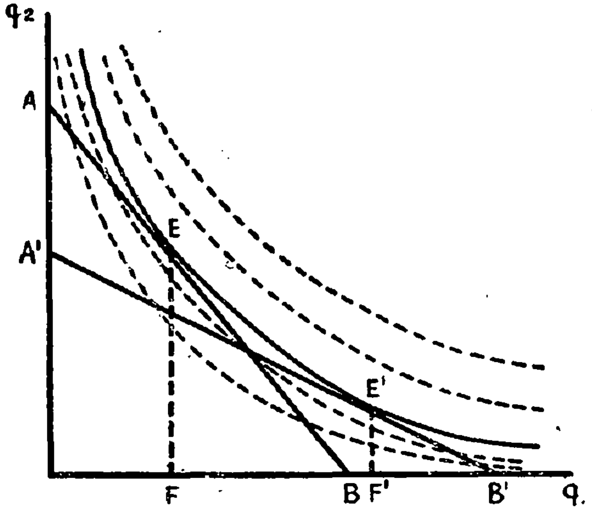

Figura 1

ción $R_0 = p_{10}\, q_{10} + p_{20}\, q_{20}$. Si al pasar al período actual los precios de las mercancías son p_1 y p_2, tenemos un nuevo tipo de ecuación de balance, el

$$r = p_1\, q_1 + p_2\, q_2 \qquad [8.1.9]$$

que define, para cada valor de r, un haz de rectas paralelas a la A′ B′, de las que ésta es tangente a la curva de nivel U_0 en un punto E′ cuyas coordenadas, O F′ $= q_1$ y E′ F′ $= q_2$, satisfacen la condición $R = p_1\, q_1 + p_2\, q_2$. El índice funcional viene, por lo tanto, dado por

$$I = \frac{R}{R_0} = \frac{p_1\, q_1 + p_2\, q_2}{p_{10}\, q_{10} + p_{20}\, q_{20}}. \qquad [8.1.11]$$

8.2 *Hipersuperficies de indiferencia en los precios.*—Un concepto que permite resolver algunos problemas interesantes relacionados con los índices funcionales es el de las hipersuperficies de indiferencia en los precios. Entendemos por tal hipersuperficie el lugar geométrico de los puntos de coordenadas $\frac{p_i}{R}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, que representan precios relativos y permiten con ellos adquirir al sujeto económico combinaciones de cantidades de bienes del mismo valor R que le reportan la misma utilidad U. Este concepto ha sido utilizado por Hotelling (35) y puede obtenerse la expresión de la ecuación de la familia de dichas hipersuperficies, calculando los valores de las variables $q_1, q_2, \ldots, q_n$ en el sistema de n ecuaciones formado por la [8.1.4] y la cadena de las utilidades marginales ponderadas dada en [8.1.3]; cada valor q_i puede obtenerse en función de los cocientes $\frac{p_i}{R}$, que sustituídos en [8.1.2] nos da la ecuación

$$U = \varphi\left(\frac{p_1}{R}, \frac{p_2}{R}, \ldots, \frac{p_n}{R}\right) \qquad [8.2.1]$$

que es la de la familia de hipersuperficies pedida. Para una renta dada R_0 tenemos una hipersuperficie para cada nivel de utilidad U, que dependerá de los precios.

Para que el problema de equilibrio del consumidor tenga solución han de ser convexas hacia el origen las hipersuperficies de indiferencia de las cantidades y lo mismo ocurre en las de indiferencia en los precios. En aquéllas, un hiperplano de balance [8.1.4] es tangente, para una renta dada, a la hipersuperficie de indiferencia del máximo nivel de utilidad.

En el caso particular de dos mercancías, podemos obtener por puntos una línea de indiferencia en los precios para una línea de indiferencia en las cantidades consumidas y una renta dadas, ya que para cada recta de balance A B tangente a la línea U_0 y co-

(35) H. HOTELLING: "Edgeworth taxation paradox and the nature of demand and supply function". *Journal of Political Economy*, 1932.

rrespondiente a una renta R_0, los segmentos que intercepta en el origen son tales que

$$OA = \frac{R_0}{p_{20}} \quad y \quad OB = \frac{R_0}{p_{10}}$$

cuyos valores nos permiten calcular los de p_1 y p_2, que determinan un punto de la línea que vamos buscando.

La utilización de estas líneas de indiferencia en los precios nos permite encontrar sencillas propiedades gráficas del índice funcio-

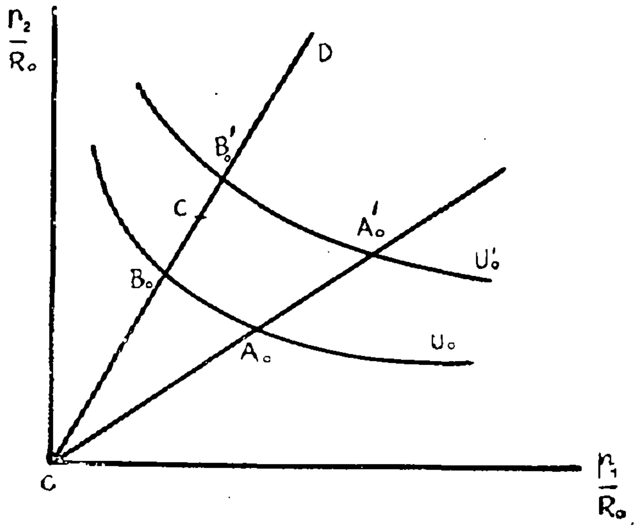

Figura 2

nal que son de fácil generalización. Así, si en un sistema cartesiano rectangular tomamos en abscisas los precios relativos $\frac{p_1}{R_0}$ y en ordenadas los $\frac{p_2}{R_0}$ y dibujamos una línea de indiferencia en los precios U_0 (fig. 2), una relación de precios dada $\frac{p_2}{p_1} = k$ vendrá representada por una recta que pasa por el origen 0 y cortará a la línea U_0 en un punto A_0 para el nivel conjunto de utilidad y renta (U_0, R_0). Si el nivel de utilidad permanece constante pero aumenta la renta, la línea de indiferencia se aleja del origen; así, por ejemplo, el punto A'_0 representa el de equilibrio correspondiente a la misma relación de precios anterior y al mismo nivel de utilidad pero a una renta superior a la R_0.

