TEORIA Y APLICACION
DE LOS NUMEROS INDICES

Aunque los números índices son, desde hace mucho tiempo, el objeto de publicaciones regulares de los servicios oficiales de todos los países y se han difundido ampliamente en todos los medios relacionados de cerca o de lejos con la vida de los negocios, es todavía preciso que los economistas y los estadísticos se pongan de acuerdo respecto a los procedimientos aplicables al cálculo de estos índices. La elaboración y el manejo de los números índices plantean, en efecto, problemas muy delicados tanto al teórico como al práctico ; el carácter tan inestable de la situación monetaria en el curso de estas últimas décadas ha contribuído mucho, por otra parte, a mantener e incluso aumentar el interés que suscitan estos problemas. Antes de la guerra de 1914 no era raro que, a causa de los movimientos cíclicos, el nivel de los precios sufriese variaciones del 15 y del 20 % en los países de moneda estable. Después, las fluctuaciones observables en todos los países, sin excepción, han alcanzado órdenes de magnitud mucho más considerables ; paralelamente, el uso de los números índices ha aumentado y con él la necesidad de concretar las concepciones y las técnicas de su cálculo.

En el presente artículo nos proponemos pasar revista a las diversas concepciones que han presidido la elaboración de los números índices, así como a lo esencial de las soluciones adoptadas en la práctica.

Nos referiremos especialmente a la determinación de los números índices que permiten seguir la evolución del nivel general de los precios en el tiempo y ofrecen así la posibilidad de efectuar comparaciones de una época con otra. Daremos, sin embargo, alguna indicación sobre las comparaciones en el espacio, pero este es un segundo género de investigación que todavía presenta más dificultades que el primero.

Aunque el problema de los números índices haya llamado especialmente la atención de nuestros contemporáneos, sería un error considerarlo como absolutamente nuevo ; nadie ignora la amplitud de las variaciones de los precios registrados en el siglo XVI, apenas comenzar la colonización del Nuevo Mundo ; desde esta época, el concepto de nivel general de los precios debía ser familiar a los espíritus más alertas. Sin remontarnos hasta una época tan lejana, ni detenernos en las controversias entre NOZZOLINI, que se inclinaba por la media aritmética, y GALILEO, que, apoyado por CASTELLI, señalaba sus preferencias por la media geométrica, debemos observar que las preocupaciones relativas a los números índices se remontan al comienzo de la segunda mitad del siglo pasado. En este dominio, como en tantos otros, son las preocupaciones de orden concreto las que primero han solicitado la sagacidad de los investigadores, puesto que parece bien demostrado que fueron las alzas de precios consecutivas a las guerras napoleónicas las que condujeron a algunos autores ingleses a reflexionar sobre este problema desde la primera mitad del siglo XIX. No debemos, con todo, remontar la paternidad de los números índices publicados actualmente sino a los trabajos de NEWMARCH en 1859 y de SAUERBECK en 1886, que se preocuparon especialmente de medir la influencia de las extracciones de oro sobre el nivel general de los precios. Después, pensadores notables como EDGEWORTH, MARSHALL y LUCIEN MARCH, para limitarnos a los más eminentes entre los desaparecidos, han profundizado seriamente en el problema, esforzándose en relacionarlo con otros conceptos tales como la teoría de los errores de observación. En fin, en nuestros días son numerosos los economistas o estadísticos que han aportado contribuciones definitivas a la solución de este importante problema. Tendremos ocasión de exponer en lo que sigue lo esencial de sus concepciones.

CONCEPTO GENERAL DE LOS NUMEROS INDICES

Lo mismo para los prácticos que para los teóricos, el concepto fundamental de número índice está ligado a la noción intuitiva del poder adquisitivo del dinero. Esta noción descansa a su vez en la discriminación, dentro de las variaciones de los precios de los diversos bienes, entre las que afectan exclusivamente a algunos de ellos y las relativas al conjunto de todos los precios, llamando precisamente «fenómenos monetarios» a esta segunda especie de movimientos. La teoría de los números índices tiene esencialmente por objeto definir números susceptibles de describir cuantitativamente la evolución del conjunto de los precios. Si se trata de los precios de todos los artículos, el índice correspondiente se llama «Indice del nivel general de los precios»; si no se trata, por el contrario, más que de un conjunto limitado de artículos, los índices correspondientes son «índices parciales»; tales son: el índice de precios al por mayor, el índice de precios al por menor, los índices del coste de la vida, etc.

El problema de los números índices aparece así como un caso particular del problema general de la descripción de conjuntos numéricos, problema que no es especial del dominio económico. Como ya lo señaló COURNOT, los matemáticos pueden comparar legítimamente el cálculo de tales índices al de las medias utilizadas en la Astronomía y en la Física. Yendo más lejos todavía por este camino, EDGEWORTH ha relacionado este problema con la determinación del movimiento propio del sistema solar por medio del movimiento aparente de las estrellas. En nuestros días, las preocupaciones de orden concreto han retenido más particularmente la atención de los investigadores, familiarizados sin embargo con todas las teorías propias del dominio de los números índices; este es el caso de Mr. IRVING FISHER, que cree que, en definitiva, el fin esencial de los números índices es servir de base a los contratos de préstamo. En lo que se refiere al cálculo práctico de los índices, grandes teóricos como EDGEWORTH han estimado que las consideraciones teóricas sobre las causas y las consecuencias del movimiento de los precios influyen en la elección del método de cálculo, de tal forma que éste debe fijarse en parte por el fin señalado al índice. De aquí se infiere la posibilidad de recurrir a fórmulas de tipos muy diversos, y veremos después que, en efecto, existe una gran diversidad de fórmulas. Pero, además de los conceptos teóricos a los que es preciso recurrir necesariamente, existen otras consideraciones que no pueden olvidarse en la práctica. Tales son la elección y el número de los artículos que entran en la composición del índice, la determinación de los precios y las cantidades que intervienen en la fórmula, etc.

Todo esto confiere a las aplicaciones de la teoría de los índices una gran complejidad, debida sobre todo a que los conceptos teóricos tienen a veces que ceder ante las necesidades de orden práctico, tales como el deseo de sencillez, de comodidad e incluso de rapidez en los cálculos.

No hemos hablado hasta ahora más que de los índices de precios, porque son los más antiguos y los más importantes; pero existen también índices de cantidad, que permiten seguir la evolución de algunos conjuntos numéricos relacionados con diversas ramas de la actividad económica. Así, hay índices de la producción, de las transacciones, del consumo, del comercio exterior, del tráfico por las vías de comunicación, del movimiento de las transacciones monetarias, etc. También aquí se trata de la descripción de conjuntos numéricos, y los problemas relativos al cálculo de índices de cantidad no difieren fundamentalmente de los relativos a los índices de precios. Veremos además que se establecen frecuentemente relaciones entre estos dos géneros de índices y que su cálculo se define entonces de manera correlativa. Añadiremos, por fin, que la consideración de cualquier número índice implica la referencia a una situación básica ; para la comparación en el tiempo, esta situación es una época o un período determinado ; para las comparaciones en el espacio se confrontan con los parámetros característicos de un país de referencia los demás conjuntos económicos de una misma época. Como no pretendemos entrar en los detalles de la literatura, muy importante, engendrada por el problema de los números índices, referiremos éstos a cuatro concepciones principales, que analizaremos y discutiremos sucesivamente. Son las siguientes :

I. Concepción estadística.
II. Concepción basada en el gasto.
III. Concepción monetaria.
IV. Concepción funcional.

Aunque nacidas de preocupaciones distintas, estas cuatro concepciones no se oponen realmente entre sí e incluso presentan, como probaremos a continuación, conexiones que es deseable, evidentemente, e incluso indispensable utilizar.

