LIBROS

FUNDAMENTOS DE UNA TEORIA PURA DE LOS COSTES (*)

CAPITULO III

LOS COSTES EN LA PRODUCCION CONJUNTA

El caso que hemos estudiado hasta ahora, suponiendo que no se produzca más que un solo bien, tiene gran importancia en la realidad. Ya que como cualquier teoría económica, la que hemos desarrollado hasta el momento, es también aplicable allí, donde los supuestos sólo coinciden, de manera aproximada, con la realidad. Si junto al producto principal se produce, por ejemplo, un producto subsidiario o subproducto, que sólo supone una pequeña fracción del ingreso, la teoría de la oferta simple puede aplicarse sin reparo, sustrayendo quizá para lograr una mayor exactitud, de los costes totales, el ingreso del producto subsidiario, y considerando la diferencia como los costes totales del producto principal.

Pero muchas veces esto no resulta posible. Es lo que ocurre cuando se producen simultáneamente varios bienes que tengan aproximadamente la misma importancia. Entonces la teoría desarrollada hasta ahora no resulta ya suficiente, y tendremos que aplicar una más general, a saber: la teoría de la oferta conjunta (1).

1. *Teoría de la longitud de la producción*

I

El objeto de este capítulo es más complicado que el del anterior. Por ello escogeremos en lo posible hipótesis sencillas, con el fin de no exponer más que lo fundamental. Sólo vamos a ocu-

(*) Los capítulos I y II se publicaron en el anterior número de esta REVISTA.

(1) MARCO FANNO: *Contributo alla teoria dell'Offerta a costi conginuti.* Supplemento al "Giornale degli Economisti". Ottobre 1914. Un análisis de este trabajo nos llevaría muy lejos, ya que nuestra investigación está guiada por una idea muy distinta.

parnos del caso en que se produzcan dos bienes, ya que éste nos señala todos los métodos que hay que aplicar en el caso general en que se produzcan n bienes. Vamos, además, a partir del supuesto de que todas las funciones que aparezcan en el sector considerado son continuas y diferenciales. Los costes discontinuos no aparecerán. Introduciremos primeramente un estudio simplificado. Cualquier combinación de cantidades del bien número 1 y del bien número 2 tiene determinados costes de producción, que pueden averiguarse de uno u otro modo. Para obtener una representación gráfica establecemos una tabla (fig. 9).

Cantidades del bien Nº 2						
5	61,9	64	71,3	87,2	116,6	164,5
4	58	59,6	65,6	79,4	106,5	151,5
3	55,6	56,9	61,9	74,2	99	141,8
2	54	55,3	59,6	70,6	93,8	135,2
1	52,4	54,4	58,4	68,6	91,1	131,7
0	-50-	-54-	-58-	-68-	-90-	-130-
	0	1	2	3	4	5
	Cantidades del bien Nº 1					

Figura 9.

Las cantidades de cada bien son trasladadas a la escala conveniente sobre la primera columna, o sea, sobre la primera línea (que aquí, en analogía con la representación de las coordenadas, está dirigida hacia abajo), de manera tal, que la distancia del centro de la línea o columna, al centro de la primera línea o primera columna, determina la calificación de la línea o columna. Las rectas formadas por puntos, corresponden a los ejes de coordenadas; su punto de intersección es el origen, es decir, el punto en que la explotación no funciona. En los cuadros se colocan los costes de la combinación de cantidades correspondiente. Así, por ejemplo, la producción de tres unidades del bien número 1 y de dos unidades del bien número 2 importa, en el caso citado, 70,6 unidades monetarias, etc. Cada uno de los puntos de esta tabla representa una determinada combinación y posee, por ello, determinados costes totales.

Hemos determinado un punto en nuestra tabla dando su distancia de la primera línea en la primera columna, y su distancia de la primera columna en la primera línea. Ahora vamos a proponer otro procedimiento. Queremos medir la distancia de cada punto con respecto al origen, es decir, con respecto al punto (0,0), y calificar a dicha distancia como la longitud de la combinación de producción correspondiente o, como ya la hemos denominado, del vector del producto correspondiente; y en segundo lugar, vamos a averiguar el ángulo que forma con las rectas horizontales, el radio vector que une el origen con el punto de la tabla; a este ángulo lo designamos como "sentido" del vector del producto. Resulta sencillo percatarse de que el vector del producto se puede determinar unívocamente si tenemos su "longitud" y su "sentido". Entonces podremos leer en la tabla inmediatamente las cantidades de ambos bienes. Los vectores de igual longitud determinan puntos, que se encuentran a la misma distancia del origen, es decir, la suma de los cuadrados de las cantidades producidas de los bienes N.° 1 y N.° 2 son iguales para dichos puntos; los puntos se encuentran sobre una circunferencia trazada alrededor del origen, con un radio que representa la longitud. Los puntos con el mismo sentido se encuentran sobre una recta, que pasa por el origen. Se caracterizan por el hecho de que la relación de cantidades (es decir, de las componentes del vector del producto) es la misma. A la longitud la designamos con la letra r, al ángulo o sentido con la letra φ. A continuación, en lugar de la tabla, utilizaremos el sistema de coordenadas. Sobre el eje de abscisas trasladamos las cantidades del bien número 1, sobre el eje de ordenadas las cantidades del bien número 2. Los costes totales (y análogamente las demás funciones de coste) podemos transportarlas y medirlas sobre un tercer eje perpendicular a la superficie del papel. Los costes aparecen como función de las cantidades de los bienes N.° 1 y N.° 2, o también como función de la "longitud" y "ángulo" del vector de producto correspondiente.

La figura 10 describe gráficamente el caso estudiado.

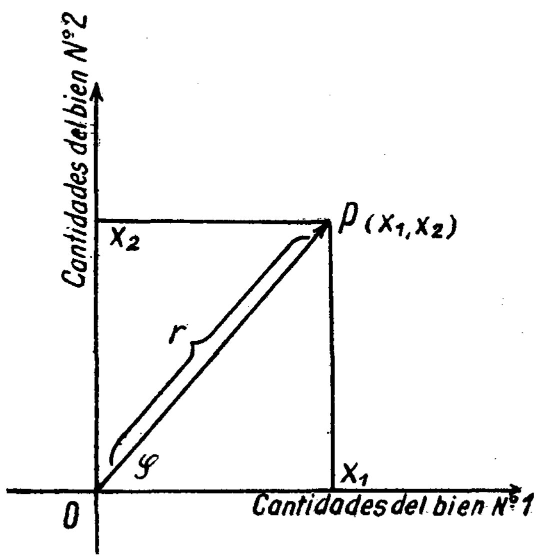

Figura 10.

Resultan aquí válidas las siguientes relaciones:

$$r^2 = x^2{}_1 + x^2{}_2 \; ; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1}$$

Partiendo de estas dos ecuaciones se pueden calcular dos magnitudes, siempre que no sean dadas las otras dos.

r y φ las designamos, con arreglo al lenguaje usual, con el nombre de coordenadas polares.

Consideremos el caso en que nos viene dada la relación en que se producen ambos bienes, es decir, la proporción $x_1 : x_2$. Esto significa que el ángulo es invariable, φ es constante. La producción se regula solamente a través de la variación de la longitud. En este caso la determinación de la producción no se diferencia en absoluto de la producción simple. El hecho de que se produzcan dos bienes distintos no tiene aquí ninguna relevancia para la empresa. Supongamos reunida una determinada cantidad del bien número 1 y de la cantidad del bien número 2, producida en unión de la primera, y considerémosla como un "pequeño paquete"; entonces podemos decir: la empresa produce en la unidad de tiempo un determinado número de "pequeños paquetes". El "pequeño paquete" aparece aquí como la unidad de bien. El número de "pequeños paquetes" producidos en la unidad de tiempo es la velocidad de producción. Sólo de ésta dependen, en este caso, los costes y el ingreso, ya que la relación de composición en "pequeños paquetes" permanece invariable.

Tampoco en lo referente a la situación del mercado con el que se enfrenta esta empresa, varía nada con respecto a la oferta simple. Si el precio de un bien cualquiera es una constante, el precio del "pequeño paquete" se obtendrá multiplicando las cantidades de bien contenidas en el "pequeño paquete" por los precios correspondientes y sumando los resultados. El ingreso de un vector de producto se obtendrá entonces de la multiplicación del precio de un "pequeño paquete" por el número de "pequeños paquetes". Si el precio depende de la velocidad de producción de cada uno de los bienes, a cada vector de producto corresponderá un precio especial para cada bien y, en consecuencia, también para cada "pequeño paquete". Pero como el vector de producto no es más que un determinado número de "paquetes", el precio sólo dependerá de dicho número, que también aquí corresponde exactamente a la velocidad de producción en el caso de la producción simple.

Supongamos, además, que el "paquete" esté constituído de tal manera, que la suma de los cuadrados contenidos en él es igual a 1. Entonces el número del "paquete" será idéntico a la "longitud" del vector del producto, es decir, a r. En lo que sigue designaremos al "paquete" como "vector de la unidad", y dándole el símbolo e. Como e viene determinada unívocamente, en cuanto se conozca el ángulo φ, e puede ser considerada como función de φ. Con el fin de diferenciarlas de las coordenadas rectangulares $(x_1\ x_2)$, colocamos paréntesis cuadrangulares [ ] para representar la dependencia de una magnitud respecto a las coordenadas polares r y φ. Resultará entonces que $\mathfrak{e} = e\ [\varphi]$. Cada vector del producto $\mathfrak{x}$ se representa ahora como el producto de su longitud por el vector de la unidad de su sentido (2):

Si el sentido es invariable (3) nos vendrá dado también el vector de la unidad. Entonces el vector del producto sólo dependerá de su longitud (4). De aquí se deduce que el beneficio, la productividad y los costes totales sólo aparecen como funciones de la longitud (5). La longitud juega aquí exactamente el mismo papel que la velocidad de producción en el caso de la producción simple. Obtenemos así el principio fundamental de la producción compuesta:

XXVI) DADA UNA COMBINACIÓN DE LAS CANTIDADES DE LOS BIENES PRODUCIDOS, RESULTAN VÁLIDAS PARA LA PRODUCCIÓN CONJUNTA CIERTAS LEYES DE LA PRODUCCIÓN SIMPLE, SUSTITUYENDO LA VELOCIDAD DE PRODUCCIÓN DE LA PRODUCCIÓN SIMPLE POR LA LONGITUD (LA CANTIDAD ABSOLUTA) DEL VECTOR DE PRODUCTO.

Cuando la relación entre las cantidades es fija la producción simple aparecerá como un caso especial de la producción compues-

---

(2) Esta relación vectorial resulta fácilmente comprensible. De la figura 10 se deducen las siguientes ecuaciones:

$$x_1 = r \,.\, \cos.\, \varphi \,; \qquad x_2 = r \,.\, \text{sen.}\, \varphi \,.$$

De donde resulta

$$\mathfrak{x} = (x_1 \,,\, x_2) = (\, r \,.\, \cos.\, \varphi \,,\, r \,.\, \text{sen.}\, \varphi \,) = r \,.\, (\, \cos.\, \varphi \,,\, \text{sen.}\, \varphi \,).$$

como para el vector e, cuyas componentes designamos con e_1, e_2, se da la ecuación $e^2_1 + e^2_2 = 1$, y si por otro lado llamamos $|e|$ a la longitud de e resulta,

$$e_1 = |\, e \,| \,.\, \cos.\, \varphi \,; \qquad e_2 = |\, e \,|\ \text{sen.}\, \varphi$$

tenemos entonces:

$$|\, e \,|^2 = |\, e \,|^2 \,.\, \cos.^2 \varphi + |\, e \,|^2 \,.\, \text{sen.}^2 \varphi = 1$$

Como sólo conocemos longitudes positivas, resulta $|\, e \,| = 1$, con lo que

$$e = (\, \cos,\, \varphi \,,\, \text{sen.}\, \varphi \,)\,,$$

y, finalmente,

$$\mathfrak{x} = r \,.\, e \left[\, \varphi \,\right]$$

(3) Es decir, φ = constante.

(4) Por tanto, para cualquier función $\Phi\,(\mathfrak{x})$ del vector $\mathfrak{x}$ tendremos la relación:

$$\Phi\,(\mathfrak{x}) = \Phi\,(\, e\ r \,) = \Phi\,[r]$$

(5) Con lo que tendremos:

$$C\,[r] = E\,[r] - K\,[r]$$

ta, igualando a 0 la segunda componente del vector unidad o también φ.

Todas las funciones que se presenten aparecen como funciones de los puntos del radio determinado por el vector de la unidad $e[\varphi] = (\cos \varphi, \text{sen } \varphi)$. A cada ángulo φ corresponde, por tanto, un punto b, un mínimo y un óptimo de la explotación, y dada una función de productividad, también una velocidad de producción que es la más favorable. Caracterizamos a estas magnitudes al igual que en el capítulo II, señalando en cada caso el sentido al poner φ a continuación entre paréntesis. Estas magnitudes no son, pues, otra cosa que funciones de φ (6).

Aunque el precio de cada uno de los bienes resulte independiente de la velocidad de producción, hay que tener en cuenta, no obstante, que el precio del vector unidad depende del sentido. Designamos con $P[\varphi]$ al precio (7) del vector unidad con un sentido determinado φ.

Estas advertencias sólo sirven para aclarar el teorema fundamental. En principio, con esta proposición, se resuelve el caso de la producción conjunta con una combinación de cantidades constante, quedando reducido totalmente al caso de la oferta simple (8).

2. *Teoría de la combinación entre los productos*

Acabamos de ver cómo en la producción conjunta se aplican todas las categorías de la producción simple, desde el momento en que conocemos el "sentido", es decir, la combinación o propor-

(6) Tenemos que:

$$b = [\varphi]\,;\ q\,[\varphi]\,;\ p\,[\varphi]\,;\ s\,[\varphi]\,.$$

(7) Resulta entonces:

$$P[\varphi] = P_1 : \cos.\ \varphi + P_2 \text{ sen. } \varphi$$

(8) Resulta evidente el que aquí carece de sentido el repartir los costes totales o sólo los costes variables entre los diferentes productos. Las diversas combinaciones de productos aparecen como cantidades diversas de un mismo producto. Cada velocidad de producción tiene un coste igual al de la totalidad del vector de producto si se pregunta: ¿Cuánto hay que gastar para alcanzar la velocidad de producción correspondiente? Y por otra parte, una velocidad de producción tendrá un coste nulo si se pregunta: ¿cuánto se puede ahorrar renunciando a la fabricación de un bien, pero produciendo los otros bienes en cantidad ilimitada?

ción en que se producen ambos productos. Supongamos ahora que el ángulo sea variable. Esto significa que nuestra empresa no sólo será capaz de adaptarse a la situación del mercado en lo que se refiere a la longitud de la producción, es decir, en lo concerniente a la cantidad de los productos producidos siendo constante la proporción en que éstos se combinen, sino que también podrá alterar esta proporción y buscar entre todas las combinaciones o proporciones posibles comprendidas entre x_1 y x_2 aquella que resulte más favorable.

Entonces podremos asignar a cada ángulo o sentido una función de beneficio y de productividad, una función de costes totales y sus derivadas, una función de costes medios y otra de costes medios variables, que sólo dependerán de la longitud del vector de producto en la proporción correspondiente.

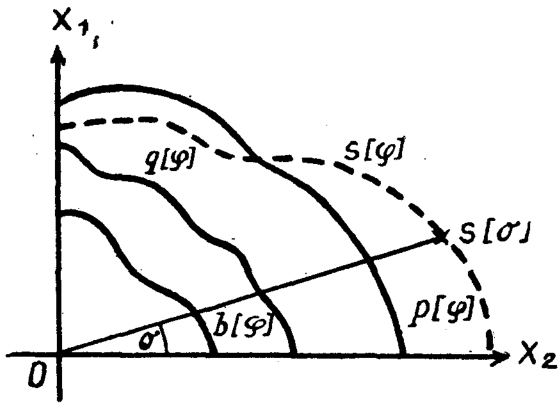

Figura 11.

Podemos, por tanto, asignar a cada proporción o ángulo un punto *b*, un mínimo de la explotación, un óptimo de la explotación y una velocidad de producción que sea la más favorable.

La totalidad de los puntos *b* pertenecientes a todas las combinaciones y también del resto de los puntos señalados, forman cada uno una curva. Tenemos así cuatro curvas: la curva *b*, la curva del mínimo de la explotación, la curva del óptimo de la explotación y la curva de las velocidades de producción más favorables. Todas estas curvas se caracterizan por el hecho de que su radio vector es una función unívoca de la proporción o sentido. Podemos, por tanto, designar a dichas curvas por medio de las expresiones siguientes:

$$b[\varphi],\ p[\varphi],\ q[\varphi],\ s[\varphi].$$

Los puntos señalados en el caso unidimensional aparecen, por lo tanto, como curvas en el caso de dos dimensiones, pero con la siguiente limitación: las velocidades de producción "más favorables" determinadas por $s[\varphi]$ no son equivalentes entre sí. Se las puede comparar en lo que se refiere al beneficio que se puede alcanzar con ellas. En realidad sólo se realiza entre las velocidades de producción $s[\varphi]$ aquella que permita el mayor beneficio. Así, pues, en el caso general sólo existe un vector de producto que sea el más favorable.

Designemos a su sentido con la letra σ; entonces $s[\sigma]$ es la velocidad de producción más favorable a realizar.

La figura 11 nos da una idea de lo que hemos expuesto.

Con arreglo a los principios que explicamos en el capítulo segundo, la curva $b[\varphi]$ se encuentra dentro de $q[\varphi]$ y $q[\varphi]$ dentro de $p[\varphi]$. Por el contrario, en la economía de concurrencia $s[\varphi]$ puede seguir su trayectoria fuera de $q[\varphi]$ (9).

Todas las s que se encuentran dentro de $b[\varphi]$ implican, en la economía de concurrencia, una pérdida, y todas las s que se encuentran fuera de $p[\varphi]$ un beneficio. Si $s[\varphi]$ sigue su trayectoria como, por ejemplo, en la figura anterior, en parte dentro y en parte fuera de $p[\varphi]$, resulta evidente que el punto más favorable, $s[\sigma]$, sólo se puede encontrar en aquella parte de $s[\varphi]$ que se encuentre fuera de $p[\varphi]$.

Si nos encontramos en libre concurrencia se puede asignar a cada vector de precio un vector de producto $s[\sigma]$ que sea el más favorable. Obtendremos entonces la oferta de la empresa como función del vector de precio.

Resultan válidos para la producción conjunta los siguientes principios:

XXVII) La función de costes totales de una empresa en regimen de producción conjunta se encuentra constituída de

(9) s sólo puede seguir su trayectoria dentro de $q[\varphi]$ en un caso idóneo del monopolio.

TAL MANERA, QUE SATISFACE, PARA CUALQUIER COMBINACIÓN EN EL SENTIDO DEL PRINCIPIO FUNDAMENTAL (10) DE LA PRODUCCIÓN CONJUNTA, LAS LEYES DE LA PRODUCCIÓN SIMPLE.

XXVIII) LOS PUNTOS SEÑALADOS EN LA PRODUCCIÓN SIMPLE CORRESPONDEN A LAS CURVAS SEÑALADAS EN LA PRODUCCIÓN CONJUNTA DE DOS BIENES. (En general: $(n - 1)$ variedades dimensionales en la producción conjunta de n bienes.) Además nos conduce al siguiente principio de la producción conjunta:

XXIX) A CADA LONGITUD DE LA PRODUCCIÓN LE CORRESPONDE UNA COMBINACIÓN DE PRODUCCIÓN QUE ES LA MÁS FAVORABLE; DE ESTE MODO QUEDA DEFINIDA LA CURVA DE LAS COMBINACIONES PRODUCTIVAS MÁS FAVORABLES. DICHA CURVA Y LA DE LA LONGITUD MÁS FAVORABLE DE LA PRODUCCIÓN, DETERMINAN EN SU PUNTO DE INTERSECCIÓN EL VECTOR DE PRODUCCIÓN MÁS FAVORABLE DE LA EMPRESA, ES DECIR, SU OFERTA (11).

La demostración definitiva de este principio se ofrece más abajo en el principio XXXI.

Observamos que el nuevo elemento que la producción conjunta introduce en todas nuestras consideraciones es la combinación o proporción en que entran los productos. Este hecho resulta también válido para el caso en que se produzcan simultáneamente más de dos bienes. En lo que se refiere a la proporción o combinación las categorías de la producción simple son indeterminadas. Tampoco permiten una definición adicional y lógica, que tuviese como consecuencia una determinación unívoca. Sólo el vector del producto más favorable es definido como óptimo no sólo con respecto a la longitud o duración, sino también con respecto a la combinación o proporción.

Con todo lo expuesto queda resuelto el problema que nos habíamos planteado respecto a la producción conjunta, incluso para

---

(10) Principio (XXVI).

(11) En lo que se refiere al principio de la satisfacción de las necesidades, hay que señalar aquí que también en la economía monopolística resulta necesario un principio subsidiario adicional, en el sentido de que se realice dentro de las mayores velocidades de producción posibles (cada combinación tiene una tal velocidad de producción), aquella que tenga los costes medios más bajos. Además de la longitud de la producción hay que determinar también la combinación en que entren los productos.

el caso general. Podemos hacer, sin embargo, una generalización del principio fundamental, y también del principio XXVIII (en la hipótesis de que todas las funciones que aparezcan accesoriamente sean continuamente diferenciables). Resulta igualmente válido el principio fundamental para el caso en que la proporción no sea constante, sino una función normal y unívoca de la longitud. En estos casos las funciones económicas (beneficio, productividad, costes) no vienen definidas a lo largo de un radio, sino de una curva. Como velocidad de producción se conserva la longitud del vector del producto correspondiente en cada caso.

La conclusión fundamental que podemos obtener de lo hasta ahora expuesto sobre la producción conjunta es la siguiente: Si se definen adecuadamente los conceptos de "longitud" y "sentido" del vector del producto, se podrán aplicar a la producción compuesta todas las afirmaciones hechas respecto a la producción simple. La producción compuesta no aparece coordinada a la producción simple sino superpuesta a esta última. La producción simple es un caso especial de la producción compuesta. Y precisamente, y esto es lo decisivo, la teoría de la producción simple se encuentra comprendida totalmente en la teoría de la producción conjunta. La teoría de la producción compuesta contiene, además, elementos que no se encuentran en la teoría de la producción simple. Estos elementos están conectados con el concepto de "sentido" del vector del producto. Podemos, pues, formular el siguiente principio:

XXX) PARA LA TOTALIDAD DE LA PRODUCCIÓN RESULTA VÁLIDA LA TEORÍA DE LA VELOCIDAD DE PRODUCCIÓN. PARA LA PRODUCCIÓN CONJUNTA RESULTA VÁLIDA, ADEMÁS, LA TEORÍA DE LA COMBINACIÓN EN QUE ENTRAN LOS PRODUCTOS.

II

En el caso de la producción conjunta, los costes totales y la productividad dependen de ambos bienes. Como las velocidades de producción podemos representarlas como funciones de la longitud y del sentido del vector del producto, podremos decir también: los costes totales y la productividad son funciones de la longitud y del sentido del vector del producto.

En la exposición que sigue vamos a suponer que conocemos la longitud del vector del producto. Entonces las magnitudes mencionadas sólo dependen de la combinación de la producción. En este caso podemos considerar a los costes totales y a la productividad como funciones de la combinación φ de la producción. Tiene aquí una importancia decisiva el que el ángulo φ sólo puede variar entre 0° y 90°, es decir que las funciones mencionadas sólo se encuentran definidas en un sector limitado. Si medimos el arco de curvatura del ángulo φ, podremos decir: las funciones mencionadas se encuentran definidas sólo en el intervalo $\left[\sigma, \frac{\pi}{2}\right]$.

Lo mismo resulta válido para todas las funciones constituídas a base de la función de la productividad y de la de los costes totales en cualquiera de las formas que no contradigan al principio de la continuidad, o sea, que se puedan derivar. De este hecho y de la hipótesis hecha más arriba, de que todas las funciones en cuestión han de ser diferenciables, se infiere el importante principio siguiente:

XXXI) LA FUNCIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD Y DE LOS COSTES TOTALES, ASÍ COMO SUS COMPONENTES Y DERIVADAS, TIENEN SIEMPRE UN MÍNIMO Y UN MÁXIMO EN EL SECTOR DE DEFINICIÓN DE LA VARIABLE φ.

Esto también resulta válido para la función del beneficio. De donde se deduce que siempre existe una combinación de producción que es la más favorable, indiferentemente de como se encuentren constituídas las funciones de la productividad y de los costes (cf. principio XXX). Por consiguiente, las Empresas, para poder funcionar, no necesitan presentar en lo que se refiere a la combinación o proporción de los productos, a diferencia de lo que ocurre con la velocidad de producción, ningunas propiedades especiales en sus funciones de costes totales.

III

Vamos a señalar de nuevo la significación de las coordenadas polares que ya utilizamos, para poder llevar a cabo de este modo una ampliación de la teoría de la combinación o proporción en que entran los productos en la producción.

Las coordenadas polares son un caso particular de las coordenadas curvilíneas. Están constituídas por un haz de rectas, que pasan por el origen, y un conjunto de círculos concéntricos al origen. Cada punto del plano se representa por el punto de intersección de una circunferencia y una recta. La consideración de la longitud del vector del producto, dada una combinación de productos fija, no es otra cosa que la consideración de las funciones que nos interesan a lo largo de una recta. La teoría de la combinación o proporción de los productos no es más que la investigación de dichas funciones a lo largo de una circunferencia.

Acabamos de decir que las mismas leyes que resultan válidas para las funciones a lo largo de una recta que pasa por el origen, son también válidas a lo largo de una curva que defina la combinación o proporción como una función continua unívoca de la longitud del vector del producto. Es fácil observar que la consideración a lo largo de una recta que pase por el origen sólo es un caso particular de la consideración general. La recta define, por tanto, la combinación o proporción como una constante respecto a la longitud.

De la misma manera se puede generalizar la consideración a lo largo de una circunferencia. La circunferencia es una curva que define la longitud como una constante con relación al ángulo. Los principios que tienen validez a lo largo de una circunferencia conservan su validez cuando en lugar de una circunferencia se considera otra curva que satisfaga la condición de definir a la longitud como función continua unívoca del ángulo.

Por tanto, podemos sustituir las rectas por un haz de curvas adecuadas que no se corten, e igualmente las circunferencias por otras curvas, también adecuadas, que tampoco se puedan cortar (12).