Malmquist demuestra (36) que al pasar del período base al actual varía $\dfrac{p_2}{p_1}$ y la renta, por lo que pasamos del punto A_0 a otro C y se puede probar que el índice funcional toma el valor

$$I = \frac{R}{R_0} = \frac{0\,C}{0\,B_0}. \qquad [8.2.2]$$

En efecto,

$$R = I\,R_0 = \frac{0\,C}{0\,B_0} \,.\, R_0$$

y el punto C se mueve hacia B_0 en la misma forma que R tiende a valer R_0.

Consideremos ahora dos índices funcionales iguales correspondientes a rentas R, R_0 y R', R'_0 distintas, o sea:

$$I = \frac{R}{R_0}, \quad I' = \frac{R'}{R'_0}, \quad I = I'\,; \qquad [8.2.3]$$

vamos a probar que las líneas de indiferencia U_0 y U'_0 correspondientes a los niveles de rentas R_0 y R'_0 satisfacen ciertas condiciones. En efecto, en virtud de la propiedad anterior, si comparamos para el período base R_0 y R'_0,

$$R'_0 = \frac{0\,A'_0}{0\,A_0} \,.\, R_0\,, \quad \text{o sea,} \quad \frac{R'_0}{R_0} = \frac{0\,A'_0}{0\,A_0}$$

(36) Sten Malmquist: "Index Numbers and Indifference Surfaces". *Trabajos de Estadística*, Madrid, 1953, pág. 214.

en el supuesto de que la recta OA'_0 corresponda a la relación de precios del período base; análogamente, si OD, por ejemplo, es la recta para el sistema actual de precios,

$$R'_0 = \frac{0D}{0C} \cdot R_0,$$

con lo que

$$\frac{R'_0}{R_0} = \frac{0A'_0}{0A_0} = \frac{0D}{0C}. \qquad [8.2.4]$$

Como por otra parte, I da el paso de A_0 a C, e I' el de A'_0 a D, se tiene:

$$I = \frac{0C}{0B_0}, \quad I' = \frac{0D}{0B'_0}, \quad I = I', \quad \frac{0D}{0C} = \frac{0B'_0}{0B_0}$$

en virtud de [8.2.4],

$$\frac{0A'_0}{0A_0} = \frac{0D}{0C} = \frac{0B'_0}{0B_0} \qquad [8.2.5]$$

o sea, *si los indices funcionales son iguales, las líneas de indiferencia U_0 y U'_0 han de ser homotéticas con centro de homotecia en el origen de coordenadas y razón de homotecia la de las rentas en el periodo base.*

Usando este artificio gráfico construye también Malmquist un índice funcional de precios en cadena y demuestra que el índice funcional satisface la propiedad circular ya considerada por Ragnar Frisch.

8.3 *Límites de los números índices funcionales.—Vamos a demostrar que el indice funcional es menor o igual que un indice de Laspeyres y mayor o igual que otro de Paasche.*

Consideremos primero el caso de dos mercancías. Staehle ha demostrado (37) que si tenemos dos puntos E y M (figura 3), per-

(37) A. Staehle: "A development of the economic theory of price index numbers". *The Review of Economic Studies*, 1935.

tenecientes a una misma recta de balance AB, de renta R_0, y precios p_{10}, p_{20}, siendo E el punto de equilibrio —para el nivel de utilidad U— y el M pertenece a su vez a otra recta de balance CD, de renta R_1 y precios p_1, p_2, se verifica

$$\frac{R_1}{R_0} \leqq I \leqq L \qquad [8.3.1]$$

en donde I es el índice funcional y L es el índice de Laspeyres.

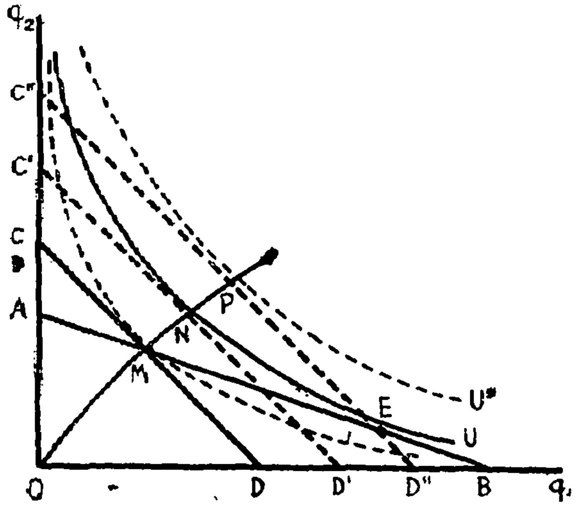

Figura 3

En efecto, las ecuaciones de las rectas AB y CD satisfacen en E y M, respectivamente, los valores

$$\begin{aligned} AB &\equiv p_{10}\, q_{10} + p_{20}\, q_{20} = R_0 \\ CD &\equiv p_1\, q_{11} + p_2\, q_{21} = R_1 . \end{aligned} \qquad [8.3.2]$$

Para obtener el índice funcional, al pasar del período base al actual —con precios p_1, p_2 —hemos de obtener el punto de equilibrio, respecto a la línea de indiferencia de nivel U, de una recta de balance $C'D'$ paralela a CD— al objeto de que se conserven los precios actuales—. Dicho punto es el N, cuyas coordenadas q_1, q_2 satisfacen la ecuación

$$C'D' \equiv p_1 q_1 + p_2 q_2 = R. \qquad [8.3.3]$$

Como los puntos E y N pertenecen a una misma línea de indiferencia, y el E y M a una misma recta de balance, siendo E el de equilibrio, el M ha de pertenecer a una línea de indiferencia de índice menor que la U, y por tanto la recta de balance A′ C′ ha de estar más alejado del origen que la A C, de donde

$$R > R_1 \qquad [8.3.4]$$

y por lo que

$$\frac{R_1}{R_0} \leqq \frac{R}{R_0} = I. \qquad [8.3.5]$$

Si consideramos, por otra parte, al punto E como perteneciente a una recta de balance C″ D″ paralela a C′ D′, con punto de equilibrio P perteneciente a la curva de Engel MN y por lo tanto a una curva de indiferencia de nivel de utilidad U^* superior a U, las coordenadas de este punto E han de satisfacer la ecuación

$$C''D'' \equiv p_1 q_{10} + p_2 q_{20} = R^*. \qquad [8.3.6]$$

por ser

$$U^* \geqq U, \; R^* \geqq R,$$

de donde

$$I = \frac{R}{R_0} \leqq \frac{R^*}{R_0} = L \qquad [8.3.7]$$

ya que el valor del índice de Laspeyres es aquí

$$L = \frac{p_1 q_{10} + p_2 q_{20}}{p_{10} q_{10} + p_{20} q_{20}} = \frac{R^*}{R_0}. \qquad [8.3.8]$$

Las expresiones [8.3.5] y [8.3.7] nos demuestran la proposición de Staehle [8.3.1].