I. LOS INDICES ESTADISTICOS

El concepto menos elaborado de un índice de precios está representado por la relación $\frac{m}{m_0}$ de la media de los precios p de la situación considerada a la media de los precios p_0, relativa a los mismos artículos y a la situación que sirve de referencia. El poder adquisitivo del dinero se define entonces por la inversa del número índice. Sin embargo, esta fórmula sólo tiene sentido cuando se precisa la naturaleza de la media utilizada.

El procedimiento más sencillo es el de utilizar para el cálculo de $\frac{m}{m_0}$ las medias aritméticas simples; resulta para el índice una fórmula de agregación $\frac{\Sigma p}{\Sigma p_0}$; pero comprobamos inmediatamente que el uso de esta fórmula está ligado a la elección de las unidades de cantidad, puesto que cada uno de los precios p, p_0 varía según la magnitud de las unidades elegidas.

Para eliminar esta dificultad podemos caracterizar el índice de los precios, no ya por la relación de las medias de los precios, sino por la media de las relaciones de los precios de cada mercancía, es decir, por las fracciones

$$x = \frac{p}{p_0}$$

El viejo índice de SAUERBECK, utilizado para el cálculo del índice inglés y después para el del índice no ponderado de precios al por mayor de la «Statistique General», de Francia, se define como media aritmética simple de los valores de x relativos a las diversas mercancías; y responde a la fórmula:

$$a = \frac{1}{n} \Sigma x$$

designando n el número de artículos que entran en la composición del índice.

Aunque esta fórmula presenta la ventaja de la simplicidad, ¿existen razones suficientes para imponerla? ¿Qué motivos tenemos para preferirla a la media geométrica, o a la media armónica o a la mediana de las relaciones x? La única propiedad característica de la media aritmética simple es la de hacer mínima la suma de los cuadrados de las desviaciones: $\Sigma(a - x)^2$; ¿pero es suficiente esta razón? En la práctica, la cuestión sólo ofrece interés cuando las relaciones x presentan gran dispersión, pues si estas relaciones están, por el contrario, concentradas entre límites estrechos, los diversos tipos de media se diferencian entre sí muy poco, teniendo en cuenta el grado de precisión necesario. Resulta que la elección de un tipo de media está unido al análisis de la distribución de las relaciones x.

Ahora bien, este estudio ha sido ya realizado, en particular por M. M. OLLIVIER, en la obra que ha consagrado a los números indicadores de precios. Resulta de estos trabajos que en el período 1920-1924 la curva de distribución de las variables x presenta una gran asimetría, de forma que las relaciones de precios superiores a la media aritmética son mucho menos numerosas que las inferiores a la misma (aproximadamente un 40 % frente a un 60 %). Este resultado confirma, por otra parte, las observaciones hechas anteriormente por EDGEWORTH y por algunos de los autores que se habían dedicado al problema de los números índices.

Esta asimetría constituye a nuestro juicio una indicación desfavorable para la media aritmética simple, ya que, en nuestra opinión, para que una media m de los valores de x pueda considerarse capaz de caracterizar el nivel del conjunto, es preciso que la curva de distribución de los valores de la función $f(x)$ utilizada para el cálculo de esta media, satisfaga a las condiciones siguientes:

1.° Curva simétrica respecto al eje de las abscisas m, de manera que a toda desviación $(x\text{-}m)$ corresponda una desviación del mismo valor absoluto y de signo contrario, y que haya por tanto compensación entre las desviaciones de signos contrarios.

2.° Curva tal que las desviaciones más pequeñas sean las más numerosas, lo que exige un trazado descendente a partir del máximo situado sobre el eje de simetría y excluye el caso de una curva con dos vértices, cuya interpretación sería incompatible con la elección de un solo número y, por consecuencia, con la noción misma de número índice.

3.° La ordenada de la curva tiende hacia 0 al alejarse indefinidamente del eje de simetría.

El problema así planteado se reduce a determinar una función $f(x)$ cuya ley de distribución obedezca a estas tres condiciones. Conocida esta función, la media m estará definida por la relación

$$f(m) = \frac{1}{n} \Sigma f(x)$$

Las investigaciones de OLLIVIER le han permitido comprobar que la función $f(x) = \log x$ obedece a una ley de distribución que para el período estudiado (1920-1924) satisface a las tres condiciones indicadas. Resulta de ello que la media definida por esta función particular es apropiada para caracterizar el movimiento del conjunto de los precios. Esta media no es sino la media geométrica definida por la ecuación

$$\log g = \frac{1}{n} \Sigma \log x$$

Esta comprobación permite relacionar el problema del índice de precios, concebido bajo el ángulo estadístico, con la «Ley del efecto proporcional», de la que M. GIBRAT deduce interesantes conclusiones en su estudio sobre las desigualdades económicas. Podemos escribir, en efecto :

$$\log x - \log g = \log \frac{x}{g}$$

El hecho de que las desviaciones de los logaritmos respecto a sus valores medios obedezcan a los principios de compensación significa que, en lo que se refiere a los precios mismos, se debe considerar la distribución de las relaciones de los precios a su valor medio y no la de sus desviaciones respecto a esta media. Encontramos, pues, la ley del efecto proporcional, que consiste en considerar no los valores absolutos, sino los valores relativos y, por consecuencia, los logaritmos en lugar de las magnitudes mismas ; o bien, para las variaciones de los precios, las variaciones relativas en lugar de las variaciones absolutas.

Dada la semejanza de la curva de distribución de $\log x$ obtenida por M. OLLIVIER con una campaniforme, es muy lógico preguntarse si hay analogía entre esta distribución y la distribución normal que sigue la ley de Laplace-Gauss considerada en la teoría de errores accidentales.

En la realidad no ocurre así, sino que las diferencias son considerables ; la explicación reside en el hecho de que las condiciones necesarias para la existencia de una ley de distribución normal no son compatibles con la naturaleza de los problemas relativos a la manipulación de los precios. Estas condiciones son, en efecto, las siguientes :

a) Las causas de desigualdad son numerosas.

b) El efecto de cada una de ellas es independiente de los efectos de las demás.

c) El efecto de cada causa es pequeño frente a la suma de todos los efectos.

Para la distribución de los valores de x, o de una función de esta variable, tal como $\log x$, es seguro que no se realiza la condición *b*), puesto que existe un conjunto de causas, designado con el nombre de «fenómenos monetarios», que actúa sobre todos los precios. Por tanto, se debe renunciar a la ley normal, cuya ventaja está en permitir la descripción del conjunto x (población) por el solo conocimiento del eje de simetría (media) y de la desviación cuadrática media (desviación típica).