La primera posibilidad no tiene para nosotros ninguna relevancia, pero sí la segunda. En el siguiente apartado expondremos, por tanto, la determinación general de la velocidad de producción más favorable en la producción compuesta según el principio económico del lucro, considerando para ello un sistema de coor-

(12) Cada uno de estos haces de curvas debe satisfacer la condición de que sus curvas no se corten. De otro modo no se cumpliría la condición de la relación unívoca e inversa entre los puntos y sus coordenadas.

denadas curvilíneas consistente en rectas que pasen por el origen y en curvas que definan la longitud como función continua unívoca de la combinación de los productos. De este modo, por medio de una constitución geométrica ya conocida en la economía teorética, podremos obtener la velocidad de producción más favorable en la producción compuesta utilizando los resultados de la producción simple y el principio XXI de la teoría de la combinación de los productos.

IV

1.—La combinación de las dos velocidades de producción x_1, x_2 se representa en el plano por un punto cuyas coordenadas son x_1, x_2. Imaginémonos que todos los puntos que tengan iguales costes totales se encuentren unidos por una curva. Obtenemos así en nuestro plano un haz de curvas. Cada curva viene caracterizada por ser el lugar geométrico de todos los niveles de producción con iguales costes totales. Podemos denominarla curva isocostes. Tenemos que considerar de manera más determinada la estructura de tal tipo de curvas. Para ello, y con el fin de simplificar, vamos a suponer que los costes totales son monótonos en sentido estricto.

Antes que nada hagamos una importante afirmación: ninguna curva isocostes puede ser cortada por otra curva de la misma clase. Ya que entonces un vector tendría una intensidad mayor que otro vector más caro (13), lo que, en virtud de la monotonía, resulta imposible. A consecuencia de la monotonía en sentido estricto, cada cambinación posee sólo un punto cuyos costes totales tengan una altura conocida previamente. Las curvas isocostes definen, por tanto, a su radio vector como función unívoca de la combinación de los productos que, con arreglo a la hipótesis de regularidad de la función de costes totales, también es continuamente diferenciable. Entre todos los vectores que son definidos por una curva de tal tipo como vectores de productos con iguales costes totales, no pueden darse dos vectores, de los cuales el uno se encuentre con-

(13) Cf. cap. I.

tenido en el otro, sin que ambos coincidan. Todos los vectores isocostes tienen la misma intensidad. Es decir: dos radios vectores cualesquiera de una curva isocostes se encuentran constituídos de tal manera que cuando uno de ellos tiene una primera componente x_1 mayor que el otro, su segunda componente x_2 debe ser menor que la del otro (14). De modo que la curva define a x_1 como una función descendente monótona de x_2, y viceversa. Un haz de vurvas de tal tipo tendría aproximadamente la estructura que se encuentra indicada en los dos gráficos de la figura 12.

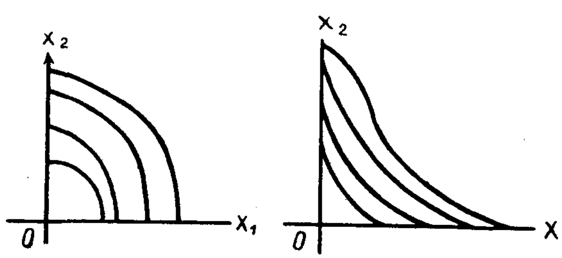

Figura 12.

Por tanto, las curvas isocostes pueden ser cóncavas hacia arriba o hacia abajo.

Dichas curvas cumplen la condición de definir a sus radios vectores como funciones unívocas de la combinación de los productos. A lo largo de dichas curvas resultan, por tanto, válidas leyes análogas a las que se dan en las circunferencias concéntricas. Junto con el haz de rectas que pasan por el origen nos ofrecen un sistema de coordenadas curvilíneas.

---

(14) x_1 es definida por la curva como función de x_2 y viceversa, resultando siempre:

$$\frac{dx_1}{dx_2} < 0; \quad \frac{dx_2}{dx_1} < 0$$

Si la curva isocostes tiene, por ejemplo, el punto h_1 en el eje N.° 1 y el h_2 en el eje N.° 2, se encontrará comprendida dentro del rectángulo:

$$(0, 0), \ (h_1, 0), \ (h_1, h_2), \ (0, h_2).$$

Dentro de este rectángulo decrecerá monótamente, pudiendo seguir en el resto cualquier trayectoria.

Vamos a considerar ahora la función del ingreso. Para ésta se pueden construir curvas de combinaciones de productos de igual ingreso que unan todos aquellos niveles de producción que tengan el mismo ingreso. Estas curvas pueden tener estructuras muy diferentes (15).

Si colocamos el haz de las curvas isocostes sobre el de las de combinaciones de productos de igual ingreso, cada curva isocostes será cortada por un número infinito de curvas de combinaciones de productos de igual ingreso, y al contrario. A cada curva de combinaciones de productos de igual ingreso corresponde una curva isocostes interna que tiene un punto común con la curva de combinaciones de productos de igual ingreso. Dicho punto será entonces el nivel de producción que logra un determinado ingreso con unos costes totales mínimos. El lugar geométrico de todos esos puntos es una curva. Esta curva es idéntica a la que aparece cuando se unen entre sí aquellos puntos de las curvas isocostes que corresponden en cada caso a los ingresos máximos. Denominamos a esta curva curva de las combinaciones más favorables entre los productos o de las combinaciones en que se consigue el equilibrio de la producción conjunta, con lo que observamos que la combinación la hacemos variar no a lo largo de una circunferencia sino a lo largo de la curva isocostes. Sobre dicha curva deberá encontrarse también el punto del nivel de producción más favorable. Como, además, dicho punto también deberá estar situado sobre la curva de las velocidades de producción más favorables, lo obtendremos como punto de intersección de las curvas de las combinaciones más favorables entre los productos y del de las longitudes más favorables $s\ [\varphi]$.

Si existe libre concurrencia, las curvas de combinaciones de productos de igual ingreso aparecen como rectas paralelas que cortan porciones de los ejes número 1 y número 2, que se comportan de manera inversa a como lo hacen los precios correspondientes.

Los puntos de la curva de las combinaciones más favorables entre los productos vienen determinados por los puntos de tangencia de dichas rectas y de las curvas isocostes, con lo que la curva

(15) Podrán ser, por ejemplo, curvas cerradas que se encuentren situadas alrededor de un punto, el máximo de la función de ingreso.

isocostes debe seguir una trayectoria comprendida entre la recta y el origen. Si una recta no tiene tal punto de tangencia con una curva, el punto de la combinación más favorable entre los productos se encontrará sobre uno de los dos ejes. Si las curvas isocostes son cóncavas hacia arriba no podrá haber para ninguna combinación de precio un punto de tangencia de la índole descrita (16). De aquí se deduce el siguiente principio:

XXXII) SI LAS CURVAS ISOCOSTES SON CÓNCAVAS HACIA ARRIBA, NO PODRÁ EXISTIR NUNCA EN LA LIBRE CONCURRENCIA PRODUCCIÓN CONJUNTA, SINO QUE SE PRODUCIRÁ SOLAMENTE O EL BIEN N.° 1 O EL BIEN N.° 2.

La figura al margen nos ofrece la construcción (17) de la curva

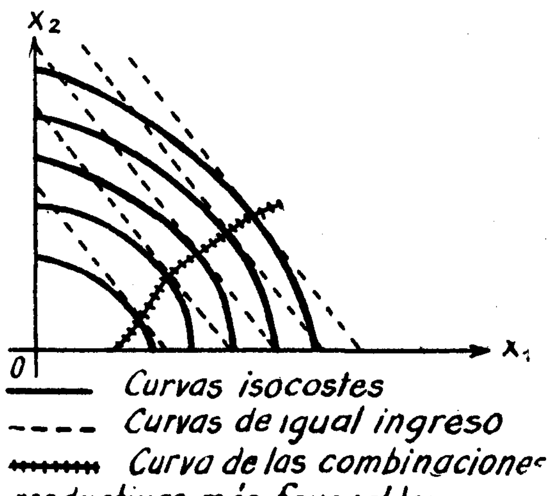

Figura 13.

(16) Por consiguiente, la recta tangente de combinaciones de igual ingreso se encontraría situada entre la curva isocostes y el origen, es decir, precisamente al contrario de la condición establecida.

(17) El método de las curvas de indiferencia fué utilizado primeramente en la economía teorética por Edgeworth, y ya, con pleno éxito, por Vilfredo Pareto (cf. V. PARETO, *Manuel d'économie politique*, París, 1927, 2.ª éd., página 540, apartado 1).

de las combinaciones más favorables entre los productos en la economía de concurrencia.

Esta construcción nos permite la sencilla determinación del vector del producto más favorable; superponiendo los dos haces de curvas, obtenemos la línea que une a los puntos de tangencia como lugar geométrico para el nivel de producción más favorable que buscamos. Este lugar geométrico es también unidimensional para más de dos bienes; es, por tanto, una curva espacial. La construcción descrita elimina del problema la combinación desconocida del vector del producto más favorable. La curva de las combinaciones más favorables entre los productos define a la combinación como una función unívoca de la longitud. Si tenemos en cuenta el principio adicional del teorema XXVIII, veremos que por medio de aquella construcción el caso general de la producción conjunta se reduce al caso especial de las relaciones de cantidades unidas entre sí, y de éste, con arreglo al teorema XXVI, al caso de la producción simple de un solo bien. A lo largo de la curva de las combinaciones más favorables entre los productos se determina, con arreglo a la teoría de la producción simple, la longitud más favorable. Esto puede obtenerse considerando a la función de los costes totales y del ingreso a lo largo de esa curva. Pero se pueden también practicar las siguientes simplificaciones: Escojamos un bien; por ejemplo, el número 1. La curva de las combinaciones más favorables entre los productos define la velocidad de producción del bien número 2 como función de la velocidad de producción del bien número 1. Consideramos, por tanto, a los costes totales y al ingreso de ambos bienes sólo como funciones de la velocidad de producción del bien número 1. Con ello, nos encontramos precisamente dentro del caso general de la oferta simple y procedemos según las reglas conocidas.

3. *Los costes como función no transformada de ambas velocidades de producción*

I

En los dos primeros apartados, para explicar la teoría de la producción compuesta, dimos un rodeo a través de las coordenadas polares, ya que sólo así podíamos demostrar que los conceptos de la producción simple también resultaban válidos para la producción compuesta. Además, dicha disquisición nos permitió hacer una descripción de la función de costes totales para la producción conjunta, mucho más sencilla y profunda de lo que hubiese sido posible en otro caso. Sin embargo, a veces resulta más ventajoso el considerar a la producción conjunta con arreglo al sistema de coordenadas rectilíneas, en su dependencia respecto a la velocidad de producción de cada uno de los bienes. Este será concretamente el caso ante el que nos encontraremos en el próximo apartado, donde habremos de considerar la teoría del precio compensatorio entre las explotaciones. Por tanto, en dicho apartado vamos a estudiar los costes y el ingreso como funciones de las velocidades de producción de los bienes N.° 1 y N.° 2.

II

1. La función de costes totales es aquí: $K = K(x_1, x_2)$. No necesitamos referirnos a sus propiedades, ya que éstas se deducen de los dos apartados anteriores.

Sólo trataremos aquí una cuestión, a saber: si resulta posible repartir racionalmente los costes totales, en el caso general de la producción conjunta, entre cada una de las velocidades de producción. Esta posibilidad la hemos negado anteriormente (ver nota 8) para el caso en que los bienes se produzcan en una proporción fija. Para el caso general, en principio, resulta válida la misma afirmación. En primer lugar: resulta siempre imposible distribuir los costes proporcionalmente. En lo que se refiere a los costes variables resulta lo siguiente:

Los costes variables para una determinada velocidad de producción deben cumplir dos condiciones: han de indicar lo que se economiza, en el caso de que dicha velocidad de producción no se realice; y deben mostrar cuánto hay que sacrificar para que pueda ser realizada tal velocidad de producción. Sólo cuando los costes variables puedan ser distribuídos entre ambos bienes de manera tal que se satisfagan unívocamente esas dos condiciones, podrán ser consideradas las dos partes como costes variables de cualquier velocidad de producción. Se observa que tal distribución unívoca de los costes variables sólo resulta posible cuando la función de costes variable aparece como la suma de dos funciones, de las que la una sólo depende de x_1 y la otra, a su vez, sólo de x_2 (18).

2. Definimos como funciones de costes marginales del bien N.° 1 o del N.° 2 a las derivadas parciales de la función de costes totales respecto a x_1 o respecto a x_2. Las desìgnamos con las letras K'_1 y K'_2. Ambas funciones de costes marginales dependen tanto de x_1 como de x_2. A las derivadas de dichas funciones, con respecto a ambas variables, las designamos K''_{11}, K''_{12}, K''_{21} y K''_{22}, donde por ser continuamente diferenciable la función de costes totales se dará la igualdad $K''_{12} = K''_{21}$. A K''_{11} lo denominamos crecimiento del coste marginal del bien N.° 1 y a K''_{22} crecimiento del coste marginal del bien N.° 2.

Las funciones de los costes medios podrían definirse de manera análoga, pero aquí carecen de importancia.

III

En el caso de libre concurrencia la función del ingreso tiene la siguiente forma:

$$E(x_1, x_2) = x_1 P_1 + x_2 P_2$$

En el caso del monopolio se puede distinguir un caso general,

---

(18) Los costes variables x_1 y x_2 son: $K_{II}(x_1, x_2)$.
Si no se produce x_1 tendremos los costes variables $K_{II}(0, x_2)$.
Se economiza, por consiguiente:

$$K_{II}(x_1, x_2) - K_{II}(0, x_2$$

Si no se produce x_2, se economizará

$$K_{II}(x_1, x_2) - K_{II}(x_1, 0)$$

Si no se produce ni x_1 ni x_2, se economizará $K_{II}(x_1, x_2)$.
En general, tendremos

$$K_{II}(x_1, x_2) \neq K_{II}(x_1, x_2) - K_{II}(0, x_2) + K_{II}(x_1, x_2) - K_{II}(x_1, 0),$$

es decir, en general:

$$K_{II}(x_1, x_2) \neq K_{II}(x_1, 0) + K_{II}(0, x_2).$$

La igualdad sólo se da cuando $K_{II}(x_1, x_2)$ se puede representar como suma de funciones que sólo consten de una variable cada una, es decir, cuando se pueda escribir:

$$K_{II}(x_1, x_2) = K_{II,1}(x_1) + K_{II,2}(x_2).$$

Por tanto, sólo en este caso es posible una suma de los costes variables de cada uno de los bienes.

donde el precio de un bien depende de la oferta de ambos bienes, y un caso especial, donde el precio sólo depende de la oferta del bien que le corresponde.

Definimos los conceptos de "ingreso marginal" y "crecimiento del ingreso marginal" al igual que lo hicimos con los conceptos correspondientes para los costes.

En el caso de la libre concurrencia el ingreso marginal de cada bien es igual a su precio, el crecimiento del ingreso marginal es igual a cero.

De manera análoga se obtiene la representación de la función de beneficios.

IV

Consideremos la determinación del vector de producción más favorable en el caso de la concurrencia, designando a las componentes de dicho vector con las letras s_1, s_2. El beneficio será aquí máximo, cuando las dos ecuaciones

$$P_1 = K'_1 (s_1 , s_2) ; \; P_2 = K'_2 (s_1 , s_2)$$

son satisfechas, lo que obtenemos al diferenciar (19) la función de beneficios. Obtenemos así dos ecuaciones, en las que hay que calcular las dos incógnitas s_1 y s_2. Dichas ecuaciones contienen el teorema siguiente, constituído con arreglo al principio correspondiente de la producción simple:

XXXIII) SI EXISTIENDO EL PRINCIPIO DEL LUCRO ECONÓMICO NOS ENCONTRAMOS EN RÉGIMEN DE PRODUCCIÓN CONJUNTA Y DE LIBRE CONCURRENCIA, EL NIVEL DE PRODUCCIÓN MÁS FAVORABLE DE CADA BIEN TENDRÁ UNOS COSTES MARGINALES QUE SERÁN IGUALES AL PRECIO CORRESPONDIENTE.

Una condición subsiguiente para que el beneficio sea máximo

---

(19) Diferenciamos:

$$G (x_1 , x_2) = x_1 . P_1 + x_2 . P_2 - K \quad (x_1 , x_2)$$

respecto a x_1 y x_2, y obtenemos

$$\frac{\delta G}{\delta x_1} = P_1 - K'_1 ; \quad \frac{\delta G}{\delta x_2} = P_2 - K'_2 .$$

Para $x_1 = S_1$ y $x_2 = S_2$ deben desaparecer las dos derivadas de G.

es que los crecimientos del beneficio marginal sean negativos (20). De aquí se deduce un teorema análogo al principio correspondiente de la producción simple.

XXXIV) Bajo las hipótesis del principio XXXIII los crecimientos de los costes marginales en el nivel de producción más favorable, son positivos.

Las consecuencias que se deducen de esto no es necesario formularlas especialmente, ya que se infieren, en general, de la consideración de las coordenadas polares.

La tercera condición para que el beneficio sea máximo, es que el determinante de Hesse de la función de beneficio, sea positivo. Esta condición, sin embargo, no sirve ya a la teoría económica.

V

Vamos a considerar ahora la determinación del nivel de producción más favorable en el caso de que exista un monopolio, con la denominación *a*) para el caso general, y con la denominación *b*) para el caso especial.

a) $$G(x_1, x_2) = x_1 . P_1(x_1, x_2) + x_2 . P_2(x_1, x_2) - - K(x_1, x_2)$$

$$G'_1 = x_1 . P'_{1,1} + P_1 + x_2 . P'_{2,1} - K'_1$$

$$G'_2 = x_1 . P'_{1,2} + P_2 + x_2 . P'_{2,2} - K'_2 .$$

Para el nivel de producción más favorable resulta:

$$K'_1 = P_1 + s_1 . P'_{1,1} + s_2 . P'_{2,1} .$$

$$K'_2 = P_2 + s_1 . P'_{1,2} + s_2 . P'_{2,2} .$$

(20) Tiene que darse que:

$$\frac{\delta^2 G}{\delta x_1^2} = - K''_{11} < 0$$

y

$$\frac{\delta^2 G}{\delta x_2^2} = - K''_{22} < 0$$

por lo que:

$$K''_{11} > 0 \text{ y } K''_{22} > 0$$

$P'_{1,1}$ y $P'_{2,2}$ resultan negativos sin ningún género de duda. Con arreglo a una nota que se encuentra en el primer capítulo de nuestro trabajo, se puede averiguar si $P'_{1,2}$ y $P'_{2,1}$ son negativos o positivos. Si los dos bienes N.° 1 y N.° 2 son sustitutivos, las dos derivadas parciales serán negativas; entonces los costes marginales de la velocidad de producción más favorable en este caso general del monopolio serán, con toda seguridad, menores que el precio. Si ambos bienes son complementarios entre sí, las dos derivadas serán positivas; entonces no se podrá averiguar si los costes marginales son menores o mayores que el precio. Obtendremos resultados análogos para el caso en que los dos bienes no sean ni sustitutivos ni complementarios, si consideramos las diversas posibilidades de la elasticidad de la demanda. En general, podemos decir: si una derivada parcial $P'_{1,2}$ ó $P'_{2,1}$ es negativa, el precio de monopolio P_1 ó P_2 será mayor que los costes marginales de la velocidad de producción más favorable. Si una derivada parcial $P'_{1,2}$ o $P'_{2,1}$ es positiva, no se podrá afirmar nada sobre la diferencia entre precio y costes marginales.

b) En el caso especial del monopolio resulta:

$$G(x_1, x_2) = x_1 . P_1(x_1) + x_2 . P_2(x_2) - K(x_1, x_2)$$
$$G'_1 = P_1(x_1) + x_1 . P_1(x_1) - K'_1$$
$$G'_2 = P_2(x_2) + x_2 . P_2(x_2) - K'_2$$

aquí nos percatamos inmediatamente, que los costes marginales del nivel de producción más favorable son menores que el precio.

(Con estos dos resultados no se modifica en absoluto la teoría expuesta en los dos primeros apartados, sino que se completa.)

VI

Finalmente, digamos unas palabras respecto al principio de la satisfacción de las necesidades. Hemos visto más arriba que en el caso de la producción conjunta debe darse siempre un principio subsidiario que contiene una afirmación en lo que se refiere a la duración del proceso productivo, pero no respecto a las combinaciones en que entran los productos. Este principio es claro que no resulta válido para el caso en que las cantidades hayan sido determinadas de antemano. Aquí, del principio de la satisfacción de las necesidades, se deduce que el precio del vector unidad es igual a los costes medios para el nivel de producción correspondiente (21). Con arreglo al principio de la satisfacción de las necesidades no resulta posible una determinación de los precios de los bienes N.° 1 y N.° 2.

4. *Teoría del precio de compensación entre explotaciones*

I

Vamos a tratar ahora un problema que tiene importancia, tanto desde el punto de vista de la economía política como desde el aspecto de la economía de la empresa. Es el problema del precio de compensación entre empresas, que vamos a considerar en sus rasgos más esenciales.

Imaginémonos una empresa, que presente la siguiente estructura: consta de dos explotaciones: la explotación N.° 1 y la explotación N.° 2. La explotación N.° 1 fabrica el bien N.° 1, que es utilizado por la explotación N.° 2 como medio de producción, por ejemplo, como elemento de la explotación; la explotación N.° 2 fabrica el bien N.° 2, que ofrece en el mercado. Vista de forma general, se trata aquí de la producción de dos bienes por una empresa, es decir, de un caso particular de la producción conjunta. Las dos explotaciones aparecen, sin embargo, como completamente independientes. Podrían constituir también dos empresas independientes y separadas por el mercado, con lo que la explotación N.° 1 resultaría quizá abastecedora de la explotación N.° 2.

Vamos a suponer, además, que la explotación N.° 2 paga un precio a la explotación N.° 1 por los productos N.° 1 suministrados. A este precio lo denominamos precio compensatorio. De este modo debemos llegar a la conclusión de que la explotación N.° 2 posee

(21) Por consiguiente:

$$\frac{K\ (x_1,\ x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

un cálculo de costes independiente y que su velocidad de producción viene regulada, por tanto, por las leyes generales de los costes. Nos preguntamos entonces, y la respuesta a esta pregunta es la tarea propia de este apartado, ¿cuál ha de ser la altura de este precio compensatorio? Con esto viene implicada otra pregunta: ¿Cómo se regula la velocidad de producción de la explotación N.° 1? La respuesta a estas dos preguntas la obtendremos paulatinamente, comenzando con hipótesis simplificadas.

II

Vamos a suponer, en primer lugar, que el producto N.° 1 no es apto para su venta en el mercado, es decir, que no puede ser ni vendido ni comprado. La explotación N.° 1 produce precisamente del producto N.° 1 la cantidad demandada por la explotación N.° 2. La explotación N.° 2 produce el bien N.° 2 y lo ofrece en el mercado. La empresa total sólo aparece, pues, como productora del bien N.° 2. Para determinar cuál es la cantidad de dicho bien a producir por la empresa total para lograr el máximo beneficio, es decir, para averiguar la velocidad de producción más favorable de la empresa, no necesitamos tener en cuenta la división de dicha empresa en dos explotaciones. Podemos fijar los costes totales de dicha empresa como productora del bien N.° 2 y calcular la velocidad de producción más favorable con arreglo a la forma habitual, siguiendo el teorema fundamental del principio del lucro económico. Este es el punto de partida. Es necesario que se dé la condición de que el precio compensatorio existente entre la explotación N.° 1 y la explotación N.° 2 esté constituído de tal manera, que la explotación N.° 2, cumpliendo las leyes de los costes, realice precisamente la velocidad de producción *s* y ninguna otra. Ya que si realizase una velocidad de producción distinta, el beneficio bruto logrado no podría alcanzar un máximo. Un precio compensatorio que influya sobre la estructura de los costes de la explotación N.° 2, de modo que se realice una velocidad de producción distinta de la velocidad de producción *s*, que es la más favorable para la empresa total, debe, según lo anterior, considerarse como falso. El producto de la empresa total es idéntico al producto de de la explotación N.° 2. La empresa total entra en relación con el mercado a través de la explotación N.° 2. Como la explotación N.° 2 debe regirse por las leyes generales de los costes, se deduce para dicha explotación, como motivo determinante del nivel de producción, el teorema fundamental del principio del lucro económico. Los costes marginales de la explotación N.° 2 deben ser iguales al ingreso marginal cuando la explotación N.° 2 realiza la velocidad de producción más favorable *s*. Pero como el ingreso marginal de la velocidad de producción *s* es igual a los costes marginales de la empresa total, y, como además esa condición resulta válida para cualquier función de ingreso que pudiese tener la empresa, obtendremos en consecuencia la importante afirmación de que los costes marginales de la empresa total y los costes marginales de la explotación N.° 2 deberán ser siempre iguales entre sí, es decir, que las funciones de costes marginales de la empresa total y de la explotación N.° 2 serán idénticas. Pero esto significa (ya que las funciones de costes marginales son las derivadas de las funciones de costes totales) que las funciones de costes totales de la empresa total y de la explotación N.° 2, deberán ser iguales hasta una constante arbitraria.

Consideremos estas dos funciones de costes totales más detenidamente. Se componen de partidas iguales que se suman hasta los costes del producto N.° 1, que produce la explotación N.° 1. Aquí la función de costes totales de la empresa total incluye la función de costes totales de la explotación N.° 1, mientras que la función de costes totales de la explotación N.° 2 incluye en el mismo lugar el producto de la cantidad producida por la explotación N.° 1 y el precio compensatorio. La afirmación que hicimos anteriormente se reduce al principio siguiente: los costes totales de la explotación N.° 1 y el producto de la velocidad de producción de la explotación N.° 1, por el precio compensatorio, deben ser iguales entre sí para todas las velocidades de producción de la explotación N.° 1 hasta una constante arbitraria. Podemos igualar esta constante a cero, sin que varíe nada el beneficio bruto de la empresa. Entonces los costes totales de la explotación N.° 1 serán iguales al producto de la velocidad de producción de la explotación N.° 1 por el precio compensatorio. Obtenemos así el importante principio siguiente:

XXXV) El precio compensatorio que dentro de una empresa cerrada una explotación N.° 1 carga en cuenta a una explotacion N.° 2, es igual a los costes medios de la explotación N.° 1, bajo la hipótesis de que el producto de la explotación N.° 1 no pueda concurrir al mercado. Dicho de otra manera: La explotación N.° 1 suministra a la explotación N.° 2 con arreglo al principio de la satisfacción de las necesidades.

Teorema adicional: El principio del lucro económico se mantiene para la empresa total si se suman al precio compensatorio el cociente formado por una constante arbitraria positiva y negativa y la velocidad de producción de la explotación N.° 1.