La generalización al caso de n bienes es inmediata cambiando las rectas de balance y líneas de indiferencia por hiperplanos de balance e hipersuperficies de indiferencia.

En el trabajo citado de Sten Malmquist (36) puede verse una elegante demostración de esta misma propiedad utilizando la noción de hipersuperficies de indiferencia en los precios.

La segunda parte de la proposición fundamental queda demostrada si se verifica que

$$P \leqq I \leqq \frac{R'_1}{R'_0} \qquad [8.3.9]$$

en donde P es un índice de Paasche, I el índice funcional y R'_1, R'_0 son, respectivamente, las anteriores rentas R_0, R_1.

Para probar [8.3.9] vamos a invertir los tiempos base y actual del razonamiento anterior, es decir, en la figura 3 vamos a considerar el punto E como el de equilibrio en el período actual y perteneciente a una recta de balance A B de ecuación

$$AB \equiv p_1 q_{11} + p_2 q_{21} = R'_1 .$$

El punto M va a ser ahora el de equilibrio en el período base que pertenece a la recta C D, tal que

$$CD \equiv p_{10} q_{10} + p_{20} q_{20} = R'_0 .$$

La recta C′ D′, paralela a la C D y tangente en N a la línea de indiferencia de nivel de utilidad U que contiene a E, tiene como expresión analítica

$$C'D' \equiv p_{10} q_1 + p_{20} q_2 \equiv R' .$$

Por pertenecer E y N a una curva de indiferencia de índice superior a la que contiene M, debe verificarse que

$$R' \geqq R'_0 , \quad \text{o sea,} \quad \frac{R'}{R'_1} \geqq \frac{R'_0}{R'_1} . \qquad [8.3.10]$$

En condiciones análogas a las expuestas para obtener la ecuación de la recta C″ D″ [8.3.6] y el punto P de equilibrio, tenemos aquí

$$C''D'' \equiv p_{10} q_{11} + p_{20} q_{21} = r^* .$$

Puesto que $U^* > U$ se ha de verificar que $r^* \geqq R'$ y por lo tanto

$$\frac{r^*}{R'_1} \geqq \frac{R'}{R'_1} \geqq \frac{R'_0}{R'_1} \qquad [8.3.11]$$

e invirtiendo los términos de cada quebrado, las desigualdades cambian de sentido, y se tiene:

$$\frac{R'_1}{r^*} \leqq \frac{R'_1}{R'} \leqq \frac{R'_1}{R'_0}. \qquad [8.3.12]$$

El primer miembro de esta desigualdad es el índice de Paasche en el caso considerado, ya que

$$\frac{R'_1}{r^*} = \frac{p_1\, q_{11} + p_2\, q_{21}}{p_{10}\, q_{11} + p_{20}\, q_{21}} = P. \qquad [8.3.13]$$

El segundo miembro es el índice funcional, ya que R'_1 y R' responden al valor en el período actual y en el base de combinaciones de equilibrio indiferentes. Como consecuencia, queda probada la proposición [8.3.9] y ésta, en unión de la [8.3.1], permiten escribir

$$P \leqq I \leqq L \qquad [8.3.14]$$

como queríamos demostrar.

8.4 *Indice de Bowley.*—Al conocer esta limitación de los índices funcionales podríamos obtener una aproximación de los mismos empleando algún promedio de los índices de Paasche y Laspeyres.

La fórmula de Edgeworth [2.7], formulada con la notación que venimos utilizando en los índices funcionales, es

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \, (q_{i0} + q_{i1})}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} \, (q_{i0} + q_{i1})} \qquad [8.4.1]$$

tiene como numerador y denominador las sumas de los numeradores y denominadores de las fórmulas de Laspeyres y de Paasche respectivamente, por lo que

$$P \leqq E \leqq L .$$

Ahora bien, si tomamos E como estimación del índice funcional damos la misma importancia a la combinación de equilibrio obtenida con precios del año base y del actual y, sin embargo, en la realidad, el promedio de las q_{i0} puede ser muy diferente al de las q_{i1}, por lo que al aplicar E para estimar I se cometería un sesgo que vamos a tratar de evitar con una fórmula debida a Bowley.

Sea

$$U = f\ (q_1 , q_2 , \ldots, q_n) \qquad [8.4.2]$$

la ecuación de una familia de hipersuperficies de indiferencia que toma, para el sistema de precios del período base, el siguiente valor en el punto de equilibrio

$$U_0 = f\ (q_{10} , q_{20} , \ldots, q_{n0}) . \qquad [8.4.3]$$

El punto q_{10}, q_{20}, ..., q_{n0} (punto E de la fig. 3, en el caso particular de dos mercancías), pertenece a una hipersuperficie de indiferencia, la U_0, que es cortada por la línea de Engel correspondiente al sistema de precios del período actual en un punto de coordenadas q_1, q_2, ..., q_n (el N, en el caso de la fig. 3), tal que

$$U_0 = f\ (q_1 , q_2 , \ldots, q_n) . \qquad [8.4.4]$$

El índice funcional viene dado en este caso por

$$I = \frac{R}{R_0} = \frac{\Sigma\, p_i\, q_i}{\Sigma\, p_{i0}\ q_{i0}} . \qquad [8.4.5]$$

El procedimiento que sigue Ragnar Frisch (38) para llegar a

(38) R. FRISCH: "Annual Survey of General Economic Theory". *Econometrica,* vol. IV, 1936, pág. 27.

R. FRISCH: "O problema dos números indices". *Revista Brasileira de Statística,* núm. 42, abril-junio, 1950, pág. 207.

la fórmula de Bowley, obteniendo un valor aproximado del numerador de [8.4.3], es el que, algo más detallado y aclarando, a nuestro parecer, todos los pasos intermedios, vamos a intentar exponer.