EDGEWORTH había considerado ya la posibilidad de referir el problema de los números índices a la teoría de los errores de observación y se había inclinado por la afirmativa, lo cual implicaba la posibilidad de recurrir a las fórmulas del cálculo de probabilidades. Como acabamos de ver, no era más que una opinión *a priori*, difícilmente sostenible, por los motivos que acabamos de indicar. Corresponde a LUCIEN MARCH el mérito de haber intentado por primera vez una comprobación experimental de las ideas de EDGEWORTH. Por las investigaciones ulteriores de M. OLLIVIER, sabemos que la observación demuestra la imposibilidad de asimilar los cocientes de precios x a los valores de una variable aleatoria sometida a la ley de Laplace-Gauss.

Parece deducirse de estas múltiples investigaciones que, en todo caso, la media geométrica es más apta que la media aritmética para describir el movimiento conjunto de los precios. De hecho son numerosos los índices de tipo geométrico establecidos por los servicios oficiales de estadística. Como ya hemos indicado, la elección entre los diversos tipos de medias presenta interés únicamente cuando las variaciones de los precios son de cierta amplitud y las relaciones x presentan por ello una fuerte dispersión.

II. LOS INDICES DEL GASTO

En la concepción estadística de los números índices se trata el problema de manera abstracta, sin tener en cuenta el carácter particular del conjunto numérico que se describe ni la significación económica de los elementos que la componen. Por consecuencia, toda concepción estadística excluye en particular la posibilidad de recurrir a una ponderación ligada al papel económico de los diversos artículos considerados para el cálculo del índice. Completamente distinta es la concepción basada en el gasto, que se resume así :

El método del gasto consiste en determinar las variaciones de un cierto conjunto de gastos y definir el índice I para una situación dada, en relación con la situación 0, por el cociente de los dos gastos correspondientes.

$$I = \frac{D}{D_0} = \frac{\Sigma (q p)}{\Sigma (q p_0)}$$

En esta fórmula, los términos q designan las cantidades utilizadas durante el intervalo de tiempo tomado como unidad. Esta expresión equivale a una media aritmética ponderada, ya que se puede escribir:

$$\Sigma (q\,p) = \Sigma \left(q\,p_0 \frac{p}{p_0} \right) = (q\,p_0 \cdot x)$$

Designando por α, α', . . ., los cocientes $\frac{q\,p_0}{\Sigma\, q\,p_0}$, se verifica:

$$\alpha + \alpha' + \ldots = \Sigma \alpha = 1$$

y se deduce:

$$\mathrm{I} = \Sigma\, \alpha\, x$$

La determinación del índice del gasto se encuentra, pues, resuelta, siempre que las cantidades q que intervienen en la composición del gasto no sufran sino variaciones despreciables al separarse de la situación que sirve como base. En la realidad, esta condición sólo se cumple excepcionalmente, de manera que se plantea un problema delicado en cuanto a la determinación de los términos q, o, lo que es lo mismo, de los coeficientes de ponderación α. Este problema se ha resuelto durante mucho tiempo en forma empírica, ajustándose sobre todo a un afán de simplicidad; pero los trabajos efectuados desde hace un cuarto de siglo han permitido profundizar en el problema recurriendo sistemáticamente a condiciones fijadas *a priori*. De estas condiciones mencionaremos sólo las más utilizadas corrientemente.

1.° *Condición de identidad.*—El índice es igual a la unidad cuando la situación que se estudia se confunde con la situación base; esta condición puede expresarse simbólicamente por la fórmula:

$$\mathrm{I}_{0,0} = 1$$

2.° *Condición de reversibilidad.*—El índice de la situación 0 respecto a la situación 1, tomada ésta como base de referencia, debe ser igual a la inversa del índice que representa la situación 1 respecto a la situación 0.

Este criterio tiene como expresión simbólica:

$$\mathrm{I}_{0,1} \times \mathrm{I}_{1,0} = 1$$

3.° *Condición circular.*—El índice de la situación 2 respecto a la situación 0 debe ser igual al producto del índice de la situación 1 respecto a la situación 0 por el índice de la situación 2 respecto a la situación 1. Este criterio se expresa simbólicamente de la manera siguiente:

$$\mathrm{I}_{0,2} = \mathrm{I}_{0,1} \times \mathrm{I}_{1,2}$$

4.° *Condición de homogeneidad.*—El valor del índice no debe modificarse por un cambio de las unidades de cantidad.

5.° *Condición de proporcionalidad.*—Si todas las relaciones de precios, x, que componen el índice tienen el mismo valor, el índice debe ser igual a este valor común. Esta condición puede expresarse así :

$$I(zP) = zI(P)$$

6.° *Condición de determinación.*—El índice no puede hacerse nulo, infinito o indeterminado.

Toda fórmula de índices de gastos puede valorarse estudiando a cuáles de estas condiciones satisface. Mr. FISHER ha efectuado así una clasificación de las fórmulas haciéndolas sufrir pruebas comparables a las que se utilizan en psicotecnia. En realidad, ninguna fórmula satisface a todas estas condiciones, ni siquiera la fórmula «ideal» sugerida por el autor de tales trabajos.

Las fórmulas que se utilizan más a menudo son las de LASPEYRES y PAASCHE :

a) La fórmula de LASPEYRES se calcula por medio de las cantidades correspondientes a la situación base ; tiene, pues, por expresión

$$L = \frac{\Sigma\, q_0 p_1}{\Sigma\, q_0 p_0}$$

b) El índice de PAASCHE se calcula, por el contrario, mediante las cantidades relativas a la situación 1 y es, por tanto,

$$P = \frac{\Sigma\, q_1 p_1}{\Sigma\, q_1 p_0}$$

La primera de estas dos fórmulas es de utilización más fácil, ya que las cantidades q_0 se conocen antes que las cantidades q_1 y están en general mejor determinadas que éstas en el momento de efectuar prácticamente los cálculos. Si bien los valores obtenidos con cada una de estas fórmulas no difieren considerablemente en las condiciones habituales de evolución de los precios, la desviación puede ser apreciable en los períodos de fluctuaciones monetarias fuertes o cuando las dos situaciones que se comparan son muy diferentes una de otra, ya se trate de comparaciones en el tiempo o de comparaciones en el espacio. Por esto algunos autores han sugerido fórmulas que dan resultados intermedios entre las de LASPEYRES y PAASCHE. Ha propuesto EDGE-

WORTH utilizar como cantidades las medias aritméticas simples de las cantidades q_0 y q_1; su fórmula tiene, pues, por expresión:

$$E = \frac{\Sigma (q_0 + q_1) p_1}{\Sigma (q_0 + q_1) p_0}.$$

La fórmula «ideal» de FISHER no es sino la media geométrica de los índices de LASPEYRES y PAASCHE, o sea

$$I = \sqrt{L \cdot P}$$

Aunque Mr. IRVING FISHER se ha guiado en sus trabajos por el deseo constante de apreciar el valor de los índices en relación con su uso en la ecuación general de los cambios, es decir, en la teoría monetaria, sus investigaciones, así como las de sus antecesores y sus continuadores, están muy impregnadas de empirismo o por lo menos de pragmatismo. Por valiosos que sean algunos de los criterios utilizados, se imponen poco al espíritu; y como ningún índice puede satisfacerlos todos, la elección entre las diversas fórmulas es un poco arbitraria.