Al mismo tiempo queda también determinada la velocidad de producción realizada por la explotación N.° 1. Dicha velocidad de producción es idéntica a la cantidad demandada por la explotación N.° 2 en la unidad de tiempo del producto N.° 1.

III

Vamos a alterar ahora una de las hipótesis. Supongamos que también el producto N.° 1 puede concurrir al mercado, es decir, que también este producto puede ser comprado y vendido. Con esta hipótesis la cuestión se complica. Con el fin de simplificar vamos a suponer que existe libre concurrencia.

En primer lugar vamos a considerar más detenidamente el resultado del apartado anterior. Hemos visto que en el caso allí estudiado la totalidad del beneficio hasta una determinada constante tenía que aparecer en la explotación N.° 2, para que dicha explotación realizase la velocidad de producción más favorable para la empresa total. Este principio es de validez general. Claro que el beneficio bruto de una empresa siempre debe aparecer como unidad.

Para cada producción que se lleve a cabo siguiendo el principio del lucro económico, resulta válido el principio:

XXXVI) Las velocidades de producción más favorables de dos empresas serán iguales entre sí cuando sus funciones de beneficio sólo se diferencien en una de las magnitudes inde-

PENDIENTES DE LAS VELOCIDADES DE PRODUCCIÓN, ES DECIR, EN UNA CONSTANTE.

Esto significa, aplicándolo al problema que aquí estudiamos, que las funciones de beneficio de la explotación N.° 2 y de la empresa total, sólo debe diferir en una constante; es decir, que la explotación N.° 1 debe obtener, a lo más, un beneficio que sea independiente del de la producción N.° 2. En todo caso se mantiene el principio económico cuando el precio compensatorio se fija de tal modo, que la explotación N.° 1 no obtiene ningún beneficio. Este precio compensatorio, que representaría una solución especial de nuestra tarea, puede ser modificado cuando la explotación N.° 1 obtenga un beneficio constante. A continuación vamos a ocuparnos, en primer lugar, de la solución especial mencionada. La general se obtendrá por una simple ampliación.

Vamos a estudiar, por tanto, lo que ocurre cuando ambos bienes son aptos para su venta en el mercado. En ese caso las cantidades fabricadas en la unidad de tiempo por la explotación N.° 1 y las demandadas del producto N.° 2 en dicha unidad de tiempo por la explotación N.° 2, no necesitan coincidir. Por tanto, vamos a designar a la cantidad producida en la unidad de tiempo por la explotación N.° 1 con la letra x_1, la demandada por la explotación N.° 2 con la letra y, y la cantidad producida por la explotación N.° 2 con la letra x_2.

La primera afirmación básica que tenemos que hacer es que la explotación N.° 1 es totalmente independiente en nuestro caso (es decir, cuando existe libre concurrencia y el bien N.° 1 es apto para su venta en el mercado) en la velocidad de producción realizada, es decir, en x_1 de la explotación N.° 2 y de la velocidad de producción demandada y. Deberá realizarse aquella velocidad de producción, cuyos costes marginales sean iguales al precio P_1 de su bien. Designamos a dicha velocidad de producción con la letra s_1.

Si y es menor que s_1 la explotación N.° 1 obtendrá un beneficio por la producción adicional, de $s_1 - y$, sin que varíe el beneficio de la explotación N.° 2. Si y es mayor que s_1 la explotación N.° 1 tendrá costes menores cuando compre $y - s_1$ de s_1 que cuando produzca por sí misma la diferencia. De aquí se deduce que los costes totales de la explotación N.° 1, que designamos con la expresión $K_1(x_1)$, que, independientemente de y, importan siempre $K_1(s_1)$.

De esto se sustrae el ingreso que se obtiene de la venta de $s_1 - y$, o sea, que se añade la cantidad por el importe de la compra de $y - s_1$; en ambos casos hay que sumar, por tanto, $(y - s_1)\ P_1$. El saldo de la explotación N.° 1 antes del pago de y asciende, por tanto, a

$$K_1\,(s_1) + (y - s_1)\ P_1\,.$$

Este saldo puede ser positivo o negativo. En el primer caso significa costes, en el segundo beneficios. Para que la explotación N.° 1 no sufra ni beneficio ni pérdida, la suma que la explotación N.° 1 tiene que cargar en cuenta a la explotación N.° 2 y la que se obtiene como producto del precio compensatorio V por la cantidad demandada y, tiene que ser igual al saldo anterior. El precio compensatorio puede ser positivo, es decir, cuando se paga por la explotación N.° 2 a la explotación N.° 1, o negativo, es decir, cuando es la explotación N.° 1 la que tiene que pagar a la explotación N.° 2.

Obtenemos así:

$$y \,.\, V = K_1\,(s_1) + (y - s_1)\,.\,P_1\,.$$

Pero no es ésta la única solución posible para la determinación del precio compensatorio V. Sabemos que el beneficio de la explotación N.° 2 puede diferir en una constante del beneficio de la empresa total. Es decir, en las cuentas de la explotación N.° 1 debe aparecer un beneficio constante. Tal beneficio constante, es decir, el beneficio independiente de y y de x_2, será la suma que la explotación N.° 1 ganaría (o perdería) si vendiese en el mercado la totalidad de s_1, es decir, $s_1\,.\,P_1 - K_1\,(s_1)$. Este beneficio lo sumamos a la cantidad que la explotación N.° 1 carga en cuenta a la explotación N.° 2. Tendremos entonces:

$$y \,.\, V = K_1\,(s_1) + y\,.\,P_1 - s_1\,P_1 + s_1\,.\,P_1 - K_1\,(s_1) = y\,.\,P_1$$

$$V = P_1\,.$$

Obtenemos así, como resultado de este apartado, el principio:

XXXVII) Si el bien de la explotación N.° 1 resulta apto para su venta en el mercado, y existe en este último libre concurrencia, el precio compensatorio será igual al precio del

MERCADO. Esta es la solución especial del problema; la general se obtiene por el principio adicional siguiente: EL PRECIO COMPENSATORIO SE PUEDE DIFERENCIAR DEL PRECIO DEL MERCADO EN EL COCIENTE FORMADO POR UNA CONSTANTE ARBITRARIA Y LA CANTIDAD DEMANDADA EN LA UNIDAD DE TIEMPO POR LA EXPLOTACIÓN N.° 2.

Observamos, por tanto, que bajo los supuestos considerados resulta indiferente el que las explotaciones se encuentren relacionadas entre sí o separadas por el mercado.

IV

Si en el mercado del producto N.° 1 existe monopolio (escogemos el caso especial en que el precio sólo depende de la cantidad de su propio bien), el beneficio de mercado de la explotación N.° 1 será:

$$(s_1 - y) \,.\, P_1 (s_1 - y) - K_1 (s_1)$$

donde se obtiene s_1 como función de y, de la condición de que dicho beneficio sea máximo, es decir, de la ecuación

$$(s_1 - y) \,.\, P'_1 (s_1 - y) + P_1 (s_1 - y) - K'_1 (s_1) = 0 \,.$$

Aquí s_1 es independiente de y, es decir, distinto de la velocidad de producción que se realizaría, en caso de que la explotación N.° 1 fuese independiente. Como entonces el beneficio de mercado depende también de y, el precio compensatorio también dependerá de y.

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} y \,.\, V &= K_1 (s_1) - (s_1 - y) \,.\, P_1 (s_1 - y) \\ &= K_1 (s_1) - s_1 \,.\, P_1 (s_1 - y) + y \,.\, P_1 (s_1 - y) \end{aligned}$$

$$V = P_1 (s_1 - y) - \frac{s_1 \,.\, P_1 (s_1 - y) - K_1 (s_1)}{y}$$

$P_1 (s_1 - y)$ es el precio de mercado del bien N.° 1. Es mayor que el precio compensatorio V en la cantidad

$$\frac{s_1 - P_1 (s_1 - y) - K_1 (s_1)}{y}$$

El numerador de esta expresión depende de y; a diferencia de lo que ocurre en el caso de la libre concurrencia no resulta aquí posible ajustar el precio compensatorio al precio de mercado de modo que se fije un beneficio constante para la explotación N.° 1 De forma que en el caso del monopolio, obtenemos en el mercado del bien N.° 1 un resultado completamente diferente al que se daría en el caso de que existiese concurrencia. En el caso de que exista monopolio el precio compensatorio resulta, por consiguiente, totalmente distinto del precio de mercado.

Dicho resultado conduce a una importante consecuencia. Si el precio compensatorio fuese también en el caso del monopolio igual al precio de mercado, la explotación N.° 1 podría producir como si no constituyese una empresa común con la explotación N.° 2, apareciendo con un interés económico independiente. El que no nos encontremos en este caso, quiere decir que el beneficio de la empresa total, es decir, de las dos explotaciones unidas por interés común, es mayor de lo que lo sería la suma de sus beneficios, en el caso de que fuesen independientes entre sí. Podemos formular el principio:

XXXVIII) SI UN BIEN N.° 1 ES UN FACTOR PARA LA PRODUCCIÓN DE UN BIEN N.° 2, ESTANDO MONOPOLIZADO EL MERCADO DEL BIEN N° 1, EL BENEFICIO TOTAL DE LA EMPRESA QUE PRODUCE EL BIEN N.° 1, Y DE UNA EMPRESA QUE PRODUZCA EL BIEN N.° 2, SERÁ MAYOR CUANDO AMBAS CONSTITUYAN UNA EMPRESA ÚNICA QUE CUANDO SEAN INDEPENDIENTES ENTRE SÍ.

V

Para el caso en que la explotación N.° 1 produzca varios bienes, se puede establecer inmediatamente, y con arreglo a la teoría de la oferta conjunta, una analogía con el caso de la oferta simple En tanto que dichos bienes no resulten aptos para su venta en el mercado sólo se podrá construir un precio compensatorio en el sentido de los costes medios. Si los bienes resultan aptos para su venta en el mercado, sus precios compensatorios en el caso de la libre concurrencia serán iguales a los correspondientes precios de mercado (22).

(22) La complicación de todo lo expuesto en este apartado requiere, para su más exacta comprensión, una formulación matemática.

CAPITULO IV

EL DESARROLLO DE LOS COSTES Y LA ESTRUCTURA DE UNA ECONOMIA

La estructura de las curvas de costes es un momento regulador esencial de la producción de una empresa, y como el conjunto de las empresas representa la producción de una economía, la estructura de las curvas de costes constituye, junto con las leyes que de aquéllas se deducen, un elemento muy importante en la construcción del sistema económico-social. El indicar su importancia es la misión de este capítulo final.

La teoría de la producción conjunta, especialmente el principio XXX, nos permite tomar como base para todas las ramas de la producción de una economía el modelo de la producción simple. Las afirmaciones que se hagan sobre una economía, basándose en la hipótesis de la producción simple, no resultan alteradas por el hecho de que también exista producción conjunta sino que, con arreglo al principio citado, sólo es necesario completarlas. Esto nos permite llevar a cabo una gran simplificación en nuestro estudio: Sólo necesitaremos referirnos, de manera explícita, al problema de la producción conjunta, allí donde la relación o proporción entre los productos se convierta, de manera inmediata, en objeto de la teoría.

La complejidad de la materia que vamos a exponer nos obliga a aplicar el método de abstracción. Por consiguiente, vamos a describir, en primer lugar, la situación en la "economía estática", interpretando el concepto "estático" de manera estricta en el sentido de Alfred Marshall (23): los tres factores de producción, el nivel técnico y el nivel de población y de necesidades se suponen aquí constantes. Al principio de nuestro estudio vamos a suponer también que el número y la dimensión de las empresas nos vienen dados de antemano. Investigamos entonces las transformaciones que sufre dicha economía por las fuerzas actuantes inmanentes, en especial aquellas variaciones en la dimensión y número de las empre-

(23) A. MARSHALL: *Ob. cit.*, págs. 369 a 371: "stationärer Staat". Cf. también J. B. CLARK, *Essentials of economic theorie*, 1922, pág. 132: "Imaginary static Society".

sas que conducen a una "estática equilibrada". El primer apartado trata de la tendencia a la concentración inmanente. En el segundo apartado se obtiene, a través de la economía estática, una imagen aproximada de la economía dinámica, por la variaciones de los datos supuestos originariamente como constantes, insistiendo fundamentalmente en la variación de la técnica. El tercer apartado está dedicado al influjo del progreso técnico cuando la dimensión de la explotación es creciente.

1. *La regulación de la economía estática*

I

En el capítulo segundo vimos cómo un cierto nivel general de precios determina la actuación de una empresa. En primer lugar nos vienen dadas la función de costes totales y la función dé ingreso de la empresa (24). El principio fundamental de la producción económico lucrativa —en su aplicación a la economía de concurrencia, es decir (XVI)— determina la velocidad de producción más favorable, y con ella la oferta (25) de la empresa, que es realizada por un vector de gasto bien determinado (26). Este último no representa otra cosa que la demanda practicada por la empresa al nivel de precios supuesto. De modo que el nivel de precios fija la oferta y la demanda de cada empresa. El concepto "precio" lo tomamos ampliamente —en el sentido de Cassel—, incluyendo en él, por tanto, el salario, el interés y la renta. El nivel de precios determina también el "equilibrio individual de cada consumidor, así como su oferta y demanda. Si sumamos las cantidades demandadas de cada bien por las empresas e individuos demandantes, obtendremos la demanda total de dicho bien en la economía social considerada. La totalidad de las cantidades demandadas de todos los bienes las incluimos en el "vector de demanda" (27). De forma análoga obtenemos el "vector de oferta". Ambos dependen del ni-

(24) Cf. cap. 1, apart. 1.°, III.

(25) Cf. cap. 2, apart. 4, II al final.

(26) Cf. PARETO, MANUEL: Cap. III, en especial núms. 106 a 133.

(27) Cf. cap. 1, apart. 1.°, II.

vel de precios supuesto en cada caso o en términos matemáticos del vector del precio (28) supuesto.

Dado un vector de precio cualquiera, los correspondientes vectores de demanda y de oferta serán normalmente distintos. La ley de la concurrencia ocasiona, sin embargo —y esto podemos afirmarlo sin más razonamientos como un juicio seguro de toda la teoría económica moderna—, la aparición de un nivel de precios, en el que la oferta y la demanda resultan iguales entre sí. De la igualación de los vectores de demanda y de oferta obtendremos, pues, matemáticamente la determinación del vector del precio de equilibrio. Esta determinación sólo es unívoca, sin embargo, hasta un factor de proporcionalidad: todos los vectores de precios que sean iguales entre sí hasta un factor de proporcionalidad tienen, por tanto, el mismo vector de demanda y de oferta. Ese factor de proporcionalidad determina la capacidad adquisitiva de la unidad monetaria y dependerá de la creación de dinero.

La igualación de los dos vectores señalados es la condición de equilibrio para nuestra construcción económico social. De este modo se determinan, junto a las relaciones de precios en sentido estricto, todos los ingresos, todas las cantidades demandadas y ofrecidas, todos los beneficios y, en general, la situación económica total de cada empresa y de cada individuo. Dicha situación de cada una de las empresas es —en nuestro supuesto de una dimensión y número arbitrarias— muy diferente. Un sector no produce nada en absoluto, estando parado, ya que los "precios mínimos" de dichas empresas se encuentran por encima de los precios de mercado de sus productos. A estas empresas podemos excluirlas de nuestro estudio; sólo por sus instalaciones tienen importancia para la economía total, de modo que hay que incluirlas dentro de "las reservas que pueden utilizarse en el futuro". Otro sector produce, pero se encuentra con costes regresivos y sufre pérdida; la "cuasi-renta" (en el sentido de Marshall) que produce no resulta suficiente para cubrir los costes fijos. Un tercer sector, finalmente, se encuentra con costes progresivos y obtiene beneficios extraordinarios; a consecuencia de un equipo técnico especialmente moderno, una situación muy favorable, una hábil dirección, etc., el precio óptimo de

(28) Cf. cap. 1, apart. 2.°, IV.

dichas empresas se encuentra por debajo del de mercado; su "cuasi-renta" supera a los costes constantes. Entre los dos grupos últimamente mencionados se pueden también encontrar empresas, cuya velocidad de producción más favorable coincida casualmente con su óptimo.

II

Vamos a prescindir de la hipótesis de que el número y la dimensión de las empresas venga determinado desde fuera. Es decir, tomamos como situación de partida una determinada distribución de las empresas, pero quedando sometida a la acción de las fuerzas económicas, que presenta nuestra construcción económico-social. En este caso podemos afirmar, que el equilibrio que acabamos de caracterizar es sólo un equilibrio a corto plazo —un equilibrio "in the short run". En el momento en que hemos liberado a nuestro sistema de la "ligadura" de una distribución invariable del aparato de producción, se inicia un proceso de transformación primero dentro de cada rama de la producción, y luego entre las ramas de la producción. La fuerza motriz es el espíritu de lucro de cada uno de los individuos integrantes de la economía.

Dentro de cada una de las ramas de la producción, cada empresa aspira a mejorar su aparato de producción, y a incrementar sus "ventajas externas e internas" (Marshall), para aumentar de este modo sus beneficios. Se intenta alcanzar el mejor aparato de producción posible dentro de las circunstancias técnico-sociales existentes. Las máquinas anticuadas son sustituídas por otras nuevas, se introducen nuevos procedimientos de producción, se retira el capital de las empresas que poseen una localización desfavorable y se vuelve a invertir en otras mejor localizadas. Se abandonan aquellas ramas de la producción que ofrecen reducidas posibilidades de beneficios y se buscan aquellas que tienen mejores expectativas; las empresas que no pueden mantenerse al compás de este proceso de transformación quiebran. A las transposiciones de capital se unen desplazamientos de la población. De este modo surge un proceso de transformación mucho más amplio y complicado, que termina por la formación de un equilibrio duradero —un equilibrio "in the long run" (a largo plazo).

Para señalar las tendencias fundamentales de este proceso vamos a aplicar de nuevo el método de abstracción o aislamiento. Primero vamos a descartar la existencia de un cambio en la disposición del suelo, el trabajo y el capital entre las ramas de la producción, suponiendo además que los distintos factores de la producción son homogéneos. La actividad del empresario la consideramos simplemente como una especial forma de manifestación del trabajo. Obtendremos en este caso como resultado final, dentro de cada rama de la producción, una cantidad fija para la renta, el interés y el salario —también el salario del empresario—. No pueden surgir aquí otras clases de ingreso. Los empresarios ganan lo mismo que los trabajadores. Todas las empresas se encuentran igualadas. Todas poseen el más alto nivel técnico posible. El ingreso se puede descomponer totalmente en renta, interés y salario. Si consideramos, lo que resulta necesario, estas tres clases de ingreso como partes integrantes del coste, tendremos que para cada rama de la producción, el ingreso total de cada empresa, será igual a sus costes totales. Podemos formular, por tanto, el importante principio siguiente:

XXXIX) EN EL EQUILIBRIO ESTÁTICO CADA EMPRESA SE ENCUENTRA EN EL ÓPTIMO DE LA EXPLOTACIÓN (29).

Si prescindimos ahora del aislamiento de cada una de las ramas de la producción, se operará un desplazamiento de los factores de producción de una rama a otra, hasta que exista en todas partes la misma cantidad para la renta, el interés y el salario, y se utilice productivamente toda la oferta existente de factores de producción. Lo dicho para cada una de las ramas de la producción resulta válido igualmente para toda la economía social.

El nivel general de precios determina ahora la estructura más favorable de una explotación, o expresándolo de manera más imprecisa pero más corriente, la dimensión de la explotación; ésta podemos caracterizarla, de un lado, por la cantidad invertida de suelo, capital y trabajo, y de otro por la velocidad de producción óptima correspondiente. El nivel de precios determina además la demanda del producto respectivo. La cantidad demandada en la unidad de tiempo, dividida por la velocidad de producción óptima,

(29) Cf. MARSHALL: *L. c.*, Libro V, cap. 11, apart. 6.

nos da el número de empresas; también depende éste, por tanto, del nivel de precios. Como dicho número es siempre una cifra entera, nuestras afirmaciones solamente serán exactamente válidas cuando la cantidad demandada sea precisamente un múltiplo entero de la velocidad de producción óptima. Si suponemos que esta última es relativamente muy pequeña —lo que tenemos que hacer como hipótesis necesaria para la "libreconcurrencia"—, habremos de conformarnos con la inexactitud de una generalización y hacer nuestras afirmaciones sin ninguna restricción. A través del número de empresas que suponemos que constituyen una explotación cada una y que se encuentran produciendo todas en el óptimo de la explotación, se determinan la demanda de trabajo, suelo y capital de cada rama de la producción. Esta demanda la cubre la empresa con la oferta existente de factores de producción. En caso de que no actúe así subirán los precios de los factores de producción más escasos y bajarán los de aquellos que sean más abundantes hasta que se alcance el equilibrio.

Prescindamos, finalmente, de la hipótesis de la homogeneidad de los medios de producción: entonces el trabajo, el capital y el suelo aparecerán como grupos de factores de producción que se encuentran cualitativamente escalonados. La imagen total de la economía se hace más complicada. Las explotaciones de una rama de la producción no son ya iguales entre sí, sino que se diferencian en su localización, calidad de la dirección, etc. Estas diferencias se hacen sentir de tal forma, que aparecen verdaderas rentas de gradación muy variada, que caen en suerte a las empresas favorecidas; tienen su origen en las diferencias de precios de los factores de producción diferentes en calidad y deben ser consideradas, dentro de nuestro sistema, como costes, ya que cada factor de la producción es objeto de la demanda (30). Con ello se mantiene nuestro principio formal (XXXIX).

Este principio conduce a una interesante consecuencia teorética: cada empresa emplea de cada factor de producción una cantidad tal, que la productividad marginal de dicho factor sea igual a su precio. Si se considera la productividad de la empresa como fun-

---

(30) Cf. WALRAS: *Eléments d'économie politique pure*, págs. 175 y siguientes: "Des capitaux et des revenues".

ción del vector de gasto, se puede decir también: que cada empresa realiza un vector de gasto tal, de modo que el gradiente de su función de productividad sea igual al vector de precio del gasto. Como además en el óptimo de la explotación los costes totales son iguales al ingreso total, se obtendrá para el conjunto de la economía social, que en el equilibrio existe una atribución total del ingreso social a los factores de producción con arreglo al principio de la productividad marginal (31).

III

Hemos mantenido, sin embargo, la imagen de una economía de concurrencia estática con la dimensión y el número de explotaciones determinado de manera inmanente. Hemos visto cómo el principio económico lucrativo trae consigo esa determinación. Pero afirmamos que cada explotación debería constituir una empresa independiente. Ahora vamos a prescindir también de esta hipótesis y a preguntarnos si en el sistema de la economía de concurrencia estática existen fuerzas que abandonan el principio de la mayor descentralización posible y tienden hacia una concentración.

Tal fuerza existe efectivamente. Actúa primariamente favoreciendo una concentración horizontal de las empresas, y secundariamente una concentración vertical. Pero dicha fuerza no es en absoluto una coacción contenida en el sistema de la libre concurrencia, sino sólo una tendencia, una "atracción". Se manifiesta en primer lugar por el hecho de que las empresas de una rama de la producción pueden lograr un mayor beneficio, cuando se asocian en un monopolio. Sabemos, de acuerdo con el principio (XXI), que el precio del monopolio es siempre mayor que los costes marginales, mientras que el precio de concurrencia es igual a éstos. Pero el monopolista también podría realizar el nivel de producción más favorable desde el punto de vista de la economía de concurrencia.

---

(31) Cf. Apéndice A, VII. Igualmente: Moore, *Synthetics economics, 1929*, página 145. Se opone Aftalion, *Les trois notions de la productivité et les revenues*. "Rev. d'Ec. Pol." 1911 Mayer, art. "Zurechnung" en: H. d. St., en especial I, 2, c.

Si no lo hace es sólo porque con otro nivel de producción puede alcanzar un beneficio mayor. De aquí que del principio del lucro económico surja, dentro de la rama de producción, una tendencia a la asociación monopolística. Esta tendencia no es una "coacción sistemática", ya que también funciona la economía de concurrencia. La tendencia al monopolio es únicamente un efecto secundario del principio del lucro económico. Esta fuerza hacia la concentración choca con fuerzas internas, que son tanto más intensas cuanto mayor es el número de las empresas que componen una rama de la producción. No tiene por qué imponerse y puede ser, en cierto modo, despreciada, máxime teniendo en cuenta que las fuerzas más importantes que tienden a la concentración aparecen fundamentalmente en la economía dinámica. Además del conocido hecho de que cada monopolio se pueda encontrar amenazado por un disidente, surge una fuerza descentralizadora. Desde el momento en que una rama de la producción es monopolizada, sus precios ofrecen mayores posibilidades de beneficio que otras ramas de la producción, y atraen en medida creciente empresarios a la rama de la producción monopolizada (32).

Al principio no existe una tendencia a la concentración vertical resultante del sistema. Hemos visto (principio XXXVII), que el precio compensatorio de una mercancía apta para su venta en el mercado, es igual al precio de mercado de la economía de concurrencia, y que de una combinación vertical de dos explotaciones dentro de la economía de concurrencia no surge ningún beneficio "sistemático". Pero si una rama de la producción es monopolizada, de acuerdo con el principio (XXXVIII), surge una tendencia a la integración de las explotaciones constitutivas de industrias de transformación. De una concentración horizontal surge como fenómeno secundario la combinación vertical. A ésta se opondrán, por consiguiente, los mismos obstáculos que a la concentración horizontal. Podemos decir, por tanto, que la forma de organización de la economía de concurrencia es relativamente estable; no contiene fuerzas provenientes del sistema que la impulsen a una transformación fundamental.

---

(32) Cf. BARONE, l. c., apart. 158: "Potentielle Konkurrenz".

2. *Los efectos generales de las variaciones dinámicas*

Lo que caracteriza especialmente a nuestra economía estática es la invariabilidad de la población, de los factores de producción y del nivel técnico. Por el "relajamiento" de estas tres "ligaduras" obtenemos una aproximación a la economía dinámica (33). Aplicamos de nuevo el método del aislamiento, suprimiendo la invariabilidad de la problación, después la de cada uno de los factores de producción y, finalmente, la de la técnica.

I

Una alteración de la cifra de población —"ceteris paribus"— puede efectuarse rápidamente dentro de nuestro sector de estudio: sólo supondrá una alteración de la combinación de los bienes producidos. Un aumento de la población significa una reducción o escasez relativa del abastecimiento. Entonces los bienes de demanda inelástica se producirán en cantidad mayor que hasta ese momento (34), y los de demanda elástica (35) en cantidad menor que hasta entonces. Una disminución de la población tendrá un efecto completamente contrario. Está claro que ambas tendencias sólo pueden manifestarse completamente "in the long run", ya que la demolición de las instalaciones existentes que son necesarias en cada caso, requiere cierto tiempo.