La variación que experimenta la función índice de utilidad al pasar del punto de coordenadas $q_{10}, \ldots, q_{n0}$, al de coordenadas $q_{11}, \ldots, q_{n1}$ (del E al M en la fig. 3), tales que $q_{i1} = q_{i0} + h_i$, y en el cual la función dada en [8.4.2] toma el valor U_1, puede expresarse por el siguiente desarrollo en serie de Taylor:

$$U_1 - U_0 = f(q_{10} + h_1, \ldots, q_{n0} + h_n) - f(q_{10}, \ldots, q_{n0}) =$$

$$= \left(\frac{\delta U}{\delta q_1} h_1 + \frac{\delta U}{\delta q_2} h_2 + \ldots + \frac{\delta U}{\delta q_n} h_n \right)_0 +$$

$$+ \left(\frac{\delta U}{\delta q_1} h_1 + \frac{\delta U}{\delta q_2} h_2 + \ldots + \frac{\delta U}{\delta q_n} h_n \right)_0^{(2)} + \ldots$$

en donde con el subíndice 0 queremos indicar que el valor de la expresión correspondiente es el que toma en el punto de coordenadas q_{i0} —el significado del exponente simbólico (2) puede consultarse en algún libro de Análisis matemático—. Despreciando los términos de orden superior al 2.° y sustituyendo los valores de h_i por las correspondientes diferencias de cantidades consumidas, tenemos:

$$U_1 - U_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta U}{\delta q_i} \right)_0 (q_{i1} - q_{i0}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \left(\frac{\delta^2 U}{\delta q_i \, \delta q_j} \right)_0 (q_{i1} - q_{i0}) (q_{j1} - q_{j0}) \, . \qquad [8.4.6]$$

Empleando el mismo procedimiento, aunque tomando un solo término del desarrollo, podemos obtener como variación de las derivadas de las funciones índices de utilidad, desde el periodo básico al actual, el valor

$$\left(\frac{\delta U}{\delta q_i} \right)_1 - \left(\frac{\delta U}{\delta q_i} \right)_0 = \left(\frac{\delta^2 U}{\delta q_i \, \delta q_j} \right)_0 (q_{j1} - q_{j0}) \qquad [8.4.7]$$

expresión que sustituída en [8.4.6], la transforma en la

$$U_1 - U_0 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta U}{\delta q_i}\right)_0 (q_{i1} - q_{i0}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\delta U}{\delta q_i}\right)_1 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\delta U}{\delta q_i}\right)_0\right] (q_{i1} - q_{i0}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\delta U}{\delta q_i}\right)_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta U}{\delta q_i}\right)_0\right] (q_{i1} - q_{i0}) \, . \qquad [8.4.8]$$

Como la expresión analítica de las líneas de Engel es la de la correspondiente ley de las utilidades marginales ponderadas,

$$\frac{1}{p_1} \frac{\delta U}{\delta q_1} = \frac{1}{p_2} \frac{\delta U}{\delta q_2} = \ldots = \frac{1}{p_n} \frac{\delta U}{\delta q_n} = V \, , \qquad [8.4.9]$$

en donde V es la utilidad marginal del dinero, tenemos:

$$\frac{\delta U}{\delta q_i} = V p_i \, . \qquad [8.4.10]$$

Sustituyendo esta expresión en el segundo miembro de la [8.4.8],

$$U_1 - U_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (V_1 p_i + V_0 p_{i0}) (q_{i1} - q_{i0}) \, , \qquad [8.4.11]$$

en donde V_0 es la utilidad marginal del dinero al adquirir la combinación de equilibrio del período base y V_1 la de la combinación $q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n1}$.

La variación de utilidad al pasar de la combinación $q_{11}, \ldots, q_{n1}$ (punto M) a la combinación $q_1, \ldots, q_n$ (punto N), podemos expresarla análogamente por

$$U_0 - U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (V^*_1 p_i + V_1 p_i) (q_i - q_{i1}) =$$

$$= \frac{V^*_1 + V_1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i (q_i - q_{i1}) \qquad [8.4.12]$$

en donde V^*_1 es la utilidad marginal del dinero al adquirir la combinación $q_1, \ldots, q_n$.

Sumando miembro a miembro las dos últimas expresiones

$$\Sigma V_1 p_i q_{i1} + \Sigma V_0 p_{i0} q_{i1} - \Sigma V_1 p_i q_{i0} - \Sigma V_0 p_{i0} q_{i0} +$$

$$+ (V^*_1 + V_1) \Sigma p_i q_i - (V^*_1 + V_1) \Sigma p_i q_{i1} = 0$$

y despejando $\Sigma p_i q_i$, se tiene

$$\Sigma p_i q_i = \frac{1}{V^*_1 + V_1} [\Sigma p_i q_{i1} (V^*_1 + V_1 - V_1) -$$

$$- \Sigma V_1 p_i q_{i0} + \Sigma V_0 p_{i0} q_{i0} - \Sigma V_0 p_{i0} q_{i1}]$$

lo que permite obtener una aproximación cuadrática C del índice funcional I [8.4.5], agrupando los términos anteriores y dividiendo por $\Sigma p_{i0} q_{i0}$, es decir,

$$C = \frac{\Sigma p_i (V^*_1 q_{i1} + V_1 q_{i0}) + V_0 \Sigma p_{i0} (q_{i0} - q_{i1})}{(V_1 + V^*_1) \Sigma p_{i0} q_{i0}} \qquad [8.4.13]$$

Esta fórmula puede escribirse así:

$$C = \frac{\Sigma p_i \left(q_{i0} + \frac{V^*_1}{V_1} q_{i1} \right)}{\Sigma p_{i0} \left(q_{i0} + \frac{V^*_1}{V_1} q_{i1} \right)} +$$

$$+ \left(C - \frac{V_0}{V^*_1} \right) \frac{V^*_1 \Sigma p_{i0} (q_{i1} - q_{i0})}{\Sigma p_{i0} (V_1 q_{i0} + V^*_1 q_{i1})} \qquad [8.4.14]$$

cuyo primer término del segundo miembro es el índice de Bowley B, aproximadamente igual a C, puesto que el segundo término debe anularse al ser $C \simeq \dfrac{V_0}{V^*_1}$,

ya que C debe variar en sentido recíproco a la utilidad marginal del dinero; con otras palabras, si la utilidad V_0 que reporta al sujeto económico de consumo la última "peseta" gastada en el período base fuese, por ejemplo, doble de la que le reporta en el período actual $\left(\dfrac{V_0}{V^*_1} = 2\right)$ al consumir combinaciones de cantidades de bienes que le son indiferentes, el sujeto económico ha de realizar un gasto doble ($I = C = 2$) para adquirir la combinación de bienes $q_1, q_2, \ldots, q_n$ del que hubo de realizar para adquirir la combinación de bienes $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$.