Para limitarnos a un ejemplo, la condición de reversibilidad no constituye realmente más que un criterio abstracto, una simple creación del espíritu, ya que sabemos perfectamente, sobre todo a la luz de las concepciones bergsonianas, que el desarrollo de los fenómenos en el tiempo es irreversible; ¿para qué imponer entonces una condición que puede eliminar fórmulas de gran mérito? Se pueden, además, considerar otros criterios, como el que M. JACQUES RUEFF designa con el nombre de «criterio de indiferencia sobre la distribución de la demanda entre los diversos artículos del mercado». Una media aritmética ponderada sólo satisface esta condición cuando los coeficientes de ponderación, α, de los diversos artículos son proporcionales al valor de los productos cambiados en la unidad de tiempo, calculando este valor con los precios del período base.

III. EL INDICE MONETARIO

Como acabamos de ver, las dos concepciones precedentes se fundaban, bien sobre la hipótesis de la compensación de las causas de variación de los precios según la ley de los grandes números, bien sobre la consideración de un conjunto de gastos variables de una situación a otra.

La definición del índice monetario concebida por M. DIVISIA se basa en la ecuación general de los cambios, que establece una relación entre la cantidad de dinero en circulación y su velocidad media de circulación, por una parte, y los precios y las cantidades de bienes cambiadas, por otra. El índice así establecido abraza el conjunto de operaciones en que interviene directa o indirectamente el dinero.

Si designamos por Q el stock de dinero propiamente dicho y por r su velocidad media de circulación, por Q′ el stock de dinero bancario, es decir, el saldo de las cuentas corrientes acreedoras disponible para la emisión de cheques o las transferencias por giros, y por r' su velocidad media de circulación, la ecuación general de los cambios, que expresa la igualdad de las cantidades utilizadas en los cambios de mercancías y en las transferencias de dinero que son su contrapartida, se presenta bajo la forma :

$$Qr + Q'r' = \Sigma(qp)$$

En esta ecuación, que ha sido empleada por primera vez por I. FISHER, p designa el precio de un bien que es objeto de transacciones, y q la cantidad de este bien cambiada en la unidad de tiempo.

La expresión que figura en el primer miembro ha sido llamada por M. DIVISIA «funciones circulatorias» o simplemente «circulación». La forma condensada de la ecuación general de los cambios es, pues, representando la circulación por C :

$$C = \Sigma(qp)$$

Establecido esto, el conjunto de pagos $\Sigma(qp)$ puede considerarse en todo instante proporcional al producto de un índice del nivel general de precios, I, que M. DIVISIA califica de índice monetario, por un índice de cantidad, A, que representa la actividad de los cambios. Tendremos así, para el intervalo de tiempo tomado por unidad :

$$C = \Sigma qp = kAI$$

En lugar de considerar la aplicación de esta relación a un período de tiempo finito, M. DIVISIA la aplica a un período de tiempo infinitamente pequeño, para no hacer intervenir más que variaciones infinitamente pequeñas de todos los términos. Basta para esto diferenciar la ecuación precedente, lo que da :

$$\frac{dC}{C} = \frac{\Sigma(p\,dq)}{\Sigma(qp)} + \frac{\Sigma(q\,dp)}{\Sigma(qp)} = \frac{dA}{A} + \frac{dI}{I}$$

El primer término del segundo miembro representa la variación total de las cantidades cambiadas durante la unidad de tiempo. El segundo término representa el conjunto de las variaciones de los precios. La identificación de los términos referentes a las variaciones de las cantidades, por una parte, y a las variaciones de los precios, por otra, conduce a la definición de los índices A e I por medio de dos relaciones diferenciales homólogas, a saber :

$$\frac{d\,A}{A} = \frac{\Sigma\,(p\,d\,q)}{\Sigma\,(p\,q)}$$

$$\frac{d\,I}{I} = \frac{\Sigma\,(q\,d\,p)}{\Sigma\,(q\,p)}$$

Antes de abordar el examen de las propiedades esenciales de estos dos índices recíprocos debemos observar que la relación

$$\Sigma(qp) = k\,A\,I$$

ha sido considerada a menudo por los especialistas de la teoría de los números índices, los cuales la han llamado «condición de reversibilidad respecto a los factores». Sin embargo, a M. DIVISIA corresponde el mérito de haberla aplicado a un período de tiempo infinitamente pequeño y haber sacado así el mejor partido posible de la misma.

A. PROPIEDADES DEL INDICE MONETARIO.

De la definición dada para el índice monetario, I, resultan algunas propiedades que resumimos brevemente.

1.ª En un intervalo de tiempo suficientemente reducido para que los coeficientes q puedan ser considerados como constantes, el índice está definido por una media ponderada cuyos pesos son iguales a dichas cantidades q.

De otra forma : el índice monetario es una media de pesos variables, mientras que los números índices habitualmente utilizados emplean coeficientes invariables y generalmente arbitrarios.

Si I e I′ designan los valores del índice en dos instantes próximos, t y t', tales que las cantidades de bienes cambiadas durante la unidad de tiempo puedan considerarse constantes entre estas dos épocas, tendremos la relación

$$\frac{I'}{I} = \frac{\Sigma\,(q\,p')}{\Sigma\,(q\,p)} = \Sigma\left(\alpha\,\frac{p'}{p}\right)$$

designando α, como siempre, la proporción de los pagos referentes a cada bien dentro de la totalidad de los mismos, y $\frac{p'}{p}$ la relación de los precios de cada uno de estos bienes en los instantes t' y t.

Aunque partiendo de otro principio, el índice monetario así representado respondería, pues, a la definición clásica del índice de gasto, haciendo intervenir los precios de todos los bienes y servicios que han dado lugar a transacciones, y, por consecuencia, los precios al por menor y los salarios, tanto como los precios al por mayor, mientras que los índices más corrientes únicamente hacen intervenir los precios al por mayor o los precios al por menor. Los coeficientes de ponderación no son otra cosa que las cantidades de los diversos bienes cambiadas en la unidad de tiempo.

2.ª Definido el índice por una expresión que no es una diferencial total, es susceptible de tomar valores diferentes para un mismo sistema de valores de los precios y las cantidades; durante un intervalo de tiempo largo, el valor del índice en un instante cualquiera t, referido al valor básico correspondiente al instante inicial t_0, puede expresarse por una integral curvilínea a lo largo de las curvas representativas de los precios y cantidades en función del tiempo.

Resulta de esto que el valor del índice en un instante cualquiera t depende no sólo del valor de los términos en q y p en el instante inicial t_0 y en el instante considerado t, sino también de los valores tomados por estos términos en todo el intervalo de tiempo t_0, t.

Esta segunda propiedad hace aparecer la conexión que existe entre las condiciones económicas de una época y las de las épocas anteriores, conexión comparable a la que une los anillos de una cadena. Traduce la imposibilidad de efectuar la comparación entre los índices de precios de dos épocas alejadas sin pasar por períodos intermedios. Este es uno de los aspectos del principio de «continuidad histórica», aplicable a las ciencias sociales y en particular al dominio económico.