(33) J. B. Clark ("Essentials of economic theorie", 1922, págs. 203 a 206), distingue 5 tipos de influencias dinámicas: 1) Crecimiento de la población. 2) Aumento del capital. 3) Variación del método de producción. 4) Variación en la organización de la empresa. 5) Variaciones del gusto. Prescindimos en nuestro estudio de 5); 3) y 4) los incluímos dentro del concepto de "Variación del nivel técnico"; 1) lo dividimos en "Variación de la población" que sólo consideramos al principio como variación de la demanda, y en "Variación del trabajo disponible".

(34) Elasticidad < 1.

(35) Elasticidad > 1.

II

Entre los factores de producción podemos dejar al suelo como constante. Algunas veces es suficiente variar dos factores de producción para obtener las consecuencias más importantes; otras veces, para una economía dada, hay que considerar al suelo en lo esencial como una magnitud invariable. Por consiguiente, sólo vamos a estudiar las variaciones del capital y el trabajo.

Toda alteración de la oferta existente de capital o trabajo altera la relación entre las cantidades de los factores de producción, de donde resulta una alteración en la estructura de la explotación óptima. Surge en cada empresa un proceso de transformación que, por supuesto, sólo repercute "in the long run". Al mismo tiempo se altera —en la hipótesis de que la población sea constante— la situación de abastecimiento de la economía, lo que conduce a un proceso de transformación en las ramas de la producción, que depende de la elasticidad de la demanda de cada uno de los bienes.

1. Un aumento de capital ofrece a cada empresa la posibilidad de obtener mayor capital que antes. A corto plazo —"in the short run"— esto no significa ninguna alteración de la organización de los medios de producción indirectos, sino solamente un aumento de la inversión de capital a corto plazo. Con el transcurso del tiempo se lleva a cabo, sin embargo, en cada empresa una "racionalización" general en el sentido de que la forma de producción se hace más capitalista. La combinación definitiva de los factores de producción hace posible un abastecimiento de bienes de la economía más abundante que el anterior, lo que significa nuevamente un crecimiento de la producción en comparación con la situación existente con anterioridad al aumento del capital disponible.

La característica especial de cada empresa consiste —como ya se ha indicado antes— en el hecho de que realiza el óptimo de la explotación en el equilibrio a largo plazo. Pero aquí resulta válida para cada factor de la producción —lo que se puede demostrar fácilmente (36)— la ley de la productividad decreciente, es decir, las productividades marginales disminuyen al crecer la cantidad

(36) Se deduce de la segunda condición de mínimo para los costes medios.

empleada del medio de producción respectivo. Esto resulta válido tanto "in the long run" como "in the short run". Hay que suponer, por otra parte, que la productividad marginal de un factor crece generalmente tanto "in the short run" como "in the long run", cuando aumenta la cantidad empleada de otro factor de la producción (37), con lo que en último término tiene lugar un fuerte aumento. De aquí se deduce para nuestro caso, que cada empresa alcanza la progresión primeramente por medio de un empleo más intensivo de capital. La productividad marginal del capital disminuye, la del trabajo aumenta. En total, se da un descenso del interés real y un crecimiento del salario real. La empresa obtiene beneficios extraordinarios. A largo plazo —"in the long run"— alcanza cada empresa, por medio de una intensificación general del capital, un nuevo óptimo de la explotación al incrementarse simultáneamente la concurrencia. La productividad marginal del capital (y con ella la del interés real) vuelve a crecer aun cuando no hasta la altura originaria. La productividad marginal del trabajo —y la del salario real— también crecen en general. Los beneficios extraordinarios son absorbidos. La posibilidad de un abastecimiento más abundante del conjunto de la economía requiere una modificación en las distintas ramas de la producción, produciéndose los bienes de demanda elástica en una cantidad relativamente mayor que los bienes de demanda inelástica. En sentido absoluto todas las clases de bienes son producidas en cantidad mayor de lo que lo eran anteriormente. No se puede averiguar, sin embargo, si el número de empresas de cada una de las ramas de la producción ha aumentado o disminuído, ya que sin un conocimiento más exacto de cada una de las funciones de producción no se puede establecer si los nuevos resultados óptimos son mayores o menores que los antiguos. La participación relativa en el producto social que corresponde al trabajo en el proceso de distribución de la economía de concurrencia, ha crecido. El que el ingreso real de los capitalistas haya crecido o disminuído de manera absoluta, depende de la elasticidad de la demanda del capital a corto plazo de la economía, que también viene determinada por el nivel técnico.

---

(37) La razón de esto radica en el hecho de que la relación de complementariedad entre los factores de producción, es mayor que la de sustitución. Un estudio más detenido nos llevaría demasiado lejos.

2. Un aumento de las fuerzas de trabajo disponibles ofrece —"mutatis mutandis"— fenómenos muy análogos a los del aumento del capital. Por tanto, podemos asociar de manera inmediata los resultados. Surge un desplazamiento de los medios de producción de aquellas ramas de la producción de necesidades inelásticas a las de demanda elástica. A corto plazo las empresas abandonan su óptimo de la explotación y entran en un régimen de costes progresivos. Logran beneficios extraordinarios, especialmente aquellas empresas que producen para una demanda elástica. El interés real crece, el salario real disminuye. A largo plazo las empresas se racionalizan en el sentido de establecer una forma de producción con mayor empleo de trabajo, con lo que tambien transforman sus instalaciones. Por consiguiente, alcanzan por la presión de la concurrencia un nuevo óptimo de la explotación. Los beneficios extraordinarios son absorbidos. El salario real crece aun cuando no hasta llegar a la situación de partida. El interés real sufrirá probablemente otro aumento. El abastecimiento de la economía es mayor en conjunto (38). Sin datos más exactos puede averiguarse hasta qué punto el aumento del producto social favorece también el trabajo y cómo varía el número de empresas.

3. Una disminución del capital existente tiene el mismo efecto que un aumento del trabajo disponible, aunque con las siguientes modificaciones. Al principio las empresas se encuentran en un régimen de costes regresivos y sufren pérdidas. El abastecimiento total de la economía es más escaso. Surge un desplazamiento en el sentido de satisfacer, de manera relativamente más abundante, las necesidades inelásticas. En sentido absoluto el abastecimiento de la economía se ha hecho más escaso, incluso después de realizarse la transformación a largo plazo. Pero existe una diferencia esencial

(38) El beneficio extraordinario (o pérdida extraordinaria) surge siempre que la empresa se desplaza del óptimo de la explotación siguiendo un régimen de costes progresivos (o regresivos). Aquí el ingreso efectivo del empresario será mayor (o menor) que su "ingreso normal a largo plazo" (MARSHALL). El beneficio extraordinario es un residuo; el principio de la productividad marginal no determina aquí un cálculo completo. La absorción del beneficio extraordinario no significa un descenso del beneficio del empresario, sino sólo una aproximación a la altura normal a largo plazo (que por la racionalización crece en ciertas circunstancias en una cifra que supera a la del beneficio extraordinario).

frente al aumento del trabajo, y es que al principio crece el interés, pero en la adaptación a largo plazo probablemente disminuye, aun cuando no hasta llegar a la situación de partida.

4. Con arreglo a los conceptos establecidos hasta ahora, se pueden apreciar fácilmente cuáles son los efectos de una disminución de las fuerzas de trabajo disponibles (39).

III

1. Hasta ahora nos hemos ocupado de los efectos de las variaciones cuantitativas, dicho en términos matemáticos: de los efectos de las variaciones de variables independientes. La variación en la situación técnica aparece, por el contrario, como un problema de tipo cualitativo, que ciertamente es cuantificable para determinados fines. Aquí ya no vamos a estudiar variaciones de variables, sino variaciones de la relación funcional. El desarrollo técnico

(39) Añadamos dos observaciones a la cuestión de la generalización de los resultados obtenidos en este apartado:

a) En lo esencial hemos establecido nuestra argumentación partiendo del supuesto de que sólo existan los dos factores de producción capital y trabajo. Los resultados pueden generalizarse sin gran dificultad para el caso en que entren, además, en consideración el suelo y la actividad del empresario. También el supuesto más complicado pero más próximo a la realidad de la composición no homogénea de cada uno de los factores de producción, nos conduce a reflexiones esencialmente análogas. No podemos ampliar estas ideas ya que nos exigirían un estudio especial.

b) En nuestra concepción teorética todas las funciones que aparezcan son, hablando matemáticamente, "funciones de campo variable". Por consiguiente, cuando sólo se trate de comparar la situación de partida y la situación final, podremos aplicar el procedimiento del aislamiento y estudiar sucesivamente los efectos de cada una de las variaciones. Vamos a conformarnos con esto ya que una consideración del "camino" nos llevaría muy lejos. Obtendremos, por ejemplo, el resultado final de un aumento simultáneo de la población y el trabajo, considerando primero los efectos de un aumento del trabajo y luego de un aumento de la población. Cierto que los estudios intermedios de nuestro análisis se alejarán de la realidad. Pero una consideración más detenida requeriría una monografía especialmente dedicada a dicha cuestión.

altera incluso la función de producción. Es de los efectos que de ello resultan de lo que nos tenemos que ocupar.

El progreso técnico (40) significa, considerado económicamente, un mejoramiento de las posibilidades de abastecimiento de la economía. Da lugar a que frente a la situación de partida se pueda lograr la misma o mayor cantidad de bienes con el mismo gasto de factores de producción. Significa, por consiguiente, un desplazamiento general o parcial de las funciones de producción hacia arriba. Su efecto general es un aumento de la producción y, simultáneamente, un desplazamiento en el sentido de producirse un suministro proporcionalmente mayor dirigido a las necesidades elásticas.

El progreso técnico puede hacer crecer las productividades marginales en la misma proporción. No se altera entonces nada en el cuadro de la distribución en régimen de economía de concurrencia del producto social. Pero, en general, el progreso técnico afecta sólo a determinadas ramas de la producción y altera el rendimiento de los factores de producción en diferente medida. De ello surgen cambios, que vamos a estudiar ahora particularmente.

Cuando el progreso técnico sólo ha afectado a una rama de la producción, esto significa que con la cantidad de trabajo, capital y suelo empleado hasta ahora se puede lograr una cifra de producción mayor. El abastecimiento del producto es aquí inversamente proporcional al aumento del producto. La repercusión definitiva es distinta, según sea la elasticidad de la demanda del producto en cuestión. Si la demanda es inelástica, una parte de los medios de producción dejan de aplicarse en dicha rama de la producción. El abastecimiento de otros bienes se hace más abundante. Si la elasticidad de la demanda es igual a 1, no se produce ningún cambio en los factores de producción. Si la demanda es elástica, la rama de la producción racionalizada atrae nuevos medios de producción

(40) El concepto "progreso técnico" debe entenderse en sentido muy amplio. Se considera "progreso técnico" cualquier mejora en el método de producción. Corresponden, por consiguiente, a dicho concepto tanto los descubrimientos e inventos ocurridos en el dominio de las ciencias naturales y de la técnica como la mejora de la organización, de la localización, del sistema de ventas, etc.

a costa de otras ramas de la producción. El abastecimiento de otros bienes se hace más escaso.

Las variaciones, que el progreso técnico origina en el efecto conjunto de los factores de producción, no producen (41), dentro del conjunto de la economía social, ninguna alteración de la proporción en que se encuentran combinados el trabajo, el capital y el suelo, ya que en la economía de libre concurrencia sólo en los casos límites resulta posible que queden factores de producción improductivos. De esas variaciones surge una alteración de las productividades marginales, y con ello en el cuadro de la distribución económico-social.

Todo mejoramiento técnico se puede explicar como un aumento de los factores de producción. Con lo que, de acuerdo con las explicaciones anteriores, se pueden valorar de manera inmediata los efectos. El invento de máquinas que ahorren trabajo significará, por ejemplo, que se pueda producir el mismo producto con un menor empleo de trabajo. En consecuencia, el trabajo, en comparación con el capital y con el suelo, aparecerá en mayor abundancia. Surgen los efectos ya comentados de un aumento de la mano de obra: baja de salarios, desplazamiento de factores, etc. La introducción de un nuevo método de cultivo del suelo, por ejemplo, una mejora en la alternación de cultivos, producirá el mismo efecto que un incremento en la cantidad de suelo disponible. El empleo de máquinas más económicas que tengan el mismo rendimiento, por ejemplo, de máquinas suministradoras de fuerza motriz que resulten más baratas, es similar a un aumento de capital; los efectos resultan visibles en las explicaciones anteriores y no es necesario volver a analizarlos aquí de nuevo. Vemos, por tanto, que el progreso técnico no plantea ningún nuevo problema.

2. Mayor importancia reviste para nosotros el problema del influjo del progreso técnico sobre la dimensión de la empresa. Por la variación de la función de producción se desplaza el lugar geométrico de los puntos de una atribución total, que, como se ha señalado, es una propiedad esencial del óptimo de la explotación. Con lo que se desplaza también el óptimo de cada combinación de

(41) Si para simplificar se supone, como hace CASSEL, una oferta de factores de producción que sea independiente de los precios.

producción, surgiendo de este modo una situación totalmente nueva.

El progreso técnico puede ejercer fundamentalmente dos efectos que alteren la dimensión óptima de la explotación. El progreso técnico puede disminuir o aumentar esta última, es decir, la cifra de producción óptima puede ser menor o mayor. Si el óptimo de la explotación es menor, surge una tendencia a la creación de nuevas explotaciones, que concurren especialmente con las antiguas empresas. De aquí que surja simultáneamente para las antiguas empresas una fuerza que las obligue a practicar la racionalización y a adaptarse a la dimensión de la explotación reducida. Como resultado final, la racionalización se practicará en todas partes. Como la cifra de la producción óptima ha disminuído y, por el contrario, la producción total de la rama de producción en cuestión se ha elevado, el último efecto es que el número de las explotaciones ha aumentado. La tendencia mencionada a la creación de nuevas empresas no tiene, por tanto, sólo la función de incrementar la racionalización —que viene ya dada por el espíritu de lucro de la economía de competencia—, sino también la de aumentar correspondientemente el número de las explotaciones existentes. Si partimos de la hipótesis de que al principio no se crean nuevas explotaciones, habrá que añadir posteriormente nuevas explotaciones al realizarse la racionalización de las antiguas. Por consiguiente, podemos afirmar que un progreso técnico que se encuentre vinculado a una disminución de la dimensión de la explotación, se manifiesta en una cierta rama de la producción a través de un proceso simétrico. Las empresas presentan en el primer estadio en parte beneficios extraordinarios y en parte pérdidas, que, finalmente, se compensan en la medida en que se haya producido la racionalización. La desaparición de explotaciones a consecuencia del progreso técnico sólo ocurre, en general, cuando las nuevas empresas creadas aparecen en número mayor del necesario. En su conjunto, la renovación técnica en el caso que acabamos de estudiar, produce un alza continua.

Algo distinto ocurre cuando el progreso técnico se encuentra vinculado a un aumento del óptimo de la explotación. También aquí produce la renovación técnica una tendencia a la racionalización de las explotaciones existentes, que se encuentra fortalecida por las tendencias a la creación de modernas explotaciones. Como efecto final, sin embargo, siempre que el aumento del óptimo de la explotación no sea de poca consideración, se produce una disminución en el número de las empresas de la rama de la producción en cuestión. La creación de nuevas empresas y su transformación surge en primer término como consecuencia de un alza. La posibilidad de una producción racional lleva a que se obtengan beneficios extraordinarios y ocasiona una competencia entre las empresas. La baja de los precios originada por el aumento de la oferta, absorbe finalmente los beneficios. Pero, sin embargo, la racionalización es mantenida hasta el final, ya que, por lo menos, hace mínima la pérdida. Surge aquí, sin embargo, una coacción que obliga a desaparecer a las explotaciones y que se mantiene hasta que se haya alcanzado el número correcto de éstas. El nivel de precios baja de modo que las explotaciones más débiles tienen que dejar finalmente de funcionar y desaparecer del proceso de producción. Por tanto, el progreso técnico produce, al aumentar el óptimo de la explotación, en primer lugar, un alza que hace que la explotación se amplíe, y luego, una baja que reduce el número de las explotaciones.

Este es a grandes rasgos el efecto del progreso técnico sobre la dimensión y el número de empresas. Una investigación más profunda se encuentra fuera de los límites de nuestro trabajo. Pero sí nos interesa especialmente un problema, que se deduce de la cuestión tratada anteriormente, a saber: el efecto del aumento de la dimensión óptima de la explotación sobre la organización económico-social de la producción, en tanto que esta conexión se dé en virtud de las leyes formales de los costes. A este problema se encuentra dedicado el apartado final.

3. *La influencia del progreso técnico sobre la forma económica*

Mientras que la disminución de la dimensión óptima de la explotación no afecta a la organización de la producción en el régimen de concurrencia, cuando crece el óptimo de la explotación ocurre algo distinto. Como el crecimiento del óptimo de la explotación es una propiedad característica del desarrollo económico que hemos llevado a cabo hasta ahora, resulta conveniente un estudio exacto de las transformaciones del aparato de producción de la economía social que se encuentren vinculadas con aquél. Anticipemos al estudio propio del problema una breve investigación teórica previa sobre el llamado "polipolio".

I

En sentido estricto, nuestra consideración de la economía de concurrencia se basa en los siguientes supuestos:

1.—La producción de una explotación aislada resulta, en la práctica, infinitamente pequeña comparada con la producción total de la rama de la producción correspondiente.

2.—El número de las empresas que concurren es, en la práctica, infinitamente grande.

3.—La función del precio resulta, por tanto, para cada explotación prácticamente una constante.

Estrictamente consideradas, estas hipótesis no coinciden con la realidad. Pero expresan las relaciones fácticas con tanta mayor exactitud cuanto mayor es el número de las explotaciones y, por consiguiente, de las empresas. Al mismo tiempo hacen posible una simplificación mayor de la investigación teorética. Pero, de todos modos, nos podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Cómo se estructura la regulación económica de la producción cuando el número de explotaciones viene dado y no es muy grande? La respuesta general a esta pregunta sólo se puede dar, a consecuencia de la complicación de las relaciones y conexiones que aparecen, en términos matemáticos. Sin embargo, en primer lugar nos podemos ocupar de responder a la pregunta en el caso en que sólo existan dos concurrentes, es decir, en el llamado caso del "duopolio". Nos remitimos aquí a los conceptos teóricos ya obtenidos, y prescindimos de nuestras propias deducciones.

Se trata del "estadio *intermedio*" *mencionado anteriormente* en la nota 1. Citemos, en nombre de todos, a Kurt Sting. En su monografía allí citada trata la cuestión de manera sencilla y correcta, pero, en nuestra opinión, no es acertado en lo que se refiere a la importancia que concede a cada problema. La idea fundamental es la siguiente: Sean A y B dos productores del mismo bien. Partimos, en primer lugar, de la hipótesis de que cada uno considera la oferta del otro como una cantidad fija con la que tiene que conformarse. A fijará, para cada una de las ofertas de B, una oferta con la que pueda conseguir el mayor beneficio posible; lo mismo resulta para B. Por consiguiente, para cada uno su oferta aparece como función de la oferta del otro. Si consideramos las cantidades ofrecidas por A y B como las dos incógnitas, obtendremos entonces en esas funciones de "reacción" las dos ecuaciones, de las que podremos obtener claramente las dos incógnitas. Con lo que, aparentemente, se dará el equilibrio económico (designado por Sting como la "formación del precio polipolítico"). Pero éste no es el caso en realidad. Supongamos una completa "transparencia del mercado"; entonces tendrá que surgir, por ejemplo en A, una tendencia "hiperpolítica" (en el sentido de Sting): A no basará su función propia en su oferta sino en la función de reacción de B, porque entonces tendrá mayores posibilidades de beneficio. Como sabe que B considera su oferta (A's) como un dato, escogerá de todas las combinaciones que se presenten a B, con arreglo a su función de reacción (B's), aquélla que para él (para A) sea la más favorable. Realizará, pues, en general, una oferta distinta de la que correspondería a su propia función de reacción. B intenta proceder del mismo modo. Es decir, cada uno busca la manera de imponer al otro su oferta como invariable. En tal situación resulta imposible alcanzar el equilibrio. Cada uno intenta, por así decirlo, empujar al otro fuera de su función de reacción; se inicia entonces una lucha que tiene que terminar con el sometimiento o destrucción de uno de los adversarios en el caso de que no se llegue a ningún acuerdo. Vemos, por tanto, que un duopolio no conduce a ningún equilibrio mecánico (42).

---

(42) Este problema ha hecho surgir una interesante controversia en el seno de la ciencia. COURNOT ha sido el primero que lo ha tratado, partiendo tácitamente de las hipétesis de que cada uno de los dos oferentes considera como una magnitud dada la oferta del otro; de la otra posibilidad no se ocupó. Sobre este punto actuó la crítica de BERTRAND, EDGEWORTH, MARSHALL y PARETO, repudiando, casi totalmente, el proceso demostrativo de COURNOT, sin que se examinase, por cierto, con suficiente claridad el problema de las hipótesis. WICKSELL y SCHUMPETER tampoco tratan correctamente este problema al apro-

Bajo los supuestos de Cournot (hechos implícitos) resulta posible el equilibrio; entonces cada una de las dos empresas se comporta como si no pudiese influir sobre la oferta de la otra, considerándola como un "dato". Vamos a designar a esta situación con el nombre de "duopolio de Cournot". Resulta posible, además, un equilibrio cuando una de las empresas, por ejemplo A, considera como un dato la oferta de la otra (B), mientras que la empresa B se comporta "hiperpolíticamente", es decir, aprovecha la transigencia de A y realiza una oferta que en las circunstancias dadas proporciona el más alto beneficio posible. El equilibrio no resulta posible, sin embargo, cuando las dos empresas se comportan "hiperpolíticamente", situación que vamos a designar con el nombre de "duopolio de Pareto".

Si solamente se diesen las dos posibilidades del duopolio de Pareto y del duopolio de Cournot, se podría asentir con los partidarios de Cournot, que prácticamente, cuando los participantes aprecian correctamente la situación en su conjunto, sólo aparece el duopolio de Cournot, ya que el intento de practicar un comportamiento "hiperpolítico" no puede conducir a ning;ún resultado razonable. De hecho existe para cada empresa la posibilidad de un aprovechamiento "hiperpolítico" de los concurrentes. Si A renuncia a los intentos "hiperpolíticos" y se conforma con el beneficio menor, no existirá el más mínimo motivo para que B renuncie, por su parte, a aprovecharse de la "ingenuidad" de sus concurrentes y a aumentar su beneficio por encima de las posibilidades del "duopolio de Cournot". No queda, por tanto, hablando en términos teoréticos, más posibilidad que la de negar al principio del lucro económico la capacidad para establecer un equilibrio mecánico en el

---

bar la solución de COURNOT, lo mismo ocurre con SCHNEIDER. Amoroso, aunque percibe la diversidad de las premisas, desprecia la posibilidad e importancia de la lucha de concurrencia últimamente caracterizada. KURT STING ha tratado el problema recientemente de modo satisfactorio. Estudia claramente las hipótesis, aunque debería dar mayor importancia a la "formación del precio poly-político", es decir, al duopolio de COURNOT, y restársela a la realidad del "hyperpolítico". Para literatura sobre la materia: Cf. la monografía de KURT STING, citada anteriormente, que ofrece una buena información bibliográfica. Recientemente: ERICH SCHNEIDER, "Reine Theorie monopolisticher Wirtschaftsformen Tubinga, 1932". (Beiträge zur ökonomischen Theorie: 4.)

caso del duopolio. Los concurrentes tienen que llegar a un acuerdo; tienen que completar, por medio de la política económica, la mecánica económica, que en este caso no resulta suficiente.

La diferencia fundamental entre el duopolio de Cournot y el de Pareto sigue subsistiendo cuando se supone que no son dos sino varias las empresas que concurren. Entonces sustituiremos la palabra "duopolio" por la denominación "polipolio". Dejamos fuera de consideración las interesantes complicaciones del problema que puedan surgir. Lo que sí tiene importancia para nosotros es la siguiente afirmación: cuanto mayor sea el número de empresas aproximadamente iguales, tanto menos se diferenciará el polipolio de Pareto del de Cournot, y éste de la situación de libre concurrencia. El beneficio adicional, por tanto, que podrían obtener las distintas empresas con una conducta hiperpolítica frente al polipolio de Cournot, siendo creciente el número de concurrentes, es cada vez menor; igualmente disminuye también el beneficio adicional del polipolio de Cournot frente a la libre concurrencia. Dicho en otras palabras: En último término, a la empresa le resulta indiferente intentar influir sobre la oferta de sus concurrentes y el precio o sólo sobre el precio o sobre ninguno de ambos. La diferencia en el beneficio es tan pequeña que no puede traer consigo otras alteraciones del sistema; simultáneamente, la diferencia entre las cantidades ofrecidas en el polipolio de Pareto (43), en el polipolio de Cournot y en la libre concurrencia, es cada vez menor. De este modo se alcanza prácticamente el equilibrio en la libre concurrencia con tal de que el número de empresas sea suficientemente grande.

II

1.—La necesaria disminución, desde el punto de vista dinámico, del número de empresas de una rama de la producción, tiene que

(43) En el polipolio de PARETO cada uno intenta ofrecer una cantidad determinada e imponérsela al otro como magnitud invariable. La suma de dichas cantidades es la oferta total del polipolio de PARETO, que conforme a su naturaleza implica pérdidas para todos los concurrentes, por lo que sólo puede mantenerse de modo transitorio.

conducir finalmente a un punto en el que aparezca el problema del polipolio. Los hábitos, la complicación del mercado, las dificultades de cálculo, etc., podrán, al principio, desplazar dicho punto. Pero en cualquier momento puede aparecer el problema. Resulta completamente posible el que a lo primero sólo aparezca el polipolio de Cournot, porque su diferencia con respecto a la libre concurrencia es quizá mayor que la diferencia del polipolio de Pareto respecto al de Cournot. Seguirá existiendo entonces un equilibrio; pero el principio fundamental de la producción económico-lucrativa no se cumple ya desde el punto de vista de la economía de la concurrencia. Ahora el precio resulta para cada empresa mayor que los costes marginales. Como, por otro lado, después de realizar las operaciones de resta, ninguna rama de la producción puede alcanzar un beneficio extraordinario con respecto a la otra, siendo, por lo tanto, el precio igual a los costes medios, llegamos al interesante resultado de que el tránsito al polipolio trae consigo el que las empresas se salgan del óptimo y entren en la zona de regresión. Esto sólo resulta posible cuando la curva de oferta individual, es decir la función de oferta, con que cada empresa tiene que enfrentarse en el polipolio, sea tangente a la curva de costes medios en un punto que se encuentre a la izquierda del óptimo y siga en el resto una trayectoria por debajo de la curva de costes medios. Como la velocidad de producción más favorable del polipolio de Cournot resulta menor que la óptima, el número de empresas se determinará de manera diferente a como se hace en el caso de la libre concurrencia.