El índice de Bowley, B, es por tanto prácticamente igual a la aproximación cuadrática C del índice funcional, y tiene por expresión

$$B = \frac{\Sigma\, p_i\ (q_{i0} + \lambda\, q_{i1})}{\Sigma\, p_{i0}\,(q_{i0} + \lambda\, q_{i1})} \qquad [8.4.15]$$

en donde

$$\lambda = \frac{V^*_1}{V_1} \qquad [8.4.16]$$

parámetro que representa la relación entre las utilidades marginales de la unidad monetaria al adquirir la combinación de bienes del período actual y la que le reportaría al sujeto la adquisición de una combinación de bienes que le proporcionase la misma satisfacción que la que le reportó la combinación de bienes consumida en el período base.

Si se admiten los supuestos del equilibrio parcial mediante los que se postula que la utilidad marginal del dinero es constante al variar la renta del sujeto, se ha de verificar que $\lambda = 1$, por tomar aquel valor constante el numerador y denominador del segundo miembro de [8.4.16]; en este caso la fórmula de Bowley [8.4.15] coincide con la de Edgeworth [8.4.1], y Bowley llegó a ésta considerando solamente el primer término del desarrollo de Taylor. En la práctica, sin embargo, no deben admitirse *a priori* los supuestos del equilibrio parcial.

8.5 *El método de doble gasto de Ragnar Frisch.*—Este método permite obtener una aproximación del índice funcional apoyándose en la expresión anterior [8.4.11], con la ventaja sobre la fórmula de Bowley de manejar información estadística que es fácil captar en la realidad.

Si la variación de utilidad $U_1 - U_0$ que figura en [8.4.11] corresponde a combinaciones de bienes del mismo nivel de utilidad, o sea, si pasamos de la combinación $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ a la $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (punto E y N de la fig. 3), se verificará que $U_1 - U_0 = 0$; los valores q_{i1} de la expresión considerada serán ahora q_i, y V_1 será ahora V^*_1. En estas condiciones tenemos:

$$0 = \Sigma (V^*_1 p_i + V_0 p_{i0}) (q_i - q_{i0}) = [V^*_1 \Sigma p_i q_i - - V_0 \Sigma p_{i0} q_{i0}] + [V_0 \Sigma p_{i0} q_i - V^*_1 \Sigma p_i q_{i0}] \qquad [8.5.1]$$

y haciendo

$$R = \Sigma p_i q_i \quad y \quad R_0 = \Sigma p_{i0} q_{i0},$$

queda la *expresión:*

$$[V^*_1 R - V_0 R_0] + [V_0 \Sigma p_{i0} q_i - V^*_1 \Sigma p_i q_{i0}] = 0. \qquad [8.5.2]$$

En virtud de las consideraciones que acabamos de hacer, para que

$$C - \frac{V_0}{V^*_1} = 0$$

se ha de verificar que

$$I = \frac{R}{R_0} = \frac{V_0}{V^*_1}, \quad \text{o sea,} \quad V^*_1 R = V_0 R_0$$

de donde

$$V_0 \Sigma p_{i0} q_i - V^*_1 \Sigma p_i q_{i0} = 0$$

lo que permite establecer

$$\frac{\Sigma p_i q_{i0}}{\Sigma p_{i0} q_i} = \frac{V_0}{V^*_1} = \frac{R}{R_0} = \frac{\Sigma p_i q_i}{\Sigma p_{i0} q_{i0}}, \qquad [8.5.3]$$

es decir,

$$\Sigma p_1 q_1 \Sigma p_{10} q_1 = \Sigma p_{10} q_{10} \Sigma p_1 q_{10} \qquad [8.5.4]$$

cuyo primer miembro es el denominado por Frisch *doble gasto* del período actual respecto del base y al que designa así:

$$D_{01} = \Sigma p_1 q_1 \Sigma p_{10} q_1 . \qquad [8.5.5]$$

De la misma manera el doble gasto del período base respecto al actual es

$$D_{10} = \Sigma p_{10} q_{10} \Sigma p_1 q_{10} .$$

La igualdad $D_{01} = D_{10}$ indica indiferencia y

$$C_{01} = \sqrt{\Sigma p_1 q_1 \; \Sigma p_{10} q_1} = \sqrt{D_{01}} . \qquad [8.5.6]$$

C_{01} es el índice de *gasto mixto* de Frisch, del período actual respecto al base.

La expresión [8.5.4] puede escribirse en las formas

$$\frac{\Sigma q_1 p_{10}}{\Sigma q_{10} p_{10}} = \frac{\Sigma q_{10} p_1}{\Sigma q_1 p_1},$$

que pueden considerarse como índices cuánticos de Laspeyres del período actual respecto al base y del base respecto al actual, y

$$\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_{10} p_1} = \frac{\Sigma q_{10} p_{10}}{\Sigma q_1 p_{10}},$$

que son índices cuánticos de Paasche.

Frisch demuestra también que la fórmula ideal de Fisher [2.6] puede considerarse como un caso particular de la ecuación de doble gasto [8.5.4]. Tal caso se presenta para dos combinaciones de bienes fijas, las q_{10} y q_1, y líneas de Engel rectilíneas, en cuyo caso las combinaciones de bienes para los períodos base y actual estarán definidas por las cantidades

$$\lambda_0 \, q_{10} \quad \text{y} \quad \lambda \, q_1 \qquad [8.5.7]$$

en donde λ_0 y λ son los parámetros de las rectas de Engel para los sistemas de precios de los correspondientes períodos.