3.ª Para un intervalo de tiempo finito, el valor del índice se obtiene por el método de los eslabones, es decir, por descomposición del intervalo en subintervalos suficientemente pequeños para que pueda considerarse en ellos el índice monetario como una media aritmética ponderada. Este método de cálculo se simboliza por la ecuación

$$\frac{I}{I_0} = \frac{I_n}{I_0} = \frac{I_1}{I_0} \times \frac{I_2}{I_1} \times \dots \frac{I_n}{I_{n-1}}$$

4.ª El índice A de la actividad de las transacciones goza de propiedades análogas a las del índice monetario, con la diferencia de que se trata de un índice de cantidades que admite los precios como coeficientes.

B. INDICES PARCIALES DERIVADOS DEL INDICE MONETARIO.

1.° Es posible extender la ecuación que define el índice monetario a otros números índices, a los que daremos de manera general el nombre de «índices parciales».

Si se considera el conjunto de pagos $\Sigma(qp)$ que figuran en la ecuación general de los cambios, se puede, adoptando reglas suficientemente precisas, efectuar una subdivisión en el conjunto de estos pagos que abraza la totalidad de los fenómenos monetarios. Podemos, por ejemplo, distinguir en estos pagos los que son efectuados por los productores, los que son efectuados por los intermediarios y los que lo son por los consumidores; tal división no tiene nada de arbitraria, puesto que responde a las tres fases clásicas de la vida económica, a saber: la producción, la circulación y el consumo de las riquezas. Designando por

$$\Sigma_1(qp), \quad \Sigma_2(qp) \quad \text{y} \quad \Sigma_3(qp)$$

los pagos referentes a estos tres grupos de fenómenos, el conjunto antes considerado $\Sigma(qp)$ verifica la relación

$$\Sigma(qp) = \Sigma_1(qp) + \Sigma_2(qp) + \Sigma_3(qp)$$

de la cual se deduce la relación diferencial:

$$\Sigma(q\,dp) = \Sigma_1(q\,dp) + \Sigma_2(q\,dp) + \Sigma_3(q\,dp)$$

Si se caracteriza ahora cada uno de estos tres grupos de pagos por un índice especial y se define cada uno de los tres nuevos índices así obtenidos, I′, I″, I‴, por una relación idéntica a la que define el índice monetario, a saber:

$$\frac{d\,\mathrm{I}'}{\mathrm{I}'} = \frac{\Sigma_1(q\,dp)}{\Sigma_1(qp)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{I}''}{\mathrm{I}''} = \frac{\Sigma_2(q\,dp)}{\Sigma_2(qp)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{I}'''}{\mathrm{I}'''} = \frac{\Sigma_3(q\,dp)}{\Sigma_3(qp)}$$

existe en todo momento entre los valores del índice monetario y los de estos tres índices una relación que es consecuencia de las ecuaciones de definición y que se presenta en la forma

$$\frac{d\,\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = \alpha\frac{d\,\mathrm{I}'}{\mathrm{I}'} + \beta\frac{d\,\mathrm{I}''}{\mathrm{I}''} + \gamma\frac{d\,\mathrm{I}'''}{\mathrm{I}'''}$$

designando α, β, γ las proporciones que, en el momento considerado, representan los pagos relativos a cada uno de estos tres grupos en el conjunto de los pagos que intervienen en la definición del índice monetario, que satisfarán, por tanto, constantemente la relación

$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

Volveremos después sobre las propiedades y las aplicaciones de esta relación ; pero podemos ya señalar que a condición de mantenernos constantemente en el cuadro de los hechos observables, disponemos de la mayor amplitud para constituir otras subdivisiones entre los grupos de pagos considerados hasta el presente, haciendo corresponder a cada uno de los nuevos grupos $\Sigma_k(pq)$ un índice parcial I_k que responda a la definición general antes indicada :

$$\frac{d\,\mathrm{I}_k}{\mathrm{I}_k} = \frac{\Sigma_k(q\,d\,p)}{\Sigma_k(q\,p)}$$

Entre estos índices y el de grupo a partir del cual se han efectuado las nuevas subdivisiones existe una relación absolutamente idéntica a la que acaba de indicarse para el índice monetario en sus relaciones con los tres índices correspondientes a la consideración de los fenómenos de producción, circulación y consumo. Adoptando este método, se obtienen índices que entran en el campo de aplicación de la ecuación general de los cambios y están subordinados, por consiguiente, al valor del índice monetario ; de otra parte, por utilizarse la misma definición general, se pueden estudiar más cómodamente las propiedades de los índices así establecidos y apreciar el orden de magnitud de los errores cometidos cuando, a causa de las necesidades prácticas, se emplean ciertas fórmulas simplificadas.

En fin, siguiendo el camino de estas descomposiciones sucesivas del conjunto de los pagos, es posible analizar el mecanismo de los fenómenos económicos y apreciar numéricamente, por la variación de los índices, la influencia de las variaciones de unos grupos de precios sobre otros grupos. Se puede, por ejemplo, evaluar la repercusión de una variación de los salarios o del interés del dinero sobre el nivel de los precios de determinados bienes.

La noción del índice parcial permite así ampliar considerablemente el campo de aplicación de los números índices.

2.° Es posible, mediante ciertas hipótesis, encontrar relaciones simples entre un índice general y los índices parciales que se deducen del mismo por el procedimiento anteriormente expuesto; analizaremos sumariamente los diversos tipos de ecuaciones generales que corresponden a las hipótesis más simples.

a) *Ecuación general de las variaciones.*—La ecuación mencionada anteriormente,

$$\frac{dI}{I} = \alpha \frac{dI'}{I'} + \beta \frac{dI''}{I''} + \gamma \frac{dI'''}{I'''}$$

liga las variaciones infinitamente pequeñas de los tres índices parciales y del índice monetario. Puede aplicarse en primera aproximación a variaciones finitas expresadas, por ejemplo, en tanto por ciento de los valores alcanzados por los índices, o sea:

$$v = \alpha v' + \beta v'' + \gamma v''' + \ldots$$

pudiendo extenderse la aplicación a cualquier número de índices.

Esta ecuación, designada con el nombre de «ecuación general de las variaciones», no puede de momento aplicarse sin precauciones, ya que no conocemos el orden de magnitud del error cometido al pasar de variaciones infinitamente pequeñas a variaciones finitas. Por tanto, conviene transformar esta ecuación mediante ciertas hipótesis que permitan alcanzar formas más fácilmente utilizables en la práctica.

b) *Ecuación general logarítmica.*—Admitiendo que en el intervalo de tiempo considerado los coeficientes α, β, γ no sufran sino modificaciones inapreciables, la ecuación general de las variaciones se integra fácilmente y conduce a una nueva relación, designada con el nombre de «ecuación general logarítmica».

$$\log \frac{I}{I_0} = \alpha \log \frac{I'}{I'_0} + \beta \log \frac{I''}{I''_0} + \gamma \log \frac{I'''}{I'''_0}$$

El cálculo prueba que el error cometido sustituyendo la primera ecuación por ésta es tanto menor cuanto más reducida es la dispersión de los índices parciales del segundo miembro, porque entonces los coeficientes α, β, γ no sufren más que variaciones muy limitadas.