Cada empresa obtiene un beneficio que resulta mayor del que se podría obtener en la misma rama de la producción, existiendo el mismo número de empresas, en régimen de libre concurrencia. A su vez, el beneficio del polipolio no es mayor que el beneficio que alcanzan las empresas en otras ramas de la producción, organizadas en régimen de economía de concurrencia. Si lo fuese, la rama de la producción polipolítica atraería empresarios hasta que se hubiesen igualado en todas partes las posibilidades de beneficios. Inversamente algunas empresas abandonarían dicha rama de producción cuando ésta no fuese regulada con arreglo al principio polipolítico, sino siguiendo el principio de la economía de la concurrencia. Se dirigirían a otras ramas de producción, con lo que bajaría en toda la línea el precio de los servicios del empresario, es decir, el ingreso normal del empresario. El tránsito de la concurrencia absoluta al polipolio tiene, por tanto, para el conjunto de la economía social el mismo efecto que una disminución de los servicios del empresario. Cuanto mayor número de ramas de producción se desplacen hacia el polipolio, tanto mayor será la participación de los empresarios en el producto social. Esto resulta válido en primer lugar para el monopolio. El principio económico lucrativo produce en el polipolio (y también en el monopolio) un resultado menos racional desde el punto de vista de la economía política que en la libre concurrencia, lo que ya es bien común de la teoría desde Cournot.

2.—Una disminución subsiguiente de número de empresas conduce, tarde o temprano, al polipolio de Pareto. Aquí falla el mecanismo del lucro económico. Aparece una fuerza que empuja irremediablemente hacia un acuerdo, cualquiera que sea la forma que éste adopte, ya sobre la base de la igualdad de derechos, lo que correspondería a la figura del cártel, ya bajo la fórmula de la subordinación o de la supra ordenación, determinando una empresa, "hiperpolíticamente", la situación del mercado como consecuencia de haber sojuzgado a las demás. Cuando existe un gran número de empresas aproximadamente iguales, el cártel es la solución más probable. Lo que hace posible, con arreglo a su grado de rigidez, que llegue a dominar monopolísticamente el mercado. Esto implica la paralización del mecanismo de la concurrencia que cesa, por tanto, de regular la producción. La interrelación económica de mercado que existe entre la dimensión de la empresa y el número de estas últimas desaparece en la misma medida en que la concentración horizontal adopte formas rígidas. Finalmente, el problema de la dimensión de la empresa y del número de explotaciones quedará sometido a los puntos de vista existentes dentro de la asociación general; éstos pueden ser determinados ya extraeconómicamente, ya tomando como base un cálculo y una rentabilidad que resulten válidos para la asociación general; en último caso, la más racional producción total tenderá, por supuesto, a ponerse al servicio de un lucro monopolísticamente organizado.

3.—El proceso dinámico que acabamos de caracterizar encierra formalmente determinadas tendencias no sólo hacia la concentración horizontal, sino también hacia la concentración vertical. En el polipolio de Cournot aparece ya una tendencia dimanante del principio del lucro que impulsa a la unión de las explotaciones que producen los bienes de orden más inferior. Y el principio XXXVIII señala que en el caso del monopolio, es decir, siempre que el precio dependa de la cantidad ofrecida por cada una de las empresas, resulta más ventajosa una concentración vertical. Esta tendencia a la concentración vertical será tanto más intensa cuanto más avance la concentración horizontal. Al principio sólo es una "atracción" que sigue al espíritu de lucro, no una coacción sistemática. Esta se dará, sin embargo, cuando se supone que en dos ramas de la producción separadas el desarrollo técnico conduce a la concentración horizontal. Los cártels que surgen de ella no pueden contratar entre sí con arreglo a un equilibrio mecánico. Surgirá una lucha por el poder, ya que cada miembro intentará someter a los otros a su oferta de precio. El resultado es la necesidad de un acuerdo; la concentración vertical viene impuesta de manera sistemática.

III

Un crecimiento subsiguiente de la dimensión de la explotación se convierte, pues, en asunto interno de las asociaciones horizontales. Cuanto más intensa es la centralización tanto más pronto se podrá considerar a cada rama de la producción como una empresa gigante, única que puede ser caracterizada en su composición empresarial como un "sistema de baterías paralelamente conectado". Aquí cada explotación elemental es óptima. La diferencia decisiva con respecto a la economía de concurrencia reside en el hecho de que el principio del lucro no garantiza ya la productividad de la economía, sino que la contrarresta.

La tendencia hacia una centralización más rígida se hace tanto más intensa cuanto mayor se haga la dimensión óptima de la explotación en el curso del desarrollo técnico y cuanto más se aleje ésta de la dimensión de la explotación existente que ha quedado anticuada bajo la protección del cártel. La asociación económica se convierte en una unidad económica. La última consecuencia del crecimiento del óptimo de la explotación aparece cuando la producción más favorable de la explotación óptima alcanza o sobrepasa a la producción total de la rama de la producción correspondiente. Surge entonces, a largo plazo, una empresa gigante que sólo consta de una única explotación gigante. Esta, al principio, sólo realizará su óptimo de modo aproximado. Si éste sigue creciendo, la empresa alcanzará finalmente costes regresivos en medida creciente o entrará dentro del sector de la productividad creciente (44).

Si el progreso técnico conduce en todas las ramas de la producción a un crecimiento continuo de la dimensión óptima de la explotación, el resultado de una concentración de todo el aparato de producción de una economía es que éste se convierta en un organismo que sólo obedece a un interés y que, por tanto, se puede

---

44) Lo establecido en este apartado completa el principio XVII. En unión de dicho principio todo lo dicho puede servir de base para criticar algunos conceptos teoréticos:

a) Así, por ejemplo, carecen de sentido los diagramas que aparecen en el manual de A. Marshall, figs. 24, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35. Ya que descansan, en parte, en hipótesis de la economía de concurrencia (por ejemplo, al considerar que el punto de intersección de las curvas de oferta y demanda es el punto de equilibrio) y en parte en hipótesis que resultan inconciliables con la economía de concurrencia (por ejemplo, curvas de oferta descendentes). Sólo resultan válidos dichos diagramas si se considera la curva de demanda no como curva del precio, sino como curva de los costes marginales. Y refiriendo el fenómeno, en lo demás, al monopolio.

b) Cassel (Th. pág. 86 a 88) establece como segundo principio suplementario de su formación de los precios lo siguiente: "Cuando al aumentar la venta resulta posible producir más barato, es decir, cuando al aumentar el volumen de producción descienden los costes medios del producto referentes a la producción total, en la situación de equilibrio el precio del producto debe ser igual a los costes medios de producción. Este postulado corresponde al principio de la cobertura de las necesidades, pero es incompatible con el principio del lucro en la libre concurrencia. Claro que como se ha señalado antes para la empresa en libre concurrencia resulta válida la igualdad entre el precio y los costes medios. Estas empresas siguen, sin embargo, la ley de la productividad decreciente. La ley de la productividad creciente en la economía lucrativa sólo resulta posible en el monopolio. Aquí, como se ha indicado, resulta formalmente válida la igualdad entre el precio y los costes medios, pero sólo porque en la situación de equilibrio también hemos de considerar como integrante del coste al precio de las prestaciones del empresario, indiferentemente de que se trate de un precio de concurrencia o de monopolio.

considerar como una empresa. Dentro de esta empresa resulta válido, como se señaló en la teoría del precio compensatorio, el principio de la cobertura de las necesidades.

Esta empresa total dentro de la economía, significaría una integración de todos los órganos de la economía en cuestión, ya que bajo la presión de la tendencia general hacia el monopolio también las restantes ramas de la producción que pudiesen concurrir, tenderían hacia el monopolio. Esto resulta también válido para los oferentes de los factores de producción. Esta empresa total, concebida formalmente, en la realidad no representa otra cosa que una función del Estado que intervendrá en el proceso económico de producción y distribución en la misma medida en que se produzca la concentración. Al Estado le queda también reservado, en el caso de un cambio en el desarrollo técnico en el sentido de una disminución en la dimensión de la explotación (que resulta tan probable como el de la ampliación de la explotación), el introducir una organización en régimen de concurrencia del aparato de producción, cosa que ahora resulta otra vez posible.

APENDICE

A. APENDICE MATEMATICO

A continuación se encuentran completadas con desarrollos analíticos las demostraciones utilizadas en el texto.

I.—*El óptimo de la explotación*

(Cap. 2, apartado 2.)

1.—La velocidad de producción óptima p viene definida por el hecho de que sus costes medios son mínimos; p se deduce de la ecuación:

$$\frac{d\,K^*}{d\,x} \{ p \} = 0$$

o como $K^* = \frac{K}{x}$, de la ecuación

$$\frac{K'(p)}{p} - \frac{K(p)}{p^2} = 0 ,$$

de donde, después de algunas transformaciones, se obtiene:

$$K'(p) = K^*(p) . \qquad [1]$$

Este es el principio fundamental del óptimo de la explotación (principio I).

2.—Para el óptimo de la explotación resulta válida, con arreglo a la definición, la condición de mínimo:

$$\frac{d^2\,K^*}{d\,x^2} \{ p \} > 0 . \qquad [2]$$

Pero:

$$\frac{d^2 K^*}{d x^2} = \frac{K''(x)}{x} - \frac{2 [K^1(x) - K^*(x)]}{x^2} .$$

Teniendo en cuenta [1], resulta:

$$\frac{d^2 K^*}{d x^2} \{ p \} = \frac{K''(p)}{p} .$$

Con lo que: [2] es equivalente a

$$K''(p) > 0 \qquad [3]$$

La desigualdad contiene al principio II.

Si son varios los valores de x que cumplen las condiciones [1] y [3], p será aquél, entre dichos valores, a que corresponda el valor mínimo de la función K^*.

3.—Según la definición de K, K_I y K_{II} resulta:

$$K(x) = K_{II} + \int_0^x K'(\xi)\, d\xi .$$

Teniendo en cuenta [1], tendremos:

$$p \,.\, K'(p) = K_I + \int_0^p K'(\xi)\, d\xi .$$

Como para $x = b$, $K(x)$, por definición, se hace mínimo, resultará:

$$K'(x) \geqq K'(b) .$$

Y con ello

$$\int_0^p K'(\xi)\, d\xi \geqq \int_0^p K'(b)\, d\xi = p \,.\, K'(b) .$$

Obtenemos así:

$$p \,.\, K'(p) \geqq K_I + p \,.\, K'(b)$$

o

$$K'(p) - K'(b) \geqq \frac{K_I}{p} .$$

Como para $x = b$ la función K′ crece, será $p > b$, y precisamente en una cantidad tal que un crecimiento de $K'(b)$ a $K'(p)$ requiere como mínimo $\frac{K_I}{p}$.

4.—Vamos a formular analíticamente los supuestos del principio III para poder demostrarlo. Son éstos:

α) $K''(x)$ existe y es continua para $x \geqq 0$ (continuidad).

β) $\operatorname{sign} K''(x) = \operatorname{sign}(x - b)$ (regularidad).

El aserto vendrá entonces en la siguiente forma:

$$\operatorname{sign}[K'(x) - K^*(x)] = \operatorname{sign}(x - p) . \qquad [4]$$

Vamos a considerar primero la función.

$$f(x) = x[K'(x) - K^*(x)] = x . K'(x) - K(x) .$$

Tenemos:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} \frac{f(x)}{x} = \operatorname{sign}[K'(x) - K^*(x)] .$$

Nuestro enunciado quedará demostrado cuando hayamos demostrado la ecuación

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x - p) .$$

Tenemos, además, que:

$$\lim_{x \to 0} K_I^*(x) = \lim_{x \to 0} \frac{K(x) - K(0)}{x} = K'(0) . \qquad [5]$$

Con lo que obtenemos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x . \lim_{x \to 0} K'(x) - \lim_{x \to 0} K(x) = - K_I .$$

Si hacemos $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$, con lo que $f(x)$ será también continua para $x = 0$, obtendremos:

$$f(0) = -K_1 < 0. \qquad [6]$$

Resulta, además:

$$\frac{d f(x)}{d x} = x \, . \, K''(x) \, . \qquad [7]$$

Como consecuencia de la hipótesis β), f (x) es monótonamente decreciente para $x < b$ y monótonamente creciente para $x > b$, y tendrá un mínimo para $x = b$. En virtud de [6], $f(x)$ es negativa para $x < b$. Teniendo en cuenta [1], será $f(p) = 0$, y consecuentemente, en virtud de [7] positiva para $x > p$ y negativa para $b < x < p$. $f(b)$ es negativa como mínimo que es de valores también negativos. Resulta, por tanto:

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign}(x - p) \, .$$

Con lo que queda demostrado el enunciado [4].

5.—El principio III contiene al principio IIIb. De una sencilla reflexión se deduce que también las empresas con un incremento constante de la productividad siguen un régimen de costes regresivos. Como hipótesis tenemos aquí: $K'(x) =$ constante. Resulta, por tanto:

$$K(x) = K_1 + \int_0^x K' \, d\xi = K_1 + x \, . \, K'$$

$$K^*(x) = \frac{K_1}{x} + K'$$

$$K'(x) - K^*(x) = -\frac{K_1}{x} < 0 \, .$$

II.—*El mínimo de la explotación*

(Cap. 2, apartado 3.)

1.—La ecuación característica resulta para q por motivos análogos que para [1], y dado que $K'(x) = K' \quad (x)$:

$$K'(q) = K^*_{II}(q)\,. \tag{8}$$

Esta ecuación expresa el principio IV.

2.—La desigualdad [2] corresponde aquí a la desigualdad:

$$\frac{d\,x^2}{d^2\,K^*_{II}} \left\{ q \right\} > 0\,. \tag{9}$$

De ésta resulta, lo mismo que de la desigualdad [3], la desigualdad:

$$K''(q) > 0\,. \tag{10}$$

Este es el enunciado del principio V.

3.—El principio VI queda demostrado por el desarrollo [5].

III.—*La oferta de la empresa según el principio del lucro*

(Cap. 2, apartado 4.)

1.—La velocidad de producción más favorable s hace máximo por definición al beneficio. Tendremos, por tanto:

$$G'(s) = E'(s) - K'(s) = 0$$

o

$$E'(s) = K'(s)\,. \tag{11}$$

Este es el teorema fundamental del principio del lucro económico.

2.—La segunda condición de máximo para G es la siguiente:

$$G''(s) < 0\,. \tag{12}$$

Es decir: $G'(x)$ es descendente en el entorno de $x = s$ o en virtud de [11], positiva para $x < s$ y negativa para $x > s$. Para un entorno de s suficientemtnte pequeño resulta válido, por tanto, el principio XI.

3.—El principio XIII se demuestra como sigue:

Con arreglo a sus hipótesis, resultaría válida para todos los valores de x la desigualdad:

$$E'(x) - K'(x) = G'(x) < 0 . \qquad [13]$$

La función del beneficio disminuye siendo x creciente monótonamente. Su máximo se encuentra, por tanto, en $x = 0$. La empresa encontraría su situación más favorable al dejar de funcionar. Entonces sufriría una pérdida mínima, a saber K_I.

4.—Como $K_{II} = K^2$, [11] puede ser sustituído por la ecuación

$$E'(s) = K_{II}(s) . \qquad [14]$$

Obtenemos así el principio XV.

5.—En la libre concurrencia, el precio P es independiente de x. Entonces será $E(x) = x . P$ y $E'(x) = P$. [11] es sustituído aquí por:

$$P = K'(s) . \qquad [15]$$

[15] es el principio XVI. De [12] se obtiene:

$$K''(s) > 0 . \qquad [16]$$

De aquí se deducen los principios XVII y XVIII.

6.—En el caso del monopolio, el precio del bien producido y ofrecido por la empresa es una función monótona decreciente de la velocidad de producción. Resulta, por tanto:

$$P'(x) < 0 . \qquad [17]$$

De [11] se deduce:

$$K'(s) = P(s) + s . P'(s) . \qquad [18]$$

Si designamos a la cantidad absoluta $|P'(x)|$ de $P'(x)$ como la pendiente de la función de demanda, resultará en virtud de [17] y [18]:

$$K'(s) = P(s) - s \,.\, |P'(s)|. \qquad [19]$$

Este es el contenido del principio XX.

Podemos obtener otra formulación de este principio si aplicamos el concepto corriente de la elasticidad de la demanda que se utiliza en la teoría económica. No vamos a obtener la expresión analítica para la medida de la elasticidad, sino que la sacamos directamente del manual de A. Marshall (1). Marshall lo formula de la siguiente manera: $\frac{dx}{x} : \frac{-dy}{y}$, en donde x es la cantidad del bien, es decir, idéntico a nuestra x, e y el precio, es decir, idéntico a nuestra P. En nuestra formulación la expresión de la elasticidad es: $\frac{dx}{x} : \frac{-dP}{P}$. Esta expresión la denominamos simplemente con el nombre de "elasticidad" (2); asignándole el símbolo ε. ε es una función (3) de x:

$$\varepsilon(x) = \frac{dx}{x} : -\frac{dP}{P} = -\frac{P(x)}{x \cdot P'(x)}. \qquad [20]$$

(1) A. MARSHALL: *Manual*, pág. 685. Cf. también DALTON: *The inequality of incomes*, págs. 192 y sigs.

(2) Cf. también BOWLEY, l. c., págs. 32 a 33.

(3) Por la integración de esta ecuación diferencial se obtiene, para la llamada "economía sintética", una importante expresión analítica para la función del precio. A continuación ofrecemos el desarrollo:

Vamos a suponer que existe el $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x)$ y que es distinto de cero. Supongamos también el límite $\varepsilon(x) \to \infty$. Establecemos entonces $\frac{1}{\varepsilon(x)} = a + \eta(x)$, donde $a = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\varepsilon(x)}$. Entonces resultará:

$$\frac{p'}{p} = -\frac{1}{x \,.\, \varepsilon(x)} = -\frac{a}{x} - \frac{\eta(x)}{x}$$

De [20] se deduce:

$$x \cdot P'(x) = -\frac{P(x)}{\varepsilon(x)}.$$

De aquí se obtiene, en virtud de [18], como condición para la velocidad de producción más favorable:

$$P(s) - K'(s) = \frac{P(s)}{\varepsilon(s)}. \qquad [21]$$

Este es el contenido del principio XXa. De [19] ó [21] se obtiene inmediatamente el principio XXI.

IV.—*Los costes de la producción conjunta*

(Cap. 3, apartados 1 a 3.)

1.—Se trata aquí, sobre todo, de encontrar un sistema de coordenadas que se adapte lo mejor posible a la materia expuesta. Vamos a escoger como tal, si se considera a las velocidades de producción como coordenadas cartesianas, al sistema de las coordenadas polares.

$$\int_0^x \frac{P'}{P}\, d\xi = -a \int_0^x \frac{d\xi}{\xi} - \int_0^x \frac{\eta(\xi)}{\xi}\, d\xi + \ln C$$

$$\ln P = a \,.\, \ln x + \ln C - \int_0^x \frac{\gamma(\xi)}{\xi}\, d\xi$$

$$P = \frac{C}{x^a} \,.\, e - \int_0^x \frac{\eta(\xi)}{\xi}\, d\xi$$

Si ε de (x) es constante, el factor $e - \int_0^x \frac{\gamma(\xi)}{\xi}\, d\xi$ tendrá el valor 1. Entonces se dará $(x) = \frac{1}{a}$ para todos los valores de x. **Hay que tener en cuenta que en este caso la función de ingreso $x . P$ sólo se desvía de acuerdo con nuestra hipótesis del origen, cuando $a < 1$, es decir, $\varepsilon > 1$ cuando la demanda es elástica.**

Vamos a considerar, por tanto, las funciones de costes en su dependencia respecto a las magnitudes r y φ, donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1}$. Considerando (x_1, x_2) como un vector $\mathfrak{r}$, r será su longitud y φ su ángulo. Por ello hablamos de la "longitud de la producción r y del "ángulo de producción" φ. Igualamos $K(x_1, x_2) = K[r, \varphi]$ y correspondientemente $P(x_1, x_2) = P[r, \varphi]$. Como vector unidad $\mathfrak{e}$ designamos al vector $(\cos \varphi, \operatorname{sen} \varphi)$. Entonces tendremos $\mathfrak{r} = \mathfrak{e}\ r$. Por tanto, en especial, tendremos:

a) La función de costes totales:

$$K[r, \varphi] = K(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \operatorname{sen} \varphi) ;$$

b) La función de costes marginales:

$$\frac{\delta K}{\delta r} = K'[r, \varphi] = K'_1 \cdot \cos \varphi + K'_2 \cdot \operatorname{sen} \varphi ,$$

donde

$$K'_1 = \frac{\delta K}{\delta x_1} \text{ y } K'_2 = \frac{\delta K}{\delta x_2}$$

corresponden al crecimiento de los costes marginales.

c) Los costes medios:

$$K^* [r, \varphi] = \frac{K}{r};$$

que corresponde a los costes variables medios.

d) El ingreso en el caso general del monopolio:

$$\begin{aligned} E[r, \varphi] &= E(r \cdot \cos \varphi, r \cdot \operatorname{sen} \varphi) \\ &= r \cdot \cos \varphi \cdot P_1 (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \operatorname{sen} \varphi) + \\ &\quad + r \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot P_2 (r, \cos \varphi, r \cdot \operatorname{sen} \varphi) \\ &= r \{\cos \varphi \cdot P_1 [r, \varphi] + \operatorname{sen} \varphi \cdot P_2 [r, \varphi]\} \\ &= \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{P} \end{aligned} \qquad [22]$$

Los casos especiales se deducen de esta fórmula.

2.—Si la proporción $x_1 : x_2$ de la producción conjunta es constante, tendremos que considerar como unidad de producto al vector unidad e de la combinación de producción (constante). Entonces r será la cantidad producida en la unidad de tiempo de las unidades de productos, es decir, simplemente la velocidad de producción en el caso de la producción simple. Resulta así válido el principio fundamental de la producción compuesta (XXVI).

3.—A cada ángulo se le asigna en cada caso una longitud de producción b, q, p y s. Obtenemos, por tanto, b, q, p y s como funciones del ángulo φ. Resultará, en especial:

$$\frac{\delta^2 K}{\delta r^2} \{ r, \varphi \} = 0$$

será $r = b$. Hemos definido, por tanto, en virtud de la ecuación

$$\frac{\delta^2 K}{\delta r^2} \{ b, \varphi \} = 0$$

a la magnitud b como función implícita de φ. Tenemos que $r = b\,[\varphi]$ es la ecuación de la curva b. Igualmente, resulta

$$\frac{\delta K}{\delta r} \{ q, \varphi \} - K^*_{II}[q, \varphi] = 0$$

la definición de $r = q\,[\varphi]$ (curva — q) y

$$\frac{\delta K}{\delta r} \{ p, \varphi \} - K^* [p, \varphi] = 0$$

la definición de $r = p\,[\varphi]$ (curva — p), así como, finalmente,

$$\frac{\delta E}{\delta r} \{ s, \varphi \} - \frac{\delta K}{\delta r} \{ s, \varphi \} = 0$$

la definición de $r = s\,[\varphi]$ (curva — s), es decir, de la curva de las velocidades de producción más favorables.

Si se considera el ángulo a lo largo de círculos concéntricos, es decir, de curvas con la ecuación $r =$ constante, se obtendrá la curva de las combinaciones más favorables de la ecuación:

$$\frac{\delta E}{\delta \varphi} \{ r, \sigma \} - \frac{\delta K}{\delta \varphi} \{ r, \sigma \} = 0 .$$

De aquí obtenemos $\varphi = \sigma [r]$. El punto que satisface a las dos ecuaciones $r = s [\varphi]$ y $\varphi = \sigma [r]$, es el nivel de producción más favorable, con lo que tenemos los tres principios XVII a XXIX.

4.—El sistema de coordenadas polares está constituído por el haz de los círculos concéntricos al origen y por el conjunto de rectas que pasan por dicho origen. Sustituimos el haz de círculos por el haz de curvas isocostes. Obtendremos así un sistema de coordenadas que se adapta perfectamente a la materia tratada. Un vector de producto viene aquí determinado por la altura de sus costes de producción y por su combinación de producción, es decir, por la proporción de sus componentes. Finalmente, comparemos el haz de curvas isocostes con el haz de curvas de igual ingreso.

El haz de curvas isocostes tiene la ecuación.

$$K [r, \varphi] = M \qquad [23]$$

donde M es el parámetro del haz. El haz de las curvas de igual ingreso tiene la ecuación:

$$E [r, \varphi] = L \qquad [24]$$

donde L es el parámetro del haz.

Una curva isocostes cualquiera k tiene la ecuación

$$K [r, \varphi] - M = 0$$

y define r como una función unívoca de φ; por tanto:

$$r = K [\varphi] .$$

Sustituyendo [25] en la función de ingreso [22], obtenemos el ingreso de la curva k como función de la combinación de producción:

$$E = E\,[K\,[\varphi], \varphi] = E\,[\varphi]\,.$$

Su máximo se obtiene como sigue:

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{\delta E}{\delta r} \cdot \frac{dK\,[\varphi]}{d\varphi} + \frac{\delta E}{\delta \varphi} = \frac{\delta E}{\delta r} \cdot \left\| - \frac{\dfrac{\delta K}{\delta \varphi}}{\dfrac{\delta K}{\delta r}} \right\| + \frac{\delta E}{\delta \varphi} = 0$$

$$\frac{\delta E}{\delta r} \cdot \frac{\delta K}{\delta \varphi} - \frac{\delta E}{\delta \varphi} \cdot \frac{\delta K}{\delta r} = 0$$

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\delta E}{\delta r}, & \dfrac{\delta E}{\delta \varphi} \\ \dfrac{\delta K}{\delta r}, & \dfrac{\delta K}{\delta \varphi} \end{Vmatrix} = 0\,. \qquad [26]$$

Esta expresión resulta válida para cualquier curva isocostes. Es la ecuación que corresponde a la curva constituída por los puntos más favorables de la curva isocostes. Esta ecuación significa: el punto más favorable de cualquier curva isocostes, que no se encuentre situado fuera del sector de definición de la función de costes totales y de la función de ingreso, se caracteriza por el hecho de que las curvas isocostes y de igual ingreso que pasen por él tienen una tangente común.