Sustituyendo estas cantidades por las q s que figuran en la ecuación [8.5.4], tenemos

$$\Sigma p_i \lambda q_i \Sigma p_{i0} \lambda q_i = \Sigma p_{i0} \lambda_0 q_{i0} \Sigma p_i \lambda_0 q_{i0}$$

en donde,

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{\Sigma p_{i0} q_{i0} \Sigma p_i q_{i0}}{\Sigma p_i q_i \Sigma p_{i0} q_i}} \qquad [8.5.8]$$

y como la relación de gastos de las dos combinaciones es

$$\frac{\Sigma p_i \lambda q_i}{\Sigma p_{i0} \lambda_0 q_{i0}} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{\Sigma p_i q_i}{\Sigma p_{i0} q_{i0}} = \sqrt{\frac{\Sigma p_i q_{i0} \Sigma p_i q_i}{\Sigma p_{i0} q_{i0} \Sigma p_{i0} q_i}} = F$$

vemos que el índice ideal de Fisher es esta relación de gastos en las condiciones particulares que hemos considerado.

8.6 *Método práctico de Roy para calcular el índice funcional.*— No vamos a entrar en el desarrollo teórico del método por figurar en un artículo publicado por el autor en esta misma REVISTA DE ECONOMÍA POLÍTICA (Vol. I, núm. 2, abril-junio 1945). No obstante, y para completar nuestra exposición, vamos a indicar las características del método en cuanto a su aplicación inmediata.

El autor francés propone el empleo de la fórmula ideal de Fisher en el caso de que exista una pequeña diferencia entre los índices de Laspeyres y de Paasche; si esto no ocurre así, Roy propone usar un índice de cadena obteniéndose los distintos eslabones por la fórmula de Divisia previo jalonamiento de la situación inicial y final, que suponemos alejadas, mediante puntos que constituyan situaciones intermedias. En el caso de que no se tenga información de precios y cantidades en dichas situaciones intermedias, podemos admitir que el itinerario para pasar de la situación inicial a la final toma la forma de una curva definida por una función deducida de los datos observados, como por ejemplo, una función exponencial del tiempo, o a partir de una teoría referente a las variaciones de precios y cantidades en el tiempo o en el espacio. Conocida la ecuación de dicha curva, el índice de Divisia puede calcularse por una integral curvilínea.

A partir de la asimilación del índice de Divisia para el cálculo del índice funcional, Roy generaliza este último concepto a un conjunto de sujetos económicos, aun cuando opera con subconjuntos homogéneos en lo que se refiere a sus condiciones de vida (39).

Si cada subconjunto homogéneo tiene una renta media r_K, su índice funcional correspondiente I_K satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\,I_K}{I_K} = \Sigma\, \alpha_K \frac{d\,p}{p} \qquad [8.6.1]$$

en donde α_K son los coeficientes de gasto de cada mercancía, o sea,

$$\alpha_K = \frac{p\,q}{r_K}$$

y que, por tanto, varían de un subconjunto a otro.

Al calcular el índice funcional general I, cada subconjunto ha de venir afectado de un coeficiente β_K que representa el valor de la renta r_K del subconjunto respecto a la renta total de la población. El índice I satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d\,I}{I} = \Sigma \left[\beta_K\, \Sigma \left(\alpha_K \frac{d\,p}{p} \right) \right] \qquad [8.6.2]$$

9.—Indice del coste de la vida.

9.1 *Métodos ordinarios de cálculo.*—Los números índices de coste de la vida permiten comparar en los distintos períodos de tiempo los gastos de consumo de una familia en el supuesto de que permanezca constante su nivel de vida o nivel de satisfacción obtenido a partir de la combinación de cantidades de bienes adquiridos.

(39) René Roy: "Em torno dos números índices". *Revista Brasileira de Estatística*, núm. 39, julio-septiembre, 1949, pág. 335.

Las soluciones prácticas que se han dado del problema se fundamentan en las consideraciones que hemos expuesto de los índices infinitesimales y, sobre todo, de los funcionales; la principal dificultad que se ha presentado radica en la imposibilidad de establecer rigurosamente en la realidad combinaciones indiferentes.

El método más empleado en los últimos años por las distintas naciones que han elaborado números índices de coste de la vida, es el conocido en la literatura económico-estadística con la denominación de "cesta de las provisiones". En dicha "cesta" se incluyen las cantidades de bienes, entre las que se cuentan servicios y productos fabricados, que, por investigaciones previas, se considera que debe consumir una familia "patrón" de características demográficas, sociales y económicas prefijadas. Una vez conocidas estas cantidades básicas de bienes, el estadístico se limita a calcular el valor de las provisiones de la "cesta" con precios del período base y del período actual y el cociente de valores es el número índice de coste de la vida.

La "cesta de las provisiones" se obtiene estudiando los *presupuestos familiares* mediante una muestra de familias de la nación o región a que se va a referir el índice, que puede circunscribirse a determinado grupo o grupos sociales de la población total (40). Aparte de las enormes dificultades de tipo práctico que plantea la realización de esta clase de encuestas, se presentan otros problemas como el de la heterogeneidad de las calidades de los artículos consumidos por las distintas unidades económicas de consumo (41), la gran facilidad con que el ama de casa sustituye no sólo las variedades de un mismo producto, sino los productos entre sí (carne por pescado, por ejemplo), siempre que la sustitución sea aceptable para sus gustos. Esta última consideración implica la poca fiabilidad de la constancia real de las cantidades de bienes que contiene la "cesta" y unido este inconveniente a las dificultades

---

(40) Para la realización práctica de estas encuestas existen diversas recomendaciones internacionales como las que figuran en un folleto editado por la OFICINA INTERNACIONAL DEL TRABAJO: *Métodos de encuesta sobre las condiciones de vida de las familias.* Ginebra (Suiza), 1949.

(41) H. S. HOUTHAKKER y S. J. PRAIS: "Les variations de qualité dans les budgets de famille". *Economie appliquée,* tomo V, 1952, núm. 1 (enero-marzo), pág. 65.

de realización de la encuesta, lo que no permite obtener cestas en períodos sucesivos y poco distantes en el tiempo, hace pensar en la poca conveniencia de emplear el procedimiento que estamos estudiando.

Sea $q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}$ (punto E, por ejemplo, de la fig. 3) la combinación de cantidades de bienes que contiene la "cesta de las provisiones" y admitamos que representa una combinación de equilibrio en el período base, cuyo valor en dicho período es

$$R_0 = \Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}\,.$$

Si valoramos aquella combinación inicial con precios del período actual (recta de balance C″ D″ de la fig. 3), tendremos el nuevo valor

$$R^* = \Sigma\, p_i\, q_{i0}$$

y el índice de coste de la vida calculado por el procedimiento considerado sería

$$I = \frac{R^*}{R} = \frac{\Sigma\, p_i\, q_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}}$$

que es un índice de Laspeyres.