Ahora bien, la dispersión de los índices parciales será particularmente pequeña cuando éstos presenten ciertas relaciones de dependencia mutua tales que las variaciones de uno de ellos tengan como consecuencia variaciones de los otros, en general, del mismo sentido y de un orden de magnitud comparable; tal es el caso de los tres índices considerados al principio correspondientes a la producción, a la circulación y al consumo de las riquezas.

Llamando respectivamente a estos tres índices índice general de los precios de la producción, índice general de los precios al por mayor e índice general de los precios al por menor, sus valores I', I'', I''' permiten calcular en todo momento el valor del índice monetario por medio de la fórmula logarítmica

$$\log \frac{I}{I_0} = \alpha \log \frac{I'}{I'_0} + \beta \log \frac{I''}{I''_0} + \gamma \log \frac{I'''}{I'''_0}$$

El índice monetario queda así definido como una media geométrica ponderada de los tres índices generales de la producción, el comercio y el consumo.

La aplicación de la fórmula logarítmica puede extenderse a un período en el curso del cual los índices utilizados se desvíen mucho de sus valores iniciales, con la reserva de permanecer en el campo de aplicación de la hipótesis sobre la que reposa la fórmula (invariancia de los coeficientes α, β, γ).

c) *Ecuación general lineal.*—Supongamos ahora que las variaciones de los índices durante el período estudiado sean suficientemente pequeñas para que se pueda despreciar el cuadrado de la desviación entre la unidad y la relación del valor de los índices a su valor base. Esto equivale a despreciar los segundos términos del desarrollo de los logaritmos que intervienen en la fórmula, o sea a hacer

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= 1 + v \\ \frac{I'}{I'_0} &= 1 + v' \\ \frac{I''}{I''_0} &= 1 + v'' \\ \frac{I'''}{I'''_0} &= 1 + v''' \end{aligned} \right.$$

con lo cual la ecuación se convierte en:

$$\log(1+v)=\alpha \log(1+v')+\beta \log(1+v'')+\gamma \log(1+v'''),$$

y según la hipótesis hecha se reduce a

$$v=\alpha v'+\beta v''+\gamma v'''.$$

Esta no es sino la relación deducida de la ecuación general de las variaciones, pero ahora estamos en situación de poder apreciar el orden de magnitud del error cometido utilizando esta relación simplificada, que puede ponerse en la forma

$$\frac{I}{I_0}=\alpha\frac{I'}{I'_0}+\beta\frac{I''}{I''_0}+\gamma\frac{I'''}{I'''_0}$$

A esta nueva ecuación la llamaremos «ecuación general lineal»; es la utilizada más a menudo en la práctica y no difiere de la expresión de una media aritmética ponderada.

d) Es posible llegar a esta última ecuación partiendo de otra hipótesis.

En efecto, si se supone que las cantidades q que figuran en los pagos concurrentes a la definición de los índices varían proporcionalmente a su valor básico, q_0, es fácil ver que la relación general que define los índices permite llegar a una ecuación absolutamente idéntica a la ecuación general lineal, en la cual α, β, γ representan los valores de estos coeficientes en el instante inicial t_0.

Esta hipótesis se aplica preferentemente a la descomposición tripartita del grupo de pagos relativo a la producción en general; esta distribución tripartita, que desempeña un papel extraordinariamente importante en la práctica, distingue entre las cargas soportadas por la producción, las que se destinan a remunerar al capital, las que corresponden al pago de los salarios y las que se refieren a los pagos de materias primas y servicios distintos del capital y la mano de obra. En un intervalo de tiempo poco extenso, se puede admitir en primera aproximación que las cantidades referentes a estos tres grupos varían en la misma relación, lo que permite aplicar la relación lineal.

Existe así en todo momento una relación lineal y homogénea entre el índice general de los precios de la producción, por una parte, y, por otra, el índice general del interés del dinero, el índice del nivel de los salarios y el índice general de los precios de las materias primas.

Cada uno de estos tres índices parciales puede a su vez descomponerse en varios elementos, si se quiere analizar con mayor detalle el juego de los fenómenos de la producción ; la descomposición del índice general de los precios de las materias primas permite, en particular, llegar a la noción de parámetros económicos tales que permitan reemplazar, desde el punto de vista de los precios, un grupo de mercancías o de servicios por una sola categoría de bienes. Por otra parte, una descomposición tripartita análoga se aplica igualmente a un grupo de empresas o a una empresa individual, para estudiar la repercusión de las variaciones propias de los diversos medios de producción sobre el precio de coste.

En resumen, la fórmula general lineal puede aplicarse tanto en el caso en que los precios no sufran en su conjunto más que variaciones muy débiles, limitadas, por ejemplo, a un 20 por 100 de sus valores iniciales, como durante un período en el cual las modificaciones de la situación económica son lo suficientemente restringidas para que las cantidades de los bienes y servicios intercambiados varíen en una proporción comparable.

Si se traspasan los límites del campo de aplicación de estas dos hipótesis, es necesario proceder de vez en cuando a una revisión de los coeficientes que entran en la fórmula lineal y proseguir la determinación de los índices aplicando esta fórmula a partir de los nuevos valores de la base, según el método de eslabones.

IV. LOS ÍNDICES FUNCIONALES

En lo que precede no se han considerado las conexiones que existen entre los precios de los bienes y las cantidades utilizadas ; ahora bien, sabemos que en el dominio del consumo los precios y las cantidades están relacionados por las ecuaciones de equilibrio, que expresan que el consumidor distribuye su renta entre los diversos bienes en forma de obtener el máximo de satisfacción. Partiendo de esta base y continuando los trabajos de KONÜS, HABERLER y PIGOU, algunos autores se han esforzado por definir índices fundados sobre la noción de equivalencia que sirve de soporte a la teoría de las elecciones ; calificaremos estos índices como «funcionales» y estudiaremos brevemente sus propiedades.

A) EL PRINCIPIO.

1.° Si consideramos, para la situación 0, un complejo de bienes $q_0, q'_0, q''_0, \ldots$, que designamos por $\overline{Q}_0$, la satisfacción o utilidad total que procura a su poseedor está representada por el valor de la función de utilidad total:

$$U_0 = U(q_0, q'_0, q''_0, \ldots\ldots) = U(\overline{Q}_0).$$

Si los precios, en esta situación, son $p_0, p'_0, p''_0, \ldots\ldots$, el gasto correspondiente a la misma quedará definido por la expresión:

$$r_0 = q_0 p_0 + q'_0 p'_0 + q''_0 p''_0 + \ldots\ldots = \Sigma(q_0 p_0)$$

Para la situación 1, los precios y las cantidades se convierten, respectivamente, en $p_1, p'_1, p''_1, \ldots\ldots$ y $q_1, q'_1, q''_1, \ldots\ldots$; estas últimas cantidades definen un nuevo complejo $\overline{Q}_1$.