La ecuación [26] se puede generalizar para el caso en que se produzcan conjuntamente n bienes. Tendremos entonces como coordenadas la longitud de producción r y $n - 1$

ángulos φ_1, φ_2 ... φ_{n-1}, que constituyen juntos la combinación de producción. [26] significa que la matriz bidimensional

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\delta E}{\delta r}, & \dfrac{\delta E}{\delta \varphi} \\[2ex] \dfrac{\delta K}{\delta r}, & \dfrac{\delta K}{\delta \varphi} \end{matrix} \right\|$$

es de primer orden. Lo mismo resulta válido para el caso de n bienes para la matriz de dos filas n — dimensional correspondiente:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\delta E}{\delta r}, & \dfrac{\delta E}{\delta \varphi_1}; & \cdots & \dfrac{\delta E}{\delta \varphi_{n\text{-}1}} \\[2ex] \dfrac{\delta K}{\delta r}, & \dfrac{\delta K}{\delta \varphi_1}, & \cdots & \dfrac{\delta K}{\delta \varphi} \end{matrix} \right\|$$

Los determinantes de segundo grado de dicha matriz se igualan a 0, con lo que se obtienen $n - 1$ ecuaciones, que juntas definen una curva espacial en un espacio de n dimensiones (4).

---

(4) [26] se puede también escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\delta K}{\delta r} : \frac{\delta K}{\delta \varphi} = \frac{\delta E}{\delta r} : \frac{\delta E}{\delta \varphi}.$$

Corresponde exactamente a la ecuación citada en el *Manual* de MARSHALL en la pág. 890 de la "Curva del contrato" de EDGEWORTH, aunque aquí tiene una significación distinta pero análoga. Un sencillo cálculo demuestra, por lo demás, que el determinante [26] tiene el mismo valor que el determinante $\begin{vmatrix} E'_1 & E'_2 \\ K'_1 & K'_2 \end{vmatrix}$ por consiguiente, es invariable respecto a nuestra transformación de coordenadas.

V.—*Teoría del precio compensatorio entre explotaciones* (Cap. 3, apartado 4.)

Vamos a aplicar los mismos signos que en el texto. Los costes que en la explotación N.° 2 se agregan a los costes de la explotación N.° 1 los denominamos con la letra H. H depende evidentemente de x_2 y de y. La magnitud y viene definida como función de x_1 y de x_2 con la condición de que los costes de $x_1 - y$ y x_2 tienen que ser siempre un mínimo. Tenemos, por tanto, para la empresa total:

$$K = K_1(x_1) + H(x_2, y) . \qquad [27]$$

Y para la explotación N.° 2:

$$K_2 = y \cdot V + H(x_2, y) \qquad [28]$$

donde se cumple simultáneamente la condición (5):

$$\frac{\delta H}{\delta y} = \frac{d K_1}{d x_1} . \qquad [29]$$

Por medio de [29] queda definida y como función de x_1 y x_2.

---

(5) Esta condición se obtiene como sigue: si establecemos $x_1 - y = u$, la magnitud K habrá de ser un mínimo, dadas u y x_2; por tanto:

$$\frac{\delta K(u, y, x_2)}{\delta y} = \frac{\delta K_1(u + y)}{\delta y} + \frac{\delta H(x_2, y)}{\delta y} = 0$$

de donde, teniendo en cuenta

$$\frac{\delta K_1(u + y)}{\delta y} = \frac{d K_1(x_1)}{d x_1},$$

se deduce la fórmula [29].

1.—Si el bien N.° 1 no es apto para su venta en el mercado, tendremos $y = x_1$. Para que la empresa logre el máximo beneficio tiene que satisfacer la condición:

$$\frac{d\,\mathrm{E}}{d\,x_2}\left\{ s_2 \right\} = \left| \frac{d\,\mathrm{K}_1}{d\,y} + \frac{\delta\,\mathrm{H}}{\delta\,y} \right| \frac{d\,y}{d\,x_2}\left\{ s_2 \right\} + \frac{\delta\,\mathrm{H}}{\delta\,x_2}. \qquad [30]$$

La explotación N.° 2 se tiene que regir en lo que se refiere a producción para el mercado con arreglo a la hipótesis establecida (6), según el principio del lucro económico. Resulta válida, por tanto, para dicha explotación en virtud de [28]:

$$\frac{\delta\,\mathrm{E}}{\delta\,x_2}\left\{ s_2 \right\} = \left| \frac{d\,(y\,.\,\mathrm{V})}{d\,y} + \frac{\delta\,\mathrm{H}}{\delta\,y} \right| . \frac{d\,y}{d\,x_2}\left\{ s_2 \right\} + \frac{\delta\,\mathrm{H}}{\delta\,x_2}\left\{ s_2 \right\} \qquad [31]$$

De [30] y [31] se obtiene, para cada punto de s_2, la ecuación:

$$\frac{d\,\mathrm{K}_1\,(y)}{d\,y} = \frac{d\,(y\,.\,\mathrm{V})}{d\,y}. \qquad [32]$$

Para que [32] resulte satisfecha para cualquier posible valor s_2, debe darse: $y\,.\,\mathrm{V} = \mathrm{K}_1\,(y) + \mathrm{L}$, donde L es una constante cualquiera. Según el principio XXXV, obtenemos la fórmula:

$$\mathrm{V} = \mathrm{K}_1\,(y) + \frac{\mathrm{L}}{y}. \qquad [33]$$

2.—Si el bien N.° 1 es apto para su venta en el mercado, el precio compensatorio debe ser determinado de tal forma, que la explotación N.° 2 coincida siempre con los intereses de la empresa total, cuando su oferta se haga con arreglo al principio del lucro económico. En lo que respecta a la explotación N.° 1 debemos renunciar a tal forma de determinación de su oferta y hacerla depender inmediatamente de la función de beneficio de la empresa total.

---

(6) Cf. cap. 3, apart. 4, I.

Si los precios P_1 y P_2 dependen de la oferta del mercado, es decir:

$$P_1 = P_1 (x_1 - y, x_2) \quad \text{y} \quad P_2 = P_2 (x_1 - y, x_2) \ . \qquad [34]$$

Se dará, en general:

$$G = G (x_1 , y, x_2) \quad \text{y} \quad G_2 = G_2 (x_1 , y, x_2) \ . \qquad [35]$$

Aquí y es definida en virtud de la condición de mínimo [32] para los costes de producción de x_2, como función de x_2.

La condición de máximo para G es la siguiente:

$$\frac{\delta G}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x_1} + \frac{\delta G}{\delta x_1} = 0 \ ; \ \frac{\delta G}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x_2} + \frac{\delta G}{\delta x_2} = 0 \ . \qquad [35]$$

a) Para la explotación N.° 1 y es una magnitud dada, que demanda la explotación N.° 2. También x_2 es un dato para la explotación. La explotación N.° 1 sólo influye directamente sobre el beneficio de la empresa total por la producción conjunta s_1 de su producto. Esta s_1 la obtenemos de la primera ecuación [35], que después de algunas transformaciones, y teniendo en cuenta [29], resulta:

$$(s_1 - y) \cdot \frac{\delta P_1}{\delta x_1} + P_1 + x_2 \cdot \frac{\delta P_2}{\delta x_1} - K'_1 (s_1) = 0 \ . \qquad [36]$$

[36] define s_1 como función implícita de y y de x_2.

b) La explotación N.° 2 realiza su oferta según la hipótesis adoptada con arreglo al principio del lucro económico. Su beneficio, en virtud de [32] y [36], depende, en último término, sólo de x_2. La condición de máximo para G_2 como ecuación característica de s_2 es:

$$\frac{\delta G_2}{\delta x_1} \cdot \frac{d s_1}{d x_2} + \frac{\delta G_2}{\delta y} \cdot \frac{d y}{d x_2} + \frac{\delta G_2}{\delta x_2} = 0 \ . \qquad [37]$$

En los puntos $x_1 = s_1$ y $x_2 = s_2$, G y G_2 tienen que ser máximos. [35] y [37] deben ser satisfechas para los mismos valores de x_1 y x_2, cuando la conducta de la explotación N.° 2 deba implicar un beneficio máximo para la empresa total. Esto resulta válido para todos los precios y funciones de precios. Esta condición se cumple igualando las derivadas de G_2 a las correspondientes derivadas de G. Obtenemos así las tres identidades:

$$\frac{\delta G_2}{\delta x_1} = \frac{\delta G}{\delta x_1}; \quad \frac{\delta G_2}{\delta y} = \frac{\delta G}{\delta y}; \quad \frac{\delta G_2}{\delta x_2} = \frac{\delta G}{\delta x_2}. \qquad [38]$$

De [38] se deduce la demostración del principio XXXVI cuando L sea una constante cualquiera:

$$G - G_2 = L. \qquad [39]$$

Teniendo en cuenta [27], [28] y [34], resulta:

$$\begin{aligned} G &= (x_1 - y) \,.\, P_1 + x_2 \,.\, P_2 - K_1 - H \\ G_2 &= x_2 \,.\, P_2 - y \,.\, V - H \end{aligned}$$

De aquí y de [39] resulta:

$$V = P_1 - \frac{x_1 \,.\, P_1 - K_1}{y} + \frac{L}{y}. \qquad [40]$$

3.—[40] es la fórmula general para el precio compensatorio entre explotaciones (7). Este se puede obtener para todos los casos especiales de [40]:

---

(7) Se puede demostrar que la condición [29] se mantiene al utilizar el precio de compensación para averiguar el coste mínimo de la explotación N.° 2; resulta, cuando $x_1 = u + y$:

$$\frac{\delta K_2 (u, y, x_2)}{\delta y} = \frac{\delta (y \,.\, V)}{\delta y} + \frac{\delta H}{\delta y}.$$

Teniendo en cuenta [40], resulta

$$y \,.\, V = - u \,.\, P(u) + K_1 (u + y),$$

por tanto,

$$\frac{\delta (y \,.\, V)}{\delta y} = \frac{\delta K_1}{\delta y} = \frac{\delta K_1}{\delta x_1},$$

con lo que obtenemos [29].

a) Si el bien N.° 1 no es apto para su venta en el mercado, su precio P_1 no vendrá definido al principio. Si igualamos $P_1 = 0$, tendremos:

$$V = \frac{K_1}{y} + \frac{L}{y}$$

de donde, teniendo en cuenta que $x_1 = y$, se deduce la fórmula [33].

b) Si existe libre concurrencia en el mercado del bien N.° 1, [36] se convierte en $P_1 = K'(s_1)$, de donde se obtiene s_1 independiente de y y de x_2. Entonces, de [40] obtendremos:

$$V = P_1 - \frac{s_1 \cdot P_1 - K_1 - L}{y} .$$

El numerador del quebrado de la derecha es independiente de y y de x_2. Podemos designarlo con la letra $-M$, donde M es una constante. Tendremos entonces el principio XXXVII:

$$V = P_1 + \frac{M}{y} . \qquad [41]$$

c) Si P_1 es independiente de x_2 y P_2 lo es de x_1, obtendremos de [36]:

$$(s_1 - y) \cdot \frac{\delta P_1}{\delta x_1} \left\{ s_1 - y \right\} + P_1 (s_1 - y) - K'_1 (s_1) = 0 . \qquad [42]$$

[42] define s_1 como función implícita de y. La fórmula para el precio compensatorio se deduce de [40]:

$$V = P_1 (s_1 - y) - \frac{s_1 \cdot P_1 (s_1 - y) - K_1 (s_1)}{y} + \frac{L}{y} . \qquad [43]$$

Aquí V es esencialmente distinto del precio de mercado P_1, es decir, no sólo en el cociente de una constante y de y, ya que el numerador del primer quebrado [43], a través de $P_1 (s_1 - y)$ y de

s_1 en virtud de [42], depende de y. De aquí se deducen las reflexiones del apartado 4, IV, que conducen al principio XXXVIII. En lo demás hay que afirmar, en virtud de [42], que la oferta de la xeplotación N.° 1 es independiente de la oferta de la explotación N.° 2 en el sentido de que la explotación N.° 1 no tiene que guiarse, para realizar su oferta en el mercado, por la situación de mercado de la explotación N.° 2, sino que la puede calcular independientemente. El cálculo de los costes puede ser aquí repartido.

d) Si el precio y la cantidad máxima que se puede vender del bien N.° 1 se encuentran fijados (por un cartel), y si designamos con la letra h el contigente máximo que se puede vender, habrá que distinguir dos casos:

α) Si la oferta s_1 de la explotación N.° 1 que surgiría, si la venta —a un precio fijado— fuese libre, es mayor que $h + y$, la explotación N.° producirá la cantidad $h + y$. Tendremos entonces, en virtud de [40] y como $x_1 = h + y$:

$$V = \frac{K_1 (h + y)}{y} + \frac{L - h \,.\, P_1}{y} \,. \qquad [44]$$

Como $L - h \,.\, P_1$ es constante, [44] tiene una cierta semejanza con [33].

β) Si $s \leqq h + y$, se producirá la misma cantidad que en el caso de libre concurrencia, es decir, con arreglo a la fórmula [41].

e) Una situación especial aparece en el caso de la concurrencia modificada. Aquí podemos considerar a los costes totales como una suma de dos funciones: $K_1 (x_1) + C (x_1 - y)$, donde C son los costes de venta dependientes de la cantidad vendida $x_1 - y$, que no aparecen para y. Aquí [36] aparece en la forma:

$$P_1 - K'_1 (s) - C' (s_1 - y) = 0 \,.$$

Con lo que s_1 viene definido como función de y. De [40] se deduce:

$$V = P_1 - \frac{s_1 \,.\, P_1 - K_1 - C (s_1 - y)}{y} + \frac{L}{y} \,.$$

El numerador del primer quebrado depende de y por encima de C y s_1. Tenemos, por tanto, un caso semejante al de [43]: el precio compensatorio resulta fundamentalmente distinto del precio de mercado.

4.—El problema resulta más complicado cuando ambas explotaciones producen varios bienes. Aquí hemos de aplicar el cálculo vectorial con el fin de lograr una exposición más clara. Llamemos x_k $(k = 1, 2 \ldots n)$ a las cantidades producidas por la explotación N.° 1, y_k $(k = 1, 2 \ldots n)$ a las cantidades demandadas por la explotación N.° 2 y z_i $(i = 1, 2, 3 \ldots m)$ a las cantidades producidas por la explotación N.° 2 (todas en la unidad de tiempo), designemos, además, al vector $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ con $\mathfrak{x}$, al vector $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ con η, al vector $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ con z, al vector del precio de todos los bienes $n + m$ con el signo $\mathfrak{P}$; finalmente, a los precios compensatorios con V_k $(k = 1, 2, \ldots n)$ y al vector $(V_1, V_2, \ldots V_n)$ con el signo $\mathfrak{V}$, al asignar a cada bien una coordenada en un espacio de $(n + m)$ dimensiones, tendremos:

$$G = (\mathfrak{x} - \eta + z) . \mathfrak{P} - K_1 (\mathfrak{x}) - H (\eta, z) = G (\mathfrak{x}, \eta, z)$$

$$G = z . \mathfrak{P} - \eta . \mathfrak{V} - H (\eta, z) = G_2 (\mathfrak{x}, \eta, z) .$$

Su grado será $G_2 = \{ 0 \}$ sólo cuando sea el grado de $G = \{ 0 \}$. Esto se logra haciendo $G_2 =$ grado G. Entonces, G_2 sólo se puede diferenciar de G en una constante cualquiera L. Tendremos entonces:

$$L = (\mathfrak{x} - \eta) . \mathfrak{P} - K_1 (\mathfrak{x}) + \eta . \mathfrak{V}$$

y finalmente:

$$\eta . \mathfrak{V} = (\eta - \mathfrak{x}) . \mathfrak{P} + K (\mathfrak{x}) + L .$$

En otras palabras: para la totalidad de las unidades de bien demandadas por la explotación N.° 1 de la explotación N.° 2 en la unidad de tiempo, la explotación N.° 2 soporta los costes totales de producción de la explotación N.° 1 y se apunta en el mercado la ganancia de la explotación N.° 1. A uno de estos sumandos se añade una constante cualquiera. En general, no se puede construir un precio compensatorio para cada bien. Aparece una excepción cuando reina libre concurrencia en el mercado de la explotación N.° 1, y también son independientes de $\mathfrak{x}$ los precios restantes, es decir, cuando se da la ecuación:

$$\sum_1^n {}^k\, y_k \cdot V_k = - \sum_1^n {}^k\, (x_k - y_k) \cdot P_k + K_1(\mathfrak{x}) + L\,.$$

Se obtiene aquí el vector más favorable $\mathfrak{x}$ de las ecuaciones: grado $G = \{0\}$, es decir, de: $P_k = \frac{\delta K_1}{\delta x_k}$ A las raíces de estas n ecuaciones las designamos con s_k, al vector $(s_1, s_2, \ldots s_k)$ con $\mathfrak{s}$ Las s_k se obtienen independientemente de η y de z. Tendremos, pues:

$$\sum_1^n {}^k\, y_k \cdot V_k = \sum_1^n {}^k\, y_k \cdot P_k - \left\| \sum_1^n {}^k\, s_k \cdot P_k - K_1(\mathfrak{s}) \right\| + L$$

o

$$\sum_1^n {}^k\, y_k \cdot V_k = \sum_1^n {}^k\, y_k \cdot P_k\,. \qquad [45]$$

Si igualamos la constante arbitraria L a la magnitud constante

$$\sum_1^n {}^k\, y_k \cdot P_k - K_1(\mathfrak{s})\,.$$

[45] sólo se satisface para cada valor de cada y_k, cuando $V_k = P_k$, es decir, cuando:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{P}\,.$$

Por consiguiente, en el caso de la libre concurrencia tendremos la misma situación para la producción conjunta y para la producción simple. No se altera nada si hacemos

$$V_k = P_k + \frac{M_k}{y_k}$$

Si designamos con M a la constante

$$\sum_1^n {}_k M_k$$

Tendremos:

$$\sum_1^n {}_k\ y_k \,.\, V_k = \sum_1^n {}_k\ y_k \,.\, P_k + M$$

o

$$\eta \,.\, \mathfrak{P} = \eta\ \mathfrak{B} + M\,.$$

VI.—*El equilibrio estático con una distribución dada de las empresas*

(Cap. 4, apartado 1, I.)

Asignamos a las *n* clases de mercancías de nuestro sistema un espacio de *n* dimensiones. Además numeramos a nuestros *m* individuos económicos, que son en parte empresas y en parte individuos naturales. La oferta de la economía de un individuo número μ la consideramos como un vector, designándolo con la expresión $\mathfrak{x}_\mu$. Las componentes de este vector serán iguales a cero en tanto que los bienes correspondientes no sean ofrecidos por el individuo respectivo. El vector de oferta de una empresa no es sino su vector de producto. Correspondientemente definiremos al vector η_μ como el vector de oferta del individuo económico número μ. Para una empresa, η_μ no es sino su vector de gasto, donde el capital empleado se considera igualmente como velocidad de gasto, es decir, como disposición de capital en la unidad de tiempo. $\mathfrak{P}$ es el vector general del precio.

1. *El equilibrio individual de la empresa* (8).

A la empresa le corresponde una función de producción que relacione el vector de gastos y el vector de productos. Como la disposición de capital está contenida en el vector del gasto, la función de producción dependerá del vector del precio. Tiene, por tanto, la forma general (9):

$$\varphi\,(\mathfrak{x}\;-\eta,\,\mathfrak{P}\,) = 0\,. \qquad [46]$$

Esta función tiene el significado siguiente: $\mathfrak{P}$ se considera como dado por la empresa correspondiente, ya que se trata del caso de libre concurrencia. Si se ha de producir algún $\mathfrak{x}$, todas las η que con los $\mathfrak{x}$ satisfacen a la ecuación [46] son vectores de gasto, que técnicamente resultan adecuados para producir $\mathfrak{x}$; dado un vector de gasto η, todas las $\mathfrak{x}$ que juntas con las η satisfacen a la ecuación [46], son vectores de producto que pueden ser producidos con η.

La empresa busca hacer máximo el vector del producto

$$(\mathfrak{x} - \eta)\,.\,\mathfrak{P}$$

con la condición subsidiaria [46], donde, como se ha dicho, β es constante. La condición de máximo es aquí la siguiente:

La matriz

$$\begin{Bmatrix} \mathfrak{x} \\ \operatorname{grad}\,(\mathfrak{P} - \eta)\,\varphi \end{Bmatrix} \qquad [47]$$

es de grado 1 para los valores realizados de $\mathfrak{x}$ y η.

En general, se puede aceptar que las componentes del vector de producto distintas de cero son componentes de cero para el vector de gasto y viceversa. Para cada derivada parcial existente con arreglo a [46], de una componente y_k de η respecto a una

(8) Cf. PARETO: *Manuel*, 1927, apéndice, núm. 77 y siguiente.

(9) Podemos prescindir del índice que indica el número de la empresa.

componente x_y de z $(i = 1, 2, .. n;\ k = 1, 2, ... n)$, resulta la ecuación:

$$\frac{P_i}{P_k} = \frac{\delta\, y_k}{\delta\, x_i} \quad \text{o} \quad P_i = \frac{\delta\, y_k}{\delta\, x_i} \,.\, P_k \qquad [48]$$

Existen siempre $n - 1$ ecuaciones independientes [48], de modo que de [46] y de [48] dadas las relaciones de precios quedan determinadas, en general, por los vectores a realizar por la empresa; cierto que para la componente del capital sólo lo será hasta un factor dependiente de la altura absoluta del nivel del precio.

Semejante a [48] es el sistema de ecuaciones:

$$\frac{P_k}{P_i} = \frac{\delta\, x_i}{\delta\, y_k} \quad \text{o} \quad P_k = \frac{\delta\, x_i}{\delta\, y_k} \,.\, P_i \qquad [49]$$

$\frac{\delta\, y_k}{\delta\, x_i}$ es la medida de la cantidad del gasto marginal $\frac{\delta\, y_k}{\delta\, x_i}$ P_k la medida del valor del mismo gasto marginal, que debe hacerse del medio de producción N.° k para producir el producto N° i; $\frac{\delta\, x_i}{\delta\, y_k}$ es la medida de la cantidad del ingreso marginal y $\frac{\delta\, x_i}{\delta\, y_k} P_i$ es la medida del valor que se obtiene por medio del gasto del factor de producción N.° k para obtener el producto N.° i.

[48] significa, por consiguiente, que el gasto marginal del valor correspondiente de un medio de producción cualquiera para un producto, es igual al precio del producto; [49] significa, análogamente, que el ingreso marginal de un medio de producción es igual en cada producto al precio del medio de producción. De [48] se deduce que los gastos marginales de todos los medios de producción para cada producto son iguales entre sí; de [49] se infiere que los ingresos marginales de todos los productos son iguales entre sí para cada medio de producción.

2. *El equilibrio individual del individuo natural*

El individuo natural, que vamos a denominarlo consumidor para diferenciarlo de la empresa productora, es oferente de medios de producción y demandante de productos. También en él hay que distinguir, por consiguiente, un vector de oferta $\mathfrak{x}$ y un vector de demanda η. Su "ecuación de balance" (10) es:

$$(\mathfrak{x} - \eta) \cdot \mathfrak{P} = 0 \,. \qquad [50]$$

Intenta hacer máxima su función de ofelimidad o función índice de ofelimidad o utilidad (11).

$$J = f \,(\mathfrak{x} - \eta, \ \mathfrak{P})$$

con la condición subsidiaria [50], donde $\mathfrak{P}$ es constante, ya que nos encontramos en la hipótesis de la economía de concurrencia. La función de ofelimidad se refiere a la situación total del consumidor, es decir, tanto a su oferta como a su demanda Se introduce el parámetro $\mathfrak{P}$ porque la oferta del capitalista no se puede definir independientemente del vector del precio.

Obtenemos una expresión análoga a la condición de máximo [47]: la matriz

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{P} \\ \text{grad}\,(\mathfrak{x} - \eta)\, f \end{matrix} \right\} \qquad [51]$$

es de grado 1 para los valores realizados de $\mathfrak{x}$ y η.

Las ecuaciones obtenidas de [51], de manera semejante a como se ha hecho con [48] y [49] al deducirlas de [47]:

$$\frac{f'_i}{P_i} = \frac{f'_k}{P_k} \qquad [52]$$

contienen el conocido principio de la igualdad de las utilidades marginales (12).

---

(10) Cf. PARETO: *Manuel*, 1927, apén., núm. 80.
(11) Cf. PARETO: *Manuel*, 1927, apén., núm. 1 y siguiente.
(12) Cf. PARETO: *Manuel*, 1927, apén., núm. 80.

3. *El equilibrio general.*

El vector de oferta general U de nuestros n individuos económicos, se obtiene a través de la expresión:

$$\mathfrak{U} = \sum_{1}^{m} \mu \quad \mu \tag{53}$$

El vector de demanda total se deduce de la expresión:

$$\mathfrak{N} = \sum_{1}^{m} \mu \quad \mathfrak{y}_{\mu} \tag{54}$$

Por medio de [46] y [47], así como de [50] y [51], se define como función de $\mathfrak{P}$ cada $\mathfrak{x}$ y cada $\mathfrak{y}_{\mu}$. En virtud de [53] y [54] resulta lo mismo para $\mathfrak{x}$ y $\mathfrak{n}$. Como el mecanismo de la concurrencia contribuye a la igualación de la oferta y la demanda, obtenemos como sistema de n ecuaciones características para el vector del precio $\mathfrak{P}$ la expresión:

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \,. \tag{55}$$

Esta expresión determina a $\mathfrak{P}$ hasta un factor de proporcionalidad, ya que, como se ha mencionado, $\mathfrak{x}$ y $\mathfrak{y}$ resultan independientes de la altura absoluta del precio.

VII.—*El principio de la atribución total en el equilibrio estático* (Cap. 4, apartado 1, III.)

Vamos a suponer un caso simplificado, que contenga las hipótesis esenciales: Nuestra empresa produce un producto con una velocidad de producción x y un precio P, y emplea para ello tres medios de producción con unas velocidades de empleo y_1, y_2, y_3 y los precios Q_1, Q_2, Q_3. Todos los precios son datos para la empresa, con arreglo a la hipótesis de la existencia de una economía de libre concurrencia. Entonces se puede escribir la función general de producción [46] en la forma simplificada:

$$x = f\,(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)\;. \qquad [56]$$

Los costes totales de x son:

$$\mathrm{K}\,(x) = y_1 \cdot \mathrm{Q}_1 + y_2 \cdot \mathrm{Q}_2 + y_3 \cdot \mathrm{Q}_3\;. \qquad [57]$$

La velocidad de producción realizada la designamos, como siempre, con la letra s; las velocidades de gasto las designamos con las letras t_1 , t_2 , t_3 .