Si la "cesta de provisiones" no corresponde a una combinación de equilibrio del período base sino que, como puede ocurrir en el caso de que nos ciñamos a bienes de alimentación exclusivamente, el consumo se calcule en función de los diferentes elementos de nutrición, convirtiendo las cantidades de alimentos en valores correspondientes de calorías, proteínas, minerales, vitaminas, etcétera, podemos establecer con la ayuda de los especialistas en nutrición "cestas patrón", que simbolizarán el nivel de indiferencia del grupo a que se refiere el índice; en estas condiciones, el cálculo de los valores en los períodos base y actual podría permitir calcular un verdadero índice funcional. Sin embargo, en la realidad, el problema del coste de la vida no puede plantearse en estos términos tan estrictos, ya que el ama de casa no suele actuar con este rigor nutritivo al distribuir sus gastos diarios, sino que lo hace por razones puramente subjetivas. Si sustituye un kilo de plátanos por dos kilos de naranjas, que valen igual, no lo hace pensando en que tienen el mismo valor nutritivo, sino que puede ser debido al hecho de que correspondan más unidades de fruta a cada miembro de su familia.

9.2 *Método de Frisch.*—Un índice de coste de la vida, más propiamente denominado por Frisch (42) de "precio de la vida" o de *precios de consumo*, cuyo significado en castellano es el que parece más adecuado a lo que representan las fórmulas que se utilizan, es el que viene limitado por las fórmulas de Laspeyres y Paasche, según hemos estudiado anteriormente.

Si hemos realizado una encuesta en el período base para conocer las condiciones de vida de las familias, se ha podido obtener una combinación de equilibrio $(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0})$ para un grupo de familias, cuyo valor con precios de dicho período base es

$$R_0 = \Sigma\, p_{i0}\, q_{i0}\,.$$

Supongamos que también se ha realizado una encuesta análoga en el período actual que ha permitido llegar a una combinación de equilibrio $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, cuyo valor con precios actuales es

$$R = \Sigma\, p_i\, q_i\,.$$

Si calculamos la combinación actual con precios del período base, tenemos:

$$R'_0 = \Sigma\, p_{i0}\, q_i$$

y la del período base con precios actuales, vale

$$R' = \Sigma\, p_i\, q_{i0}\,.$$

Estos cuatro valores se han obtenido en la realidad. El cociente R'/R_0 es un índice de Laspeyres que, como sabemos, es mayor que el índice funcional o índice de precios de consumo que vamos buscando. El cociente R/R'_0, índice de Paasche del período actual

(42) RAGNAR FRISCH: "Some basic principles of price of living measurements (A survey article)". *Econometrica*, vol. 22, núm. 4, octubre, 1954, página 407.

respecto al base, es menor que el índice de precios de consumo, es decir,

$$\frac{R}{R'_0} \leqq I \leqq \frac{R'}{R_0}.$$

Es, por tanto, posible obtener en la práctica un extremo superior y otro inferior del índice funcional. Aprovechándose de esta idea, cuya demostración hemos expuesto ya, Frisch ha propuesto un procedimiento para estimar el índice de precios de consumo.

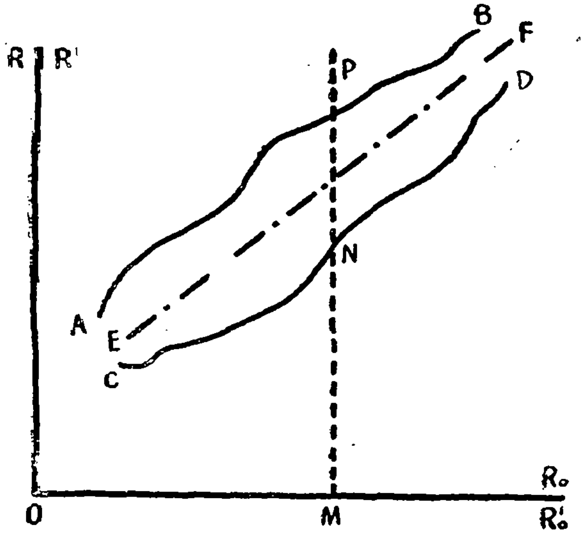

Figura 4

Consiste en construir dos curvas, una la A B (fig. 4) definida por puntos de coordenadas (R_0, R') y otra, la C D, cuyos puntos tienen por coordenadas (R'_0, R). Para un mismo valor de R_0 y R'_0 los denominadores de [9.2.1] son iguales y se ha de verificar que $R \leqq R'$ o $MN \leqq MP$, es decir, la línea A B va por encima de la C D. El cociente entre la ordenada y abscisa de un punto de la curva límite superior A B es siempre un número índice de Laspeyres y de la curva límite inferior C D un número índice de Paasche. Los números índices de precios de consumo se obtienen, pues, por cociente entre la ordenada y la abscisa de puntos de una curva E F comprendida entre A B y C D.

En la práctica, la determinación de las curvas A B y C D se consigue a partir de los resultados de las encuestas que ha habido que realizar. En efecto, clasificando los datos obtenidos por clases de rentas gastadas dentro de las familias del mismo tipo y clase social, de las que se estimarán combinaciones q_{i0} y q_i típicas, para cada renta R_0 podemos calcular su correspondiente R' y para cada renta R su correspondiente R'_0, con lo que tendremos distintos puntos de las curvas A B y C D.

Para obtener la curva E F, denominada por Frisch de la equivalencia exacta, es conveniente que el espacio comprendido entre las A B y C D sea el mínimo posible y esto se consigue tanto mejor cuanto menor sea la variación entre los precios de los dos períodos. Por otra parte, esa variación de precios será tanto menor cuanto menor sea el intervalo de tiempo transcurrido entre los períodos base y actual. Si este intervalo es grande, puede descomponerse en subintervalos pequeños para cada uno de los cuales se puede obtener una curva E F a partir de los cuales podemos conseguir más fácilmente la que nos interesa, de acuerdo con el símil empleado por Frisch: "un número de grietas pequeñas puede saltarse una a una sin ninguna dificultad, pero si tenemos que saltar una grieta grande —como ocurre cuando esperamos demasiado tiempo antes de recoger nuevos datos cuantitativos— entonces no hay posibilidad de hacerlo".