Los complejos $\overline{Q}_0$, $\overline{Q}_1$ se llaman equivalentes cuando procuran a su poseedor la misma utilidad total, es decir, cuando se cumple la condición:

$$U_1 = U(q_1, q'_1, q''_1, \ldots\ldots) = U_0.$$

Si, cumplida esta condición, consideramos el gasto para la situación 1, a saber:

$$r_1 = \Sigma(q_1 p_1),$$

el índice de precios fundado sobre la noción de equivalencia quedará definido por la relación

$$I = \frac{r_1}{r_0}$$

Dicho de otra forma, este índice no es más que la relación de dos gastos correspondientes a complejos equivalentes. Su valor depende, naturalmente, del nivel de satisfacción que procuran los gastos considerados.

El simple hecho de invocar esta noción de equivalencia y recurrir en consecuencia a la función de utilidad, demuestra el carácter abstracto del índice así concebido; permite prever también las dificultades que se presentarán inevitablemente al aplicar esta definición a elementos extraídos de las observaciones concretas.

2.° Se impone hacer algunas observaciones antes de abordar la determinación teórica del índice I.

a) Desde el momento en que recurrimos a la función de utilidad U, admitimos que se trata de un consumidor determinado, puesto que la función de utilidad presenta un carácter estrictamente individual; para las aplicaciones prácticas, sin embargo, no es ilícito considerar grupos de consumidores, siempre que éstos pertenezcan a un medio social bien definido y se puedan considerar como de gustos y costumbres bastante análogos.

Por otra parte, la noción de equivalencia implica evidentemente la constancia de la función U al pasar de la situación 0 a la situación 1. Para las comparaciones en el tiempo es, pues, necesario considerar sólo un período bastante limitado; para las comparaciones en el espacio, que se han podido abordar con este método, se imponen mayores restricciones.

b) Casi todos los autores que han tratado este problema han admitido explícita o implícitamente que los precios correspondientes a una situación determinada constituyen datos para los consumidores, los cuales reparten sus compras teniendo en cuenta el precio de cada artículo, sus necesidades o sus gustos y, naturalmente, la importancia de su renta. Aunque esta independencia de los precios frente a las cantidades restringe la generalidad del problema, creemos que, salvo en algún caso particular, puede admitirse sin dificultad; se trata, en efecto, de un problema de consumo en el que sólo intervienen grupos de consumidores cuyas compras no influyen sobre la situación de los precios, que resulta del conjunto del mercado.

En estas condiciones, las cantidades q que corresponden a una situación dada quedan determinadas:

—En primer lugar, por la ecuación del gasto

$$r = \Sigma(pq).$$

—En segundo lugar, por las relaciones que expresan que la función U es máxima.

Esta última condición reviste la forma siguiente: si designamos por u, u', u'', ..., las derivadas parciales de la función U respecto a cada una de las cantidades q, q', q'', ..., a saber:

$$\frac{\partial U}{\partial q} = u, \quad \frac{\partial U}{\partial q'} = u', \quad \frac{\partial U}{\partial q''} = u'' \ldots$$

los precios son respectivamente proporcionales a estas derivadas parciales, y se tiene, en consecuencia,

$$\frac{u}{p} = \frac{u'}{p'} = \frac{u''}{p''} = \ldots$$

Estas (n-1) ecuaciones, unidas a la ecuación del gasto, definen cada una de las cantidades q en función de los precios p y del gasto total r.

Las cantidades así determinadas constituyen un complejo $\overline{Q}$ designado por el nombre de «complejo adaptado» a la situación considerada.

Para una situación dada en que los precios son invariables, cada cantidad q depende de la renta r; la función que expresa esta dependencia es la llamada función de ENGEL:

$$q = e(r) .$$

Considerando el gasto r como un parámetro, las diversas cantidades q que intervienen en el complejo, para una situación dada, definen en un espacio de n dimensiones una curva llamada por R. FRISCH «sendero de expansión». Cada punto del sendero corresponde a un valor dado de r, así como a un valor bien definido, U, del índice de satisfacción, que caracteriza el nivel de la superficie de indiferencia que pasa por el punto considerado $\overline{Q}$, mientras que este último caracteriza el nivel de aprovisionamiento.

B) LOS LIMITES DEL INDICE FUNCIONAL.

1.° Si consideramos los complejos $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}_1$ consumidos efectivamente en las situaciones 0 y 1, estos complejos determinan niveles de aprovisionamiento U_0 y U_1 que son en general diferentes; es decir,

$$U_0 = U(\overline{Q}_0) \quad ,, \quad U_1 = U(\overline{Q}_1) .$$

A cada uno de estos niveles de aprovisionamiento corresponde, pues, un índice. Designaremos cada uno de estos índices por I_0 e I_1, respectivamente, calculados para la situación 1 respecto a la situación básica 0. Como los índices así definidos satisfacen a la condición de reversibilidad, sus inversas, es decir,

$$I'_0 = \frac{1}{I_0} \quad , \quad I'_1 = \frac{1}{I_1} ,$$

representan los índices de la situación 0 respecto a la situación 1 para los niveles de aprovisionamiento U_0 y U_1, respectivamente.

2.° Como hemos observado, el cálculo de los índices de la forma :

$$I = \frac{r_1}{r_0}$$

presenta en la práctica grandes dificultades, ya que no existe la posibilidad de apreciar exactamente la medida en que una renta r que responde a la situación 1 permite obtener el nivel de aprovisionamiento U_0 que se lograría con la renta r_0 para la situación 0. Sin embargo, es posible asignar a los índices I_0 e I_1, definidos anteriormente, ciertos límites, que han sido el objeto particular de los trabajos de KONÜS ; expondremos sucintamente el razonamiento que este autor fué el primero en emplear :

a) Supongamos que un consumidor, que dispone en la situación 0 de una renta r_0, la cual le permite adquirir el complejo $\bar{Q}_0$ adaptado a esta situación, dispone en la situación 1 de una renta r'_1 que le garantizaría la adquisición del mismo complejo. En realidad, este consumidor elige el complejo $\bar{Q}_1$ adaptado a la situación 1. El nivel de aprovisionamiento U_1 alcanzado con el complejo $\bar{Q}_1$ es, pues, superior al nivel U_0, puesto que cada uno de estos niveles responde a un óptimo para la situación a que se aplica (precios y renta).

Esta proposición puede expresarse de otra manera : si se admite, como hemos hecho anteriormente, que para una situación dada el nivel de aprovisionamiento varía en el mismo sentido que la renta, podemos decir igualmente que el gasto r_1, necesario para mantener en la situación 1 el nivel de aprovisionamiento U_0 obtenido con la renta r_0 en la situación 0, es inferior a la renta r'_1 que permitiría conservar el complejo $\bar{Q}_0$.

Llegamos así a la desigualdad :

$$r_1 = \Sigma p_1 q_1 < r'_1 = \Sigma q_0 p_1 \; .$$

Dividiendo los dos miembros de esta desigualdad por r_0, es decir, por $\Sigma q_0 p_0$, tenemos :

$$\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0} = I_0 < \frac{\Sigma q_0 p_1}{\Sigma q_0 p_0} = L_0 \; .$$

En esta desigualdad, L_0 designa el índice de LASPEYRES, es decir, el índice del gasto de la situación 1 respecto a la situación 0, obtenido utilizando como coeficientes de ponderación las cantidades q_0 consumidas en el curso de la situación 0.