El beneficio es:

$$x \,.\, \mathrm{P} - \mathrm{K}\,(x) = \mathrm{P} \,.\, f\,(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3) - (y_1 \cdot \mathrm{Q}_1 + \\ + y_2 \cdot \mathrm{Q}_2 + y_3 \cdot \mathrm{Q}_3\;. \qquad [57]$$

Su máximo determina a t_1 , t_2 y t_3 , y por encima de [56] a la magnitud s. Las ecuaciones características para t_1 , t_2 , t_3 son:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \,.\, f'_1\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3) &= \mathrm{Q}_1 \\ \mathrm{P} \,.\, f'_2\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3) &= \mathrm{Q}_2 \\ \mathrm{P} \,.\, f'_3\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3) &= \mathrm{Q}_3 \end{aligned} \qquad [58]$$

[58] no es sino el sistema de ecuaciones [49]. El principio XXXIX significa que los precios de la economía estática de cada empresa tienden a realizar su óptimo de la explotación, es decir, el mínimo de

$$\frac{\mathrm{K}\,(x)}{x} = \frac{y_1 \cdot \mathrm{Q}_1 + y_2 \cdot \mathrm{Q}_2 + y_3 \cdot \mathrm{Q}_3}{f\,(y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)}\;. \qquad [59]$$

El mínimo de [59] lo obtenemos de las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} s \,.\, \mathrm{Q}_1 - f'_1\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3)\;.\;\mathrm{K}\,(s) &= 0 \\ s \,.\, \mathrm{Q}_2 - f'_2\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3)\;.\;\mathrm{K}\,(s) &= 0 \\ s \,.\, \mathrm{Q}_3 - f'_3\,(t_1\,,\,t_2\,,\,t_3)\;.\;\mathrm{K}\,(s) &= 0 \end{aligned} \qquad [60]$$

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones [60] por t_1, la segunda por t_2 y la tercera por t_3 y luego las sumamos, obtendremos:

$$s \cdot K(s) - (t_1 \cdot f'_1 + t_2 \cdot f'_2 + t_3 \cdot f'_3) \cdot K(s) = 0$$

o después de algunas transformaciones:

$$f(t_1, t_2, t_3) = t_1 \cdot f'_1 + t_2 \cdot f'_2 + t_3 \cdot f'_3 \,. \qquad [61]$$

Esto significa: en la situación de equilibrio estático la suma de las cantidades de medios de producción empleadas en la unidad de tiempo multiplicadas por sus productividades marginales, es igual al producto total. Las ecuaciones [58] indican que en la economía de concurrencia lucrativa la atribución se hace con arreglo a las productividades marginales. [61] indica que en dicha atribución sale sin resto.

La ecuación [61] es una condición necesaria, pero no suficiente para la existencia de un equilibrio estático en la economía de concurrencia. Si, por consiguiente, la función general de producción de una economía se encuentra constituída de tal modo, que [51] no queda satisfecha para ningún vector de gasto, la forma de organización en régimen de economía de concurrencia en relación con el principio económico lucrativo, no será realizable. Aquí se muestra muy claramente la dependencia en que se encuentra la forma de organización económico-social con respecto a las relaciones de producción, es decir, con respecto a la situación técnica.

B. GENERALIZACION DE LA FUNCION DE COSTES TOTALES (13)

La mayoría de los principios obtenidos no resultan válidos para cualquier función de costes totales imaginable. Hemos hecho explícita la hipótesis de la regularidad. Por consiguiente, los princi-

(13) Nos ocupamos aquí de la teoría de la longitud o duración del proceso productivo. Análogamente, se puede obtener la correspondiente generalización para la teoría de la combinación de la producción.

pios obtenidos sólo resultan válidos para las funciones de costes totales que satisfacen dicha hipótesis. Aquí vamos a estudiar hasta qué punto esos principios pueden extenderse también al caso general.

Para razonar el principio (XXII) se aprovechó subsidiariamente el hecho de que las magnitudes de valor muy reducidas pueden despreciarse desde el punto de vista económico. Aquí vamos a convertir ese hecho en principio fundamental:

SE PUEDE PERMITIR CUALQUIER VARIACIÓN ARBITRARIA DE LA FUNCIÓN DE COSTES TOTALES QUE SÓLO ALTERE A LA FUNCIÓN DEL BENEFICIO EN UNA CANTIDAD ÍNFIMA α (POR EJEMPLO: $\alpha = 0{,}0001$ Pf).

La licitud de esta afirmación y el hecho de que los resultados económicos no resulten alterados por ella, es evidente.

Ahora podemos demostrar el principio siguiente:

(XXXX) LA FUNCIÓN DE COSTES TOTALES SE PUEDE REPRESENTAR SIEMPRE POR UNA FUNCIÓN MONÓTONA CRECIENTE UNÍVOCA, QUE TIENE EN CUALQUIER INTERVALO FINITO MUCHAS ZONAS DE DISCONTINUIDAD Y QUE ALLÍ DONDE ES CONTINUA TAMBIÉN ES REGULAR.

La función de costes totales unívoca y monótona (14); de donde se deduce que las discontinuidades sólo pueden aparecer a saltos. La función de costes totales tiene en las zonas de discontinuidad dos valores límites: uno a la izquierda y otro a la derecha. El situado a la izquierda es siempre el menor. Queremos demostrar (lo que en virtud de la amplitud de α siempre resulta posible), que el valor límite situado a la izquierda siempre deberá ser valor de la función de la zona de discontinuidad. La diferencia entre los dos valores límites es el salto o, como se le denomina generalmente, la oscilación. Una zona de discontinuidad viene caracterizada por el hecho de que su oscilación es distinta de cero. Si tenemos dos velocidades de producción cualesquiera, x_1 y x_2, en virtud de la monomanía de la función de costes totales, se dará que la suma de las oscilaciones de todas las zonas de discontinuidad en el intervalo (x_1, x_2) no podrá ser mayor que la diferencia de los valores de los costes totales correspondientes a x_1 y a x_2, es decir, $|K(x_1) - K(x_2)|$. Pero de aquí se deduce que existen muchas zonas de dis-

(14) Cap. 1, apart. 1, III, 2.

continuidad y que las oscilaciones son mayores que α. El número de dichas zonas no puede ser mayor que el cociente

$$\frac{K(x_2) - K(x_1)}{\alpha}.$$

Todas las zonas de discontinuidad cuya oscilación o fluctuación sea menor que α, deberán despreciarse. Ya que en su entorno los valores de los costes totales pueden variar de tal modo, que se diferencien de los valores originarios en menos de α, y la función de costes totales, nuevamente definida, seguirá una trayectoria continua. Además, podemos determinar la regularidad, en todos aquellos sitios donde la función sea continua, por medio de variaciones que sean menores que α, con lo que queda demostrado nuestro principio.

Para cualquier función de costes totales se pueden calcular siempre, sin más preámbulos, los costes medios y los costes medios variables. El principio que acabamos de demostrar nos pone en condiciones de construir también una función de costes marginales para la función general de los costes totales. En lo que sigue vamos a numerar y a designar con la letra u las zonas de discontinuidad. Dos zonas de discontinuidad contiguas forman un intervalo regular. En su interior la formación de la función de costes marginales resulta perfectamente clara. Vamos a averiguar ahora cómo tenemos que determinar la función de costes marginales en las zonas de discontinuidad.

Los costes marginales de una velocidad de producción constituyen simultáneamente una cierta orientación respecto a los costes totales de dicha velocidad de producción. De aquí se deduce que sólo las derivadas del lado izquierdo resultan decisivas en las zonas de discontinuidad para la determinación de la función de costes marginales en dichas zonas. La función de costes marginales resultaba necesaria para determinación del mínimo de la explotación, del óptimo de la explotación y de la oferta de la explotación. Las velocidades de producción respectivas aparecían como las abscisas de los puntos de intersección de los costes marginales con las curvas correspondientes. En nuestro caso pueden aparecer varios de dichos puntos de intersección en el interior del intervalo regular. Entonces habrá que comparar entre sí los resultados. Pero además las velocidades de producción respectivas pueden encontrarse situadas en una zona de discontinuidad. Con el fin de que formalmente se obtenga cada una de las velocidades de producción señaladas, según un punto de intersección, determinamos como siguen los valores de los costes marginales en las zonas de discontinuidad.

Son costes marginales de una zona de discontinuidad:

1. La derivada del lado izquierdo de la función de costes totales en dicha zona.

2. Todos los valores que sean mayores que dicha derivada.

Con esta afirmación se mantienen todas las leyes deducidas, también para la función general de costes totales de la oferta simple. Este hecho se puede demostrar matemáticamente de manera más rigurosa. Pero dicha demostración es formal y no enriquece esencialmente al conocimiento económico. Por tanto, no la ofrecemos. Las disquisiciones de este apartado sólo tienen como finalidad el ampliar en lo posible el ámbito de validez de los principios deducidos.

Finalmente, demos una breve formulación analítica de los hechos expuestos.

La curva de costes totales $K(x)$ es regular cuando $u_n < x < u_{n+1}$ (donde $n = 1, 2, \ldots$). Tendremos:

$$K(u_n) = \lim_{x \to u_n - 0} K(x) .$$

Con lo que $K(x)$ es definida para todos los valores de $x > 0$. De aquí se obtienen también $K^*(x)$ y $K^*_{II}(x)$, que tienen las mismas zonas de discontinuidad que $K(x)$.

$K'(x)$ es definida para $u_n < x < u_{n+1}$ por la ecuación:

$$K'(x) = \frac{d\,K(x)}{d\,x} .$$

Resulta, además:

$$K'(u_n) \geqq \lim_{x \to u_n - 0} K'(x) .$$

K' tienen, por tanto, infinitos valores en u_n .

Estas relaciones y la aplicación de las leyes anteriormente deducidas se exponen en el segundo ejemplo del apéndice D (15).

C. NOTAS A LA TEORIA DE LOS COSTES DE EUGENIO SCHMALENBACH

1.—*Teoría de la producción simple*

Entre las obras fundamentales de la literatura alemana sobre la teoría de los costes, se encuentran las de Eugenio Schmalenbach, en especial sus "Grundlagen der Selbstkostenrechnung und Preispolitik" (16). Esta obra, que apareció por primera vez en 1909 en la "Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung", representa la base de la teoría de los costes alemana actual. Por tanto, resulta justificado hacer un estudio de los principios fundamentales de dicha obra, indicando al mismo tiempo la posibilidad de aplicación teorética de la teoría de los costes formal, o sea, el análisis de la teoría de los costes no fundada matemáticamente.

Los tres puntos fundamentales de la teoría de los costes de Schmalenbach son:

I. La clasificación de los costes.
II. El "factor proporcional".
III. El "fraccionamiento de los costes".

I

Las clasificación de los costes

Schmalenbach distingue costes fijos, regresivos, proporcionales y progresivos.

---

(15) Aparece un caso particular, cuando existe un límite superior para la velocidad de producción, que no puede superar, quizá por motivos técnicos. Entonces la función de costes totales sólo quedará definida entre 0 y dicho límite superior. Aquí el límite superior de las velocidades de producción lo consideramos como una zona de discontinuidad de la función de costes totales. Las demás consecuencias se obtienen de los desarrollos estudiados. Un ejemplo para este caso es la fábrica de ladrillos. (Cf. ENQUETE: *Comisión*, I, 3. Art. Gr., segunda parte, 2, pág. 186.)

(16) Quinta edición. Leipzig, 1930.

1. COSTES FIJOS.—Schmalenbach los define como sigue: "Su naturaleza (de los costes fijos) consiste en el hecho de que no resultan influídos por las oscilaciones del grado de empleo" (17). Por grado de empleo entiende Schmalenbach "la masa de los productos fabricados en cada caso" (18). Esto se puede completar diciendo: "la masa de los productos fabricados en la unidad de tiempo". Entonces el concepto de grado de empleo para Schmalenbach coincide con nuestro concepto del nivel de producción. Con lo que los costes fijos no serán otra cosa que nuestros costes constantes K_I. Este concepto unívoco, y en nuestra opinión también justificado, de los costes fijos no es conservado, por lo visto, en la exposición del "fraccionamiento de los costes", de modo que nosotros, para evitar confusiones, hemos empleado la denominación "costes constantes", donde la palabra "constante" corresponde exactamente al carácter matemático de dicha función de los costes.

A menudo se declara, del lado de la economía de la empresa, que los costes fijos tampoco son independientes del grado de empleo, sino que varían a saltos al crecer dicho grado de empleo. Pero evidentemente este caso sólo se da cuando se define el concepto de "costes fijos" de modo distinto a como lo hace Schmalenbach. Entonces los costes "discontinuos" se suman a los costes fijos. En nuestra opinión esta ampliación del concepto de "costes fijos" no es justificada. Nos parece más recomendable introducir el concepto especial de "costes discontinuos".

2. COSTES REGRESIVOS.—Schmalenbach los define de la manera siguiente: "los costes totales regresivos se caracterizan por el hecho de que los costes totales crecen al ser creciente el grado de empleo, pero dicho crecimiento es menor que el experimentado por la producción" (19). Esta definición hay que interpretarla teniendo en cuenta los ejemplos numéricos expuestos en su "selbstkostenrechung", en el sentido de que el crecimiento de los costes en relación con la altura de los costes totales es menor que el crecimiento de

(17) L. c., pág. 37.
(18) L. c., pág. 32.
(19) L. c., pág. 37.

la velocidad de producción, respecto a la velocidad de producción. Tendremos, por consiguiente:

$$\frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{K(x)} < \frac{\Delta x}{x}.$$

Cuando Δx se positivo y suficientemente pequeño. De aquí se deduce:

$$\frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x} < \frac{K(x)}{x} = K^*(x)$$

o pasando al límite:

$$K'(x) < K^*(x).$$

La desigualdad resultará satisfecha cuando los costes medios sean descendentes (cf. principios III y IIIa). Esto es también de aplicación al ejemplo numérico de Schmalenbach.

Podemos, por tanto, afirmar que nuestra definición de los costes regresivos coincide con la de Schmalenbach. Resulta, pues, que los costes regresivos son costes cuyo promedio decrece cuando la velocidad de producción es creciente.

3. Costes proporcionales.—Schmalenbach los caracteriza del siguiente modo: "Si el grado de empleo disminuye a la mitad, los costes descienden hasta dicha mitad; si crece la cantidad producida hasta el doble, los costes también aumentarán hasta el doble" (20). En general, resultará, por tanto, que:

$$K(x) = x \,.\, K(1)$$

con lo que:

$$K'(x) = K(1).$$

Tendremos, por tanto:

$$K^*(x) = \frac{x \,.\, K(1)}{x} = K(1) = K'(x)$$

como condición para que los costes sean "proporcionales".

---

(20) L. c., pág. 32.

4. COSTES PROGRESIVOS.—Lo mismo que para los costes regresivos, se indica aquí que los costes progresivos habrán de satisfacer la condición:

$$K'(x) > K^{*}(x)$$

es decir, que también aquí coincide nuestra definición con la de Schmalenbach.

La introducción de los conceptos "regresivo" y "progresivo" es muy útil como fórmula de expresión abreviada. Por el contrario, el concepto "costes proporcionales" resulta superfluo; ya que los costes totales sólo son, en general, "proporcionales" en un punto, a saber: en el óptimo de la explotación (del mismo modo los costes variales lo son en el mínimo de la explotación).

II

El factor proporcional

Si x_1 y x_2 son dos valores distintos de la velocidad de producción x, factor proporcional correspondiente que vamos a designar con la letra Q, será:

$$Q = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

El factor proporcional es, por tanto, el cociente de las diferencias de la función de costes totales que corresponde a las dos velocidades de producción x_1 y x_2. De manera abreviada podremos también escribir:

$$Q = Q(x_1, x_2) .$$

Schmalenbach ha explicado (21) el factor proporcional (22) "para el cálculo del valor en muchos casos". La importancia de esta afirmación no radica tanto en el terreno teorético (el factor proporcional no es otra cosa que un valor aproximado de los costes marginales; la teoría de la productividad marginal, que establece el principio: "costes marginales igual al precio", tiene sus orígenes ya en Ricardo y Thünen) como en el práctico; el mérito de Schmalenbach consiste en haber sido el primero que ha introducido este valor como valor de cálculo, en el cálculo práctico de los costes.

---

(21) Dos fórmulas que representan una depuración del principio proporcional, son las siguientes: llamemos f a la velocidad de producción a realizar y B al precio del mercado. Si tenemos $Q(x_1, x_2)$ y se da $Q = P$, tendremos

$$s \approx \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Si tenemos $Q_1 = Q(x_1, x_2)$ y $Q_2 = Q(x_2, x_3)$ y se da $x_1 < x_2 < x_3$, así como $Q_1 < P < Q_2$, resultará:

$$s \approx \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{P - Q_1}{Q_2 - Q_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{2}.$$

La demostración se obtiene considerando a la función de costes totales en el intervalo estudiado, de manera aproximada, como un polinomio de segundo grado, y aplicando al cálculo diferencial el principio del valor medio.

De la misma manera se obtiene la siguiente fórmula de aproximación para los costes marginales $K'(x)$ de la velocidad de producción x: si x_1 y x_2 son dos velocidades de producción, que se encuentran próximas a x, y resulta $x_1 < x < x_2$, tendremos, si hacemos $Q(x_1, x) = Q_1$ y $Q(x, x_2) = Q_2$:

$$K'(x) \approx \frac{(x_2 - x)\, Q_1 + (x - x_1)\, Q_2}{x_2 - x_1}.$$

(22) L. c., pág. 52. En la pág. 53, SCHMALENBACH explica que también el precio compensatorio debe ser considerado en relación con los costes marginales. Una comparación de esta afirmación con el estudio realizado por nosotros, 4.° apartado del capítulo 3.°, muestra que sólo podemos estar de acuerdo con él en esta cuestión cuando existe, para el bien calculado, acceso al mercado en libre concurrencia.

Ha señalado que bajo ciertas hipótesis se debe producir de tal manera que el factor proporcional perteneciente al entorno de la velocidad de producción realizada sea aproximadamente igual al precio de mercado. Este teorema resulta tanto más exacto cuanto menos se diferencie el factor proporcional de los costes marginales correspondientes a la velocidad de producción realizada.

III

Fraccionamiento de los costes

En el "fraccionamiento de los costes" hemos de detenernos más que en los puntos que acabamos de tratar. Precisamente sobre esta cuestión reina un gran confusionismo. Los propios estudios de Schmalenbach no resultan muy claros y nos parece que requieren una interpretación. Cierto que han sido interpretados y ampliados con mucha frecuencia. Pero sólo conocemos una interpretación a la que podamos considerar como libre de toda objeción: es la monografía del Dr. Kosiol: "Kostenauflösung und proportionaler Satz" en Z. f. h. F., 1927. Posteriormente ha aparecido otra monografía del Dr. Kalischer ("Der Widerspruch zwischen mathematischer und buchtechnischer Kostenauflösung", Z. f. h. F., abril 1929) en la que se interpreta correctamente el fraccionamiento de los costes. Sin embargo, Kalischer no se limita a la simple interpretación, sino que presta singular atención al caso en que bajan los costes marginales, es decir, cuando se da la ley de la productividad creciente. En Schmalenbach falta un estudio de este caso y tampoco se encuentra en Kosiol, ya que éste hace una interpretación pura. Por consiguiente, no estamos de acuerdo con Kalischer cuando opina que Kosiol "se ha dejado equivocar" por el ejemplo de Schmalenbach. El ejemplo de Schmalenbach tampoco muestra "relaciones extraordinarias", sino que es simplemente un caso especial, a saber: aquél en el que los costes marginales crecen desde el principio, es decir, cuando la explotación sigue la ley de la productividad decreciente.

En lo referente a la interpretación del "fraccionamiento de los costes" de Schmalenbach, nos remitimos a la monografía de Kosiol anteriormente citada, ya que consideramos su trabajo como definitivo en esta materia. Por consiguiente, podemos pasar al análisis.

Schmalenbach fracciona los costes en un "elemento" proporcional y en otro fijo. Pero sería un error el creer que el elemento fijo tiene algo que ver con los costes fijos definidos anteriormente. Para Schmalenbach este punto no está muy claro. Kosiol muestra, por el contrario, la única interpretación posible. De todos modos el nombre "elemento fijo" fué una elección desafortunada. Pero el hecho de que dicho "elemento fijo" en el "Selbstbrostensechnung" se denomine en el ejemplo de la página 45 "costes fijos", hace pensar si Schmalenbach es también de la opinión de que elemento fijo y costes fijos sean idénticos. Esta impresión se afirma a la vista de los estudios de Schmalenbach en su "Kontenrahmen" (23). Aquí parece opinar, como también sostiene Maletz (24), que sólo existen costes fijos y proporcionales, y que los costes regresivos y progresivos se componen de las otras dos categorías. Frente a esto podemos afirmar lo siguiente: en el supuesto de que, por la expresión "proporcional", se quiera dar a entender realmente el concepto matemático correspondiente, la tesis en cuestión no puede mantenerse respecto a los costes progresivos, y respecto a los costes regresivos sólo se mantiene cuando éstos siguen una trayectoria lineal, es decir, cuando la función de costes totales sea lineal y regresiva.

El fraccionamiento de los costes se practica de la siguiente forma: el factor proporcional se multiplica por una de las dos velocidades de producción correspondientes y se sustrae el producto de los costes totales. El resto (en los dos casos aparece la misma diferencia) se denomina por Schmalenbach elemento fijo de los costes totales. Si conservamos las denominaciones anteriores y designamos con la letra f al "elemento fijo", tendremos:

$$K(x_1) - x_1 \, . \, Q(x_1\,,\,x_2) = K(x_2) - x_2 \, . \, Q(x_1\,,\,x_2) = f = f(x_1\,,\,x_2)\,.$$

Respecto a la longitud del intervalo $(x_1\,,\,x_2)$ no se encuentra ninguna afirmación explícita en Schmalenbach. Pero como parte de

(23) L. c., pág. 31 y siguiente.
(24) "Z. f. h. F.", 1926, pág. 293.

la hipótesis de que los costes totales siguen una trayectoria lineal en dicho intervalo (25), el intervalo tiene que ser pequeño, ya que dicha hipótesis es tanto más exacta cuanto menor sea el intervalo, es decir, cuando tienda a cero. Entonces Q pasa a K′, y obtenemos "el elemento fijo" como función de la velocidad de producción por medio de la ecuación

$$f = K(x) - x \, . \, K'(x) = f(x) \, .$$

En general, f no es constante en ningún intervalo por muy pequeño que éste sea (26). Sólo existe un punto en el que f coincida con K_I. Es el mínimo de la explotación. Si establecemos, por tanto,

$$K \;\; = f = K(x) - x \, . \, K'(x)$$

tendremos:

$$x \, . \, K'(x) = K(x) - K_I = K_{II}\,(x)$$

$$K'(x) = \frac{K_{II}\,(x)}{x} = K_{II}^{*}\,(x) \, .$$

Esta ecuación solamente resulta satisfecha en el mínimo de la explotación. Podemos, sin embargo, determinar la forma de una función que cumpla en todo su desarrollo la condición de que el elemento fijo sea igual a los costes fijos. Entonces la ecuación anterior resultará satisfecha para todos los valores de f. La función de costes totales obtenida por la integración de dicha diferencial es lineal. K′ (costes marginales) es constante. La forma general de tal clase de función es:

$$K(x) = K_I + x \, . \, K' \, .$$

---

(25) L. c., pág. 28. SCHMALENBACH utiliza aquí la expresión "unitario", pero lo que se quiere decir es lineal.

(26) Si se quiere hacer depender la magnitud Q con arreglo a la expresión del texto de SCHMALENBACH en la forma ofrecida primeramente, de los dos grados de ocupación x_1 y x_2, es decir, considerándolos como cocientes de diferencias, el resultado será el mismo, pero la representación se haría muy complicada.

Esta es una función muy especial que por lo demás no puede darse en la economía de concurrencia, ya que sigue la ley de la productividad constante (27).

Quizá resulte interesante representar geométricamente la diferencia existente entre "costes fijos" = costes constantes) y "elemento fijo". En la figura 14 se encuentran representados sobre el eje de ordenadas tanto los "costes fijos" como el "elemento variable". Los "costes fijos" vienen medidos por la recta O A. El "elemento fijo", correspondiente a una velocidad de producción x, es la recta trazada desde el origen hasta el punto de intersección del eje de

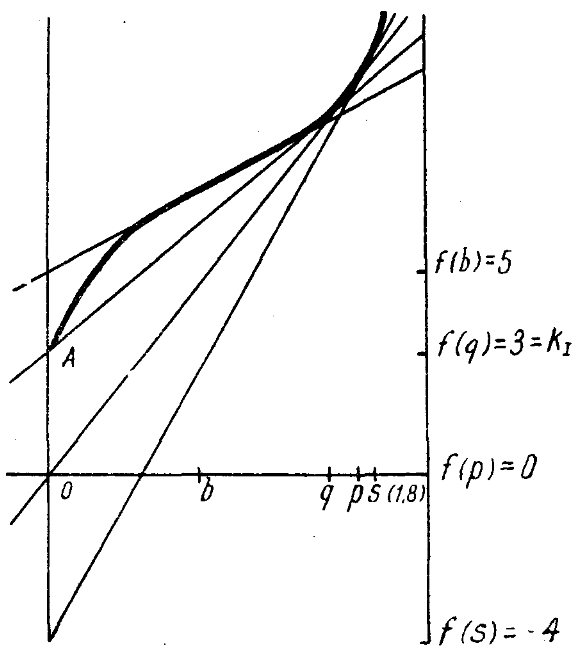

Figura 14.

(27) Por consiguiente, resulta inadmisible el considerar a la función de costes totales de una empresa que actúe en régimen de libre concurrencia, aun cuando sólo sea de manera aproximada, como lineal, tal y como lo hace LEHMANN en su monografía "Grundsätzliche Bemerkungen zur Frage der Abhängigkeit der Kosten vom Beschäftigungsgrad" (Betriebswirtschaftliche Rundschau, 1926, pág. 146).

ordenadas con la tangente a la curva de costes totales en el punto perteneciente a la velocidad de producción correspondiente. (punto $[x, K(x)]$).

f es positiva cuando existen costes regresivos y negativa cuando son progresivos. Por consiguiente, se puede utilizar f o $\dfrac{f}{K_1}$ también como medida de la regresión, o de la progresión. f coincide con la pérdida (cuando es positiva) o con el beneficio (cuando es negativa) que surge cuando las velocidades de producción son ofrecidas a sus costes marginales (es decir, en la economía de concurrencia). Es imposible, sin embargo, deducir de la altura del "elemento fijo", la altura de los "costes medios".