En todo este razonamiento las combinaciones de bienes obtenidas por la información estadística deben ser puntos de equilibrio del consumidor, por lo que es de suponer que son las elegidas por las unidades de consumo como aquellas que le reportan la máxima satisfacción dentro de sus disponibilidades. Ahora bien, en el caso de que exista un sistema de racionamiento o, al menos, que la demanda no pueda ser satisfecha totalmente, no puede usarse este procedimiento porque puede ocurrir que las combinaciones no sean las de equilibrio del consumidor.

9.3 *Método de Duon.*—Hemos visto que el método que llamamos de Frisch, y que no es sino una aplicación inmediata de las propiedades de los índices funcionales, exige la realización de encuestas muy frecuentes sobre las condiciones de vida de las familias, lo cual es muy costoso y difícil de realizar en la práctica por la tendencia a ocultar estos datos por los entrevistados.

En el libro de Gaston Duon a que ya nos hemos referido (17), este autor propone un método para calcular números índices de precios de consumo a partir de la introducción de las ventas al por menor en unidades físicas realizadas durante el período de tiempo transcurrido desde el origen del período base al momento actual, como coeficientes de ponderación. Si denominamos K^t_{i0} al volumen físico de las ventas realizadas de una mercancía i desde el momento 0 al t, el *índice general de precios* viene dado por la fórmula

$$P = \frac{\Sigma\, p_{it}\, K^t_{i0}}{\Sigma\, p_{i0}\, K^t_{i0}}. \qquad [9.3.1]$$

Con esta forma de ponderar se evita el inconveniente que presentan las fórmulas clásicas de Laspeyres y Paasche al tener que elegir pesos o del período base o del actual, y se refleja rigurosamente la importancia real de cada mercancía, que es la misión asignada a los coeficientes de ponderación al considerar los números índices desde un punto de vista estadístico.

Si se divide el intervalo de tiempo $(0, t)$ en períodos intermedios limitados por los momentos 0, 1, 2, ..., $t - 1$, t, la cantidad vendida K^t_0 puede descomponerse así:

$$K^t_{i0} = K^1_{i0} + K^2_{i1} + \ldots + K^t_{i,\,t-1} \qquad [9.3.2]$$

en donde cada sumando del segundo miembro representa las ventas al por menor de mercancías i-ésimas en el correspondiente período de tiempo.

El *índice de valores de las cantidades vendidas* en un período dado de tiempo es el cociente del valor de las ventas en ese período y el valor de las ventas en el período base, o sea,

$$V = \frac{\Sigma\, p_{it}\, K^t_{i,\,t-1}}{\Sigma\, p_{i0}\, K^1_{i0}} \qquad [9.3.3]$$

a partir de cuya fórmula podemos obtener el índice de ventas al por menor (que llamaremos D en honor de Duon), tal que

$$P \,.\, D = V$$

o sea, precio por cantidad vendida igual a valor. De esta forma,

$$D = \frac{V}{P} = \frac{\dfrac{\Sigma\, p_{1t}\, K^{t}_{1,\, t-1}}{\Sigma\, p_{10}\, K^{1}_{10}}}{\dfrac{\Sigma\, p_{1t}\, K^{t}_{10}}{\Sigma\, p_{10}\, K^{t}_{10}}} = \frac{\Sigma\, p_{1t}\, K^{t}_{1,\, t-1}}{\Sigma\, p_{1t}\, K^{t}_{10}} : \frac{\Sigma\, p_{10}\, K^{1}_{10}}{\Sigma\, p_{10}\, K^{t}_{10}}$$

[9.3.4]

cuya última expresión es la que ordinariamente maneja Duon como *índice de ventas al por menor* (*débits*) (43).

En el caso particular en que el índice de ventas sea constantemente igual a 1, o sea, $D = 1$, el índice de precios y el de valores permanecen constantes y este último es el que Duon elige como *índice de coste de la vida o índice de precios de consumo,* es decir,

$$I = \frac{\Sigma\, p_{1t}\, K^{t}_{1,\, t-1}}{\Sigma\, p_{10}\, K^{1}_{10}}, \qquad [9.3.5]$$

siempre que $D = 1$.

La restricción $D = 1$ implica que $P = V = I$, lo que conduce a la conclusión de que por este método un índice de coste de la vida puede interpretarse que es tanto un índice de valores como de precios, lo que va totalmente de acuerdo con la idea vulgar que sobre este concepto puede tener un ama de casa.

Comparando este índice con el que se obtiene a partir de la "cesta de las provisiones", vemos que aquí la "cesta" está constituída por el conjunto total de las mercancías vendidas, pudiendo variar las cantidades correspondientes a las distintas mercancías siempre que el conjunto conserve su estabilidad en los períodos de comparación, mientras que por el procedimiento clásico se imponía la invariabilidad de la cantidad adqurida de cada mercancía.

Al comparar este método con el índice funcional en lo que se refiere a la constancia del nivel de satisfacción, puede admitirse que cumple la condición de indiferencia si se tiene en cuenta la tendencia del ama de casa a adquirir la combinación de gasto mínimo mediante sustituciones inspiradas principalmente en los precios que el día de la compra rigen en el mercado.

(43) Ob. cit. (17), pág. 48.

El problema práctico más difícil que se plantea al autor de este procedimiento es el de conservar constantemente igual a la unidad el índice de ventas al por menor. Lo resuelve sustituyendo las ventas $K^t_{j,\, t-1}$ por otras auxiliares k que cumplen la condición $D = 1$. El problema es indeterminado y el autor propone varias soluciones diferentes.

Nosotros proponemos para resolver el problema de una manera sencilla, en el caso ordinario de tener que calcular números índices mensuales de precios de consumo, utilizar como coeficientes $K^t_{i,\, t-1}$ cifras del movimiento anual (44) de ventas al por menor, en cuyo caso las variaciones de los pesos son mucho más suaves al no estar influenciadas por las variaciones estacionales ni por las aleatorias y de todas formas las k que hubiese que calcular se obtendrían de un modo muy sistemático durante muchos meses seguidos.

ANGEL ALCAIDE INCHAUSTI

(44) Ob. cit. (22).