Resumiendo el resultado de nuestra exposición, tenemos:

1. La afirmación de que los costes regresivos son la suma de un elemento "proporcional" y uno "fijo" (así como la afirmación correspondiente para los costes prgoresivos) no es otra cosa que una parte de la definición del elemento fijo.

2. La afirmación de que los costes regresivos son la suma de los costes proporcionales y los costes fijos (en el sentido de la definición original de los costes fijos), es incorrecta. No es posible obtener una función de costes regresivos cualquiera sumando a los costes fijos una función lineal, es decir, una función constante o en forma escalonada.

3. El concepto "productividad fija" que se establece en el análisis de los costes progresivos no tiene, en realidad, nada que ver con los costes fijos.

4. El nombre "elemento fijo" no tiene objeto, ya que no se observa qué propiedad se quiere señalar con el adjetivo "fijo".

2.—*Teoría de la producción conjunta*

Hemos de suponer que el contenido de la sección "Der Kalkulationswert bei Kuppelprodukten" (28) es suficientemente conocido, con lo que se evita el tener que citarlo literalmente. Se trata

(28) L. c., pág. 28 y siguientes.

aquí de la producción de dos bienes en una proporción fija. Aparece una particularidad en el hecho de que la demanda se encuentra graduada con arreglo a una escala de aplicación, mientras que los costes son proporcionales a la velocidad de producción. Sabemos que esto último solamente resulta posible cuando la empresa posee un monopolio. En este sentido es en el que podemos explicar también la escala de aplicación. Por consiguiente, podemos establecer el siguiente supuesto: por la venta de 1.000 kg. del producto A se obtienen, por 100 kg., 150 marcos; obteniendo, por tanto, una ganancia de 1.500 marcos. Si no se venden 1.000 kilogramos, sino 1.000 kg. + 1.500 kg. = 2.500 kg. (todo a un precio), la ganancia pasará de 1.500 marcos a $1.500 + \dfrac{1.500.120}{100}$ marcos = 3.300 marcos. Con lo que el aumento de la venta en 1.500 kilogramos implica un aumento de la ganancia de 1.800 marcos, es decir, 120 marcos por cada 100 kg. Una ganancia total de 3.300 marcos para 2.500 kg. significa que éstos son vendidos a 132 marcos cada 100 kg., etc. Por consiguiente, podemos deducir de la escala de aplicación una función del precio del producto A e igualmente del producto B.

Si designamos con $E(x)$ a la ganancia de una determinada cantidad x del producto A, podremos, llamando x_1 a la primera cantidad en la escala de aplicación, x_2 a la suma de la primera y de la segunda, x_3 a la suma de la primera, segunda y tercera, etc., obtener como sigue la fórmula general para el establecimiento de "una escala de aplicación" de la función de precio:

Como para x_1 se obtiene la ganancia $E(x_1)$, la unidad de producto de x_1 se valorará con $\dfrac{E(x_1)}{x_1}$; pero esto no es otra cosa que el precio de x_1, es decir, $P(x_1)$. El crecimiento de $E(x_2)$ respecto a $E(x_1)$ se obtiene por la cantidad de venta adicional $x_2 - x_1$; el segundo fin de aplicación obtendrá, por tanto, como valoración de la unidad de cantidad:

$$\frac{E(x_2) - E(x_1)}{x_2 - x_1} \; ;$$

e igualmente para el tercer incremento de la cantidad $x_3 - x_2$:

$$\frac{E(x_3) - E(x_2)}{x_3 - x_2}$$

y así sucesivamente.

Tenemos que operar con cocientes de diferencias de la función E (x). Si observamos los incrementos de cantidades de una serie que tienda a 0, obtendremos el valor de aplicación de la unidad de cantidad en un punto cualquiera, es decir, el valor por unidad que corresponde a una velocidad de producción determinada, cuando se dé un incremento mínimo. Por consiguiente, podremos sustituir (y ésta es la consideración más exacta), la escala de aplicación por la derivada de la ganancia como función de la velocidad de producción. En otras palabras, hemos de sustituir la escala de aplicación por la función de la productividad marginal $E'(x)$.

Si el precio es constante y existe, por tanto, libre concurrencia, la escala de aplicación sólo se compondrá de un grado de aplicación con una cantidad de producción arbitraria y de un valor de aplicación, que será igual al precio. En el ejemplo que encontramos en Schmalenbach, tenemos que operar en régimen de monopolio, ya que la función de costes se supone que es lineal. En virtud del principio fundamental de la producción económico lucrativa, el valor de aplicación marginal (es decir, la productividad marginal) tiene que ser igual a los costes marginales. El ejemplo que pone Schmalenbach (29) debe ser considerado con una estructura distinta. Nos encontramos aquí con un vector bidimensional cuyas componentes son x e y. Se da la proporción fija: $x : y = 1 : 3$. La unidad de cantidad debe ser representada por el vector (25,75 = ambos bienes están medidos en kilogramos). El fin de aplicación de los dos productos A y B lo unimos de tal modo, que dentro de un grado o categoría existe para cada producto un valor de aplicación constante (medio). Obtenemos así la siguiente tabla, cuya relación con el esquema de Schmalenbach resulta evidente.

---

(29) L. c., págs. 29 y 30.

Grados de aplicación	Producción total de A	Producción total de B	Cantidades de aplicación de A		Cantidades de aplicación de B		Valores de aplicación cada 100 kilogramos de A	Valores de aplicación cada 100 kilogramos de B	Valor de aplicación del vector unidad (25,75)	Grados de aplicación
1	1.000	3.000	1.000		3.000	5.000	150	800	637,50	1
2	1.667	5.000	667	1.500	2.000		120	800	630,—	2
3	2.500	7.500	833		2.500	4.000	120	700	555,—	3
4	3.000	5.000	500	1.000	1.500		100	700	550,—	4
5	3.500	10.500	500		1.500	6.000	100	650	512,50	5
6	5.000	13.000	1.500	3.000	4.500		70	650	505,—	6
7	6.500	13.500	1.500		4.500	8.000	70	500	392,50	7
8	7.667	23.000	1.167	2.000	3.500		50	500	387,50	8
9	8.500	25.500	833		2.500	7.000	50	400	312,50	9
10	10.000	30.000	1.500	1.500	4.500		—	400	300,—	10
			10.000	10.000	30.000	30.000				

De dicha tabla se obtiene el vector de producto más favorable, teniendo en cuenta el hecho de que los costes marginales son constantes y ascienden para cada velocidad de producción a 450 marcos por unidad de vector: dicho vector comprende los grados de aplicación 1 — 6 y asciende a (5.000, 15.000).

Si observamos el cálculo de Schmalenbach para el nivel de producción más favorable podemos afirmar que hemos actuado de igual modo que él. También él calcula el valor de aplicación marginal para el producto combinado y lo compara con la cifra de los costes marginales (que aquí es, al mismo tiempo, la de los costes medios). Hemos de considerar, por el contrario, impracticable su intento (30) de establecer un valor de cálculo especial para cada uno de los productos relacionados entre sí. No sólo los cálculos se prestan a objeciones (no habría lugar a ellas si coincidiesen exactamente el

(30) L. c., págs. 30 y 31.

valor de aplicación marginal y la cifra de los costes marginales), sino que el objetivo, en nuestra opinión, resulta impracticable (en virtud de lo establecido anteriormente (31) respecto al cálculo de los costes para productos acoplados); con lo que, naturalmente, sólo debe decirse algo contra lo principal y no contra la posibilidad de llevar a cabo un cálculo separado utilizable en la práctica, considerando sólo al producto principal como verdadero producto y sustrayendo la ganancia del producto subsidiario de los costes totales del producto principal (32).

D. NOTAS Y EJEMPLOS PARA LA EVALUACION PRACTICA

I

La finalidad primera y fundamental del cálculo de los costes de una empresa debe ser el establecer, de la manera más exacta y detallada, la función de costes totales; y esto, debido al hecho de que todas las demás funciones que aparecen se deducen de la función de costes totales. La obtención de esta última se realiza por medio de una tabla. En principio resulta posible expresar, por medio de tablas, funciones con gran número de variables independientes; pero la dificultad va en aumento cuando crece el número de las variables (de las componentes del vector de producto). Si para una función unidimensional se tienen 10 valores, para lograr la misma exactitud en el caso de una función de n dimensiones se necesitarán 10^n valores.

La función de costes totales no necesita establecerse para la totalidad de su sector de definición, sino sólo para aquella zona que interesa a la producción. Los valores de la función obtenidos empíricamente no necesitan estar muy próximos entre sí; por la interpolación se obtienen los valores intermedios.

Hay que tener en cuenta que los valores de la tabla varían en virtud de dos momentos, o en términos matemáticos, que la relación funcional varía: por la variación del precio de compra y por

(31) Cf. nota 6.

(32) Cf. introducción al cap. 3.

la alteración del método de producción, en especial por la racionalización. Para eliminar las fluctuaciones de precios la teoría de la economía de la empresa ha arbitrado algunos métodos: cuentas de compensación, por medio de las cuales los medios de producción comprados siguen siendo entregados a un precio compensatorio fijo a las propias explotaciones. De modo que la tabla de costes no es aceptada por las oscilaciones de precios, y la función válida para un momento determinado se obtiene de la tabla por medio de una simple corrección. Sin embargo, pueden surgir alteraciones en el método de producción, tanto a causa de dichas fluctuaciones del precio como en virtud de progresos técnicos y de organización; entonces la tabla establecida resulta, la mayoría de las veces, inútil y ha de ser sustituída por otra.

Si de esta manera se ha logrado conocer, de manera aproximada, la función de costes totales, podremos decir que se ha conseguido lo más difícil. Se podrá ya utilizar la tabla y obtener, por medio de sencillas operaciones de cálculo, todas las magnitudes necesarias para la regulación de las velocidades de producción, o sea de la política de precios. Un objetivo subsiguiente se encuentra en la investigación y simplificación de la función de costes totales. Esto se facilita, en primer lugar, por el hecho de que los costes, en su determinación empírica se obtienen, en lo posible, de manera ordenada. Pero hay que evitar el establecer distribuciones de costes que contradigan los principios de los costes; por ejemplo, no distribuir, entre los distintos productos o productos intermedios, costes no calculables directamente con arreglo a la relación existente entre los calculables.

Tal estructuración hace posible el establecimiento de relaciones de causalidad, que son especialmente útiles cuando existen variaciones en el método de producción, ya que bajo las mismas circunstancias se evita, en parte, el establecimiento de una nueva tabla de costes. Además, es más sencillo incluir series numéricas sencillas por medio de expresiones analíticas y establecer luego sintéticamente la función de costes totales a través de estas funciones parciales. La estadística matemática tiene aquí la palabra. Sus métodos permiten, en virtud de los datos empíricos, obtener resultados relativamente exactos. Un ejemplo de esto se encuentra anteriormente en la nota 1, en la depuración presentada del factor proporcional.

II

1. Merece una especial atención la cuestión de si resulta posible obtener, de las reflexiones teoréticas practicadas, una expresión analítica, que pueda servir como fórmula de aproximación general para las funciones de costes totales continuas y regulares. Una aproximación analítica para los costes totales se obtiene, en el caso concreto, comprobando varias clases de funciones del material empírico y escogiendo la mejor. El fin que aquí se persigue es la obtención de una fórmula, que sea al mismo tiempo lo más sencilla y exacta posible. Si se logra determinar, para una cierta materia, una "fórmula general" por la vía teorética, no es de ningún modo cierto, pero sí probable, que la fórmula general represente, en los distintos casos, la mejor aproximación. Se tendría entonces que comprobar también, cada vez, la fórmula general —*junto con las otras expresiones analíticas.*

El problema de la "fórmula general" juega un gran papel en muchos sectores estadísticos. Es famosa la "courbe des revenues" de Pareto (33), que representa una fórmula de aproximación de dos a cuatro parámetros para la distribución del ingreso en una economía. Recientemente, Gibrat (34) ha intentado obtener una fórmula general del "efecto proporcional" para una serie de "desigualdades económicas", de una reflexión teorética de la "ley del efecto proporcional" ("loi de l'effet proportionel"); al parecer, con buen éxito.

Moore (35) establece fórmulas de aproximación para una serie de funciones económicas (demanda, oferta, costes, producción), que obtiene de la siguiente manera: para determinar una función $y = f(x)$ iguala la expresión $\frac{x}{1} \cdot \frac{dy}{dx}$ a un polinomio de segun-

(33) PARETO: *Cours...*, II, pág. 299 y siguientes, en especial págs. 305 y 306.

(34) GIBRAT: *Les inegalités economiques*, París, 1931.

(35) MOORE: *Synthetic economisch*, 1929.

do, primer o cero grados y obtiene $f(x)$, integrando la ecuación diferencial así obtenida. De manera análoga procede para la determinación de las funciones con varias variables. Dando además formas de aproximación polinómicas para la función $f(x)$.

2. Diversos resultados de nuestra teoría hacen posible aproximar la función de costes totales regular por un polinomio de tercer grado. Las razones de ello son:

1.—La función de costes totales es monótona creciente, tiene un punto de inflexión para $x = b$ y sigue hasta el infinito sin asíntotas.

2.—Los costes marginales disminuyen hasta $x = b$ y crecen, monótonamente, para $x > b$, donde crecen por encima de cualquier límite (36).

3.—El crecimiento de los costes marginales es negativo para $x < b$ y positivo para $x < b$, por lo que se puede lograr una buena aproximación por medio de una recta con crecimiento positivo, que corte al eje x en el punto b.

Obtendremos, por tanto, la "fórmula general":

$$K(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 . \qquad [1]$$

Respecto a [1] podemos hacer las siguientes afirmaciones:

a) Como $K(0) = K_I$, tendremos

$$K_1 = A > 0 . \qquad [2]$$

b) Resulta:

$$K'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 . \qquad [3]$$

Como $K(x)$ crece monótonamente, y el mínimo de dicho crecimiento se da $x = b$, resultará

$$B = K'(0) > 0 . \qquad [4]$$

c) Tendremos que

$$K''(x) = 2C + 6Dx . \qquad [5]$$

(36) Principio XVIII.

Como K″ (x), según lo dicho anteriormente, es una recta con crecimiento positivo, tendremos

$$D > 0 . \qquad [6]$$

Con arreglo a la definición de b, resulta

$$2 C + 6 D b = 0 . \qquad [7]$$

De [7] se deduce

$$C > 0 . \qquad [8]$$

y

$$b = - \frac{C}{3 D} . \qquad [9]$$

d) Como además

$$K^* = \frac{A}{x} + B + C x + D x^2 . \qquad [10]$$

y

$$K^* = B + C x + D x^2 . \qquad [11]$$

En virtud del principio IV resultará, teniendo en cuenta [3] y [11]

$$B + 2 C q + 3 D q^2 = B + C q + D q^2$$

o

$$q (C + 2 D q) = 0 .$$

Como (37) $q = 0$, tendremos

$$q = \frac{C}{2 D} . \qquad [12]$$

(37) Para $q = 0$ el principio V no resultaría válido: resulta $K''(0) = 2 C < 0$ en virtud de [8].

de donde, teniendo en cuenta [9], resulta

$$2\,q = 3\,b\,. \qquad [13]$$

e) Con arreglo al principio 1, resulta

$$B + 2\,C\,p + 3\,D\,p^2 = \frac{A}{p} + B + C\,p + D\,p^2$$

o

$$A - C\,p^2 - 2\,D\,p^3 = 0 \qquad [14]$$

de donde se obtiene también, en virtud de [12]:

$$p^3 - p^2\,q = \frac{A}{2\,D}\,. \qquad [15]$$

f) Del teorema fundamental del principio del lucro económico se deduce:

$$E'(s) = B + 2\,C\,s + 3\,D\,s^2\,. \qquad [16]$$

Para la libre concurrencia tenemos:

$$P = B + 2\,C\,s + 3\,D\,s^2\,. \qquad [17]$$

de donde, con algunas transformaciones, se obtiene:

$$s = \frac{1}{3\,D}\left(-C + \sqrt{3\,D\,(P - B) + C^2}\right). \qquad [18]$$

El valor negativo de la raíz no se puede dar en virtud de la segunda condición de máximo ($K''(s) > 0$).

En virtud de [9] resulta también:

$$s = b + \sqrt{\frac{P - B}{3\,D} + b^2}\,. \qquad [19]$$

III

Si la función de costes totales de una empresa se determina por medio de una tabla, de una curva o de una expresión analítica, se podrá utilizar para regular la producción. A continuación se ofrecen dos ejemplos. En el primero se supone una función de costes totales regular y normal, que viene dada por una expresión analítica. En el segundo se supone una función de costes totales regular con varias zonas de discontinuidad, que viene dada por una curva.

Ejemplo N.° 1:

a) La curva de costes totales de la figura 4 viene expresada por la ecuación (38)

$$K(x) = 24 + 4{,}6\,x - 0{,}6\,x^2 + \frac{1}{30}\,x^3 . \qquad [20]$$

De aquí se deducen, para las curvas restantes, las expresiones analíticas siguientes:

$$K'(x) = 4{,}6 - 1{,}2\,x + 0{,}1\,x^2$$
$$K''(x) = -\,1{,}2 + 0{,}2\,x$$

$$K^*(x) = \frac{24}{x} + 4{,}6 - 0{,}6\,x + \frac{1}{30}\,x^2$$
$$K^*_{II}(x) = 4{,}6 - 0{,}6\,x + \frac{1}{30}\,x^2 .$$

Para b, en virtud de [9], obtenemos: $b = 6$.

Para el mínimo de la explotación, en virtud de [12] ó [13]: $q = 9$.

Para el óptimo de la explotación resulta, en virtud de [15], la ecuación característica:

$$p^3 - 9\,p^2 = 360 .$$

(38) Las ordenadas de la curva de costes totales se encuentran dibujadas allí a una escala cuatro veces menor que las ordenadas de las curvas restantes.

Dicha ecuación se satisface para $p \approx 11{,}65$. También se cumple el principio II:

$$K''(p) = -1{,}2 + 0{,}1 \,.\, 11{,}65 = 1{,}13 > 0\,.$$

Para la oferta de la empresa, en virtud de [19], resulta, después de algunos cálculos:

$$s = b + \sqrt{10\,(P - 1)}\,.$$

Para una determinación más exacta de la función de oferta, observemos que la cantidad ofrecida, en el caso de que se produzca, no puede ser nunca menor que el mínimo de la explotación, y que la unción de oferta sólo es definida por la expresión analítica anterior para precios que no sean menores que los costes marginales en el mínimo de la explotación. Para todos los precios que resulten menores, la cantidad ofrecida es igual a cero. Los costes marginales en el mínimo de la explotación ascienden a:

$$K'(9) = 4{,}6 - 1{,}2 \,.\, 9 + 0{,}1 \,.\, 9^2 = 1{,}9\,.$$

Obtenemos, por tanto, para la expresión analítica anterior, las dos desigualdades:

$$s > 9;\ P > 1{,}9\,.$$

De la primera desigualdad se deduce que siempre se debe tomar el valor positivo de la raíz anterior. La segunda desigualdad, que se deduce de la primera, expresa el hecho de que la función de oferta solamente es definida por la expresión analítica anterior para $P > 1{,}9$. Para todas las $P < 1{,}9$ desaparece s idénticamente. Resulta aquí, por tanto: $s = 0$.

Así habremos determinado la función de oferta como sigue:

Para $p > 1{,}9$, resulta: $s = 6 + \sqrt{10\,(P - 1)}$; para $P < 1{,}9$, resulta: $s = 0$.

6.—El precio óptimo es igual a los costes marginales en el óptimo de la explotación. Tendremos:

$$K'(p) = 4{,}6 - 1{,}2 \,.\, 11{,}65 + 0{,}1 \,.\, 11{,}65^2 \quad 4{,}2\,.$$

El precio óptimo asciende, por consiguiente, a 4,2.

Para un precio que se encuentre comprendido entre 1,9 y 4,2, la empresa sólo podrá realizar una velocidad de producción que se encuentre situada entre 0 y 11,65. Aquí obtiene un beneficio bruto que no cubre los costes constantes. Sufre, por tanto, una pérdida. Como sus costes constantes ascienden a 24, tendrá un bebeficio bruto que se encontrará por debajo de 24.

Si el precio es mayor que 4,2 la empresa realizará una velocidad de producción mayor que 11,65. Su beneficio bruto será mayor que 24, obteniendo un beneficio extraordinario.

7.—Si el precio es, por ejemplo, de 3,5 la oferta de la empresa ascenderá a:

$$s = 6 + \sqrt{10\,(3{,}5 - 1)} = 11\,.$$

Los costes totales ascienden aquí a:

$$K\,(11) = 24 + 4{,}6\,.\,11 - 0{,}6\,.\,11^2 + \frac{11^3}{30} \approx 46{,}37\,.$$

Los costes variables ascienden a: $K\,(11) - K_I = 22{,}37$.
El ingreso: $11\,.\,3{,}5 = 38{,}5$.
El beneficio bruto: $38{,}5 - 22{,}37 = 16{,}3$.
La pérdida: $24 - 16{,}13 = 7{,}87$.

8.—Si el precio es de 5,9 la oferta de la empresa ascenderá a:

$$s = 6 + \sqrt{10\,(5{,}9 - 1)} = 13\,.$$

Los costes totales ascienden aquí a:

$$K\,(13) = 24 + 4{,}6\,.\,13 - 0{,}6\,.\,13^3 + \frac{13^3}{30} \approx 55{,}63\,.$$

Los costes variables ascienden a: $K\,(13) - K = 31{,}63$.
El ingreso: $13\,.\,5{,}9 = 76{,}7$.
El beneficio bruto: $76{,}7 - 31{,}63 = 45{,}07$.
El beneficio neto: $45{,}07 - 24 = 21{,}07$.

9.—Si la empresa no realizase más que el óptimo de la explotación, su situación sería más desfavorable cuando el precio fuese distinto de 4,2.

Para un precio de 3,5 la pérdida ascenderá a:

$$[K^* (p) - P] \cdot p = (4{,}2 - 3{,}5) \cdot 11{,}65 = 8{,}15 \, .$$

Es, por tanto, mayor en 0,28 que si se hubiese realizado la velocidad de producción 11.

Para un precio de 5,9 el beneficio ascendería a:

$$[P - K^* (p)] \cdot p = (5{,}9 - 4{,}2) \cdot 11{,}65 = 19{,}80 \, .$$

Por tanto, es menor en 1,2 de lo que lo sería en el caso de que se hubiese realizado la velocidad de producción 13.

El hecho de que las dispersiones sean relativamente pequeñas (en el primer caso 3,6 por 100, en el segundo 5,7 por 100 de la cifra más favorable en cada caso) se explica teniendo en cuenta que la elasticidad de nuestra curva de oferta es relativamente pequeña. En el óptimo de la explotación asciende a 0,319.

Ejemplo N.° 2 (figura 15).

En una función general de costes totales $K(x)$ se encuentran comprendidas la función de los costes marginales $K'(x)$, la función de costes medios $K^*(x)$ y la función de los costes variables medios $K^*_{II}(x)$.

De su representación podemos deducir los siguientes hechos:

1. La velocidad de producción mínima es 3. Aquí los costes variables medios alcanzan su mínimo para $K^*_{II}(3) = 2$. Formalmente existe un punto de intersección con la curva de los costes marginales.

2. El óptimo de la explotación se da para $x = 8$. Aquí los costes medios alcanzan su mínimo para $K^*(8) = 5{,}5$. También aquí se mantienen, desde el punto de vista formal, las leyes de los costes.

3. Si el precio es $P = 5$, las velocidades de producción 3,8 y 11 tendrán costes marginales que serán iguales a los precios. Como el

precio es menor que el precio óptimo, $x = 11$ se descarta. Por consiguiente, las velocidades de producción 3 y 8 deberán ser comparadas entre sí.

$$G(3) = 5 . 3 - K(3) = 15 - 26 = -11$$
$$G(8) = 5 . 8 - K(8) = 40 - 44 = - \ 4$$

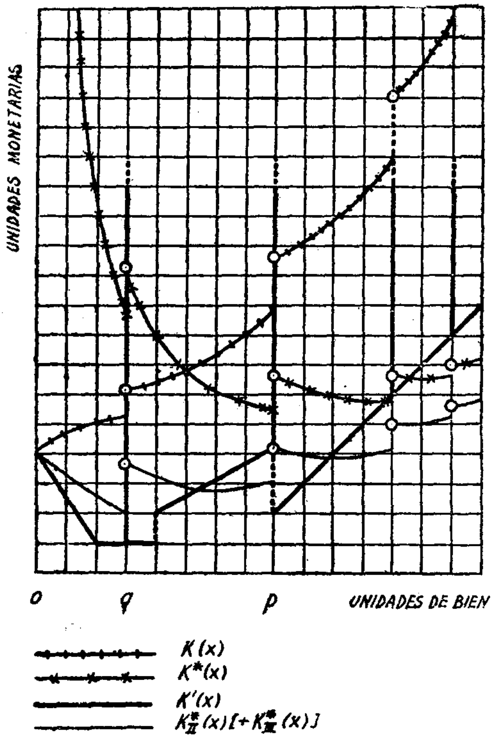

Figura 15.

$x = 8$ es la velocidad de producción más favorable; por consiguiente, resulta $s(5) = 8$.

Se puede mostrar fácilmente que no se puede dar $x = 11$:

$$G(11) = 5 . 11 - K(11) = 55 - 63{,}8 = -8{,}8 .$$

De donde se infiere que la velocidad de producción 11 resulta más desfavorable que la 8.

4. Si el precio es $P = 7$ aparecerá, en primer lugar, las velocidades de producción 3, 8, 12 y 13. Como 7 es mayor que el precio óptimo 5,5, 3 se descarta. Por lo que habrá que comparar G (8), G (12) y G (13).

Tendremos:

$$\begin{aligned} G\ (8) &= 7\ .\ \ 8 - K\ (8) = 56 - 44 &&= 12 \\ G\ (12) &= 7\ .\ 12 - K\ (12) = 84 - 69{,}5 &&= 14{,}5 \\ G\ (13) &= 7\ .\ 13 - K\ (13) = 91 - 85 &&= \ 6 \end{aligned}$$

La velocidad de producción más favorable es 12. Por consiguiente, tendremos:

$$s\,(7) = 12\,.$$

HEINRICH VON STACKELBERG

(*Traducido directamente del alemán por* JOSÉ LUIS GÓMEZ DELMÁS, *Licenciado en Ciencias Económicas y en Derecho.*)