Podemos, en definitiva, enunciar el principio siguiente:

El índice de precios de la situación 1 respecto a la situación 0, calculado sobre la base del nivel de aprovisionamiento de esta misma situación 0, es inferior al índice del gasto calculado tomando como coeficientes de ponderación las cantidades consumidas en el curso de la situación 0 (índice de LASPEYRES).

Este resultado es de gran importancia práctica, pues demuestra que toda renta que garantiza la conservación de cierto consumo permite en realidad elevar constantemente el nivel de aprovisionamiento gracias a las facultades de adaptación que resultan de la libre elección de los consumidores. Este principio constituye también un argumento más en favor de la revisión periódica de los coeficientes de ponderación para el cálculo de los índices del gasto.

b) Por un razonamiento análogo al que precede, es fácil probar que el índice I_1, calculado como relación de las rentas r_1 y r'_0 que permiten obtener la misma satisfacción total U_1 que con el complejo $\overline{Q}_1$ efectivamente consumido en la situación 1, es superior al índice del gasto de la situación 1 respecto a la situación 0 calculado tomando como coeficientes de ponderación las cantidades q_1 (índice de PAASCHE, L_1).

Para ello, basta señalar:

En primer lugar, que el índice I_1 calculado respecto a la base 0 es la inversa del índice I'_1 calculado respecto a la base 1, a saber:

$$I_1 = \frac{r_1}{r_0} = \frac{1}{I'_1}$$

En segundo lugar, que el índice I'_1, calculado tomando la situación 1 como base y referido al nivel de aprovisionamiento U_1 de esta situación, es inferior al índice de LASPEYRES calculado a partir de la situación 1, o sea:

$$I'_1 = \frac{r_0}{r_1} = \frac{\Sigma\, q_0 p_0}{\Sigma\, q_1 p_1} < L'_1 = \frac{\Sigma\, q_1 p_0}{\Sigma\, q_1 p_1}$$

de donde se deduce, por fin:

$$I_1 = \frac{1}{I'_1} > L_1 = \frac{1}{L'_1}$$

c) Teniendo en cuenta la existencia de los dos límites precedentes, comprobamos en definitiva que entre los niveles de aprovisionamiento definidos por los consumos efectivos de las situaciones 0 y 1 existe siempre un nivel de aprovisionamiento intermedio para el cual el índice funcional se halla comprendido entre los índices de LASPEYRES y de PAASCHE de la situación 1 respecto a la situación 0.

Además de lo señalado respecto al alcance que debe atribuirse en la práctica a la existencia de estos límites, principalmente del límite superior L_0, cabe observar que si dos situaciones 0 y 1 son tales que los índices de LASPEYRES, L_0, y de PAASCHE, L_1, sólo presentan una débil separación, puede deducirse que el índice funcional tiene un valor aproximadamente igual a cada uno de estos límites, siempre con la reserva de que los niveles de aprovisionamiento definidos para cada uno de los complejos Q_0 y $\bar{Q}_1$ puedan considerarse como sensiblemente equivalentes. Toda la dificultad reside evidentemente en la apreciación de esta equivalencia, pero es ya muy valioso contar con una indicación sobre los límites dentro de los cuales está verosímilmente el índice que queremos determinar.

Aunque no se ha hecho otra cosa que desplazar la dificultad, ya que recae en la apreciación del nivel de aprovisionamiento en lugar de implicar la determinación de las cantidades, podemos en definitiva considerar la teoría precedente como un progreso.

C) CALCULO APROXIMADO DEL INDICE FUNCIONAL.

Entre los métodos imaginados para calcular un valor aproximado del índice precedentemente definido, a partir de las observaciones estadísticas, nos limitaremos al examen del método sugerido por míster BOWLEY y al de Mr. R. FRISCH llamado método del «doble gasto».

1.° *Método de Bowley.*—Partiendo de una situación 0 y de un complejo adaptado $\bar{Q}_0$ definido por un gasto r_0, BOWLEY considera el complejo $\bar{Q}_1$ equivalente a $\bar{Q}_0$ sobre el sendero de expansión correspondiente a la situación 1. Si r'_1 designa el gasto referente a $\bar{Q}'_1$, el índice está definido por la relación :

$$I = \frac{r'_1}{r_0}$$

Este índice queda determinado para el nivel de aprovisionamiento

U_0 común a los complejos $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}'_1$. El complejo adaptado a la situación 1 se designa como de ordinario por $\overline{Q}_1$.

Aplicando el desarrollo de TAYLOR limitado a los elementos de segundo orden y anulando la variación de la utilidad total experimentada por el consumidor cuando pasa del complejo $\overline{Q}_0$ al $\overline{Q}_1$ y después a $\overline{Q}'_1$, es posible llegar a la siguiente expresión de I:

$$I = \frac{\Sigma\, p_1 (q_0 + \lambda\, q_1)}{\Sigma\, p_0 (q_0 + \lambda\, q_1)}$$

En esta fórmula, λ designa la relación de las utilidades finales del dinero en $\overline{Q}'_1$ y en $\overline{Q}_1$ respectivamente, a saber:

$$\lambda = \frac{w'_1}{w_1}$$

La fórmula a que llega BOWLEY puede relacionarse con el índice de EDGEWORTH:

$$E = \frac{\Sigma\, p_1 (q_0 + q_1)}{\Sigma\, p_0 (q_0 + q_1)}$$

Sin embargo, el valor aproximado I no debe confundirse con el índice de EDGEWORTH, pues la influencia del coeficiente de ponderación λ no es de ninguna manera despreciable. Como lo ha hecho notar R. FRISCH, si las cantidades q_1 que figuran en el complejo $\overline{Q}_1$ son más elevadas por término medio que las cantidades correspondientes q_0 de $\overline{Q}_0$, su importancia aumentará todavía a causa de la ponderación, ya que en este caso el coeficiente $\lambda = \frac{w'_1}{w_1}$ será superior a la unidad.

En la fórmula de EDGEWORTH, por el contrario, la importancia de estos términos se atenúa.

La fórmula aproximada ofrece además el inconveniente de no conducir a una determinación correcta cuando los dos complejos $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}_1$ son equivalentes.

En fin, como consecuencia del procedimiento seguido en su deducción, la fórmula no es aplicable más que en el caso de dos complejos muy poco diferentes entre sí.

2.° *Método del «doble gasto».*—El método del «doble gasto», imaginado por R. FRISCH, constituye en realidad un criterio que permite apreciar la equivalencia de los dos complejos $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}_1$.

Si designamos por r_0 y r_1 los gastos correspondientes a la adquisición de los complejos $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}_1$, a saber:

$$r_0 = \Sigma(p_0 q_0) \qquad r_1 = \Sigma(p_1 q_1) \, ,$$

la equivalencia de estos dos complejos se expresa aproximadamente por la ecuación

$$w_1 r_1 = w_0 r_0 \, .$$

En esta ecuación, w_0 y w_1 designan la utilidad final del dinero en $\overline{Q}_0$ y $\overline{Q}_1$, respectivamente.

La condición de equivalencia puede entonces escribirse dentro de los límites de aproximación indicados para el valor aproximado de BOWLEY

$$\Sigma(p_1 q_1)\, \Sigma(p_0 q_1) = \Sigma(p_0 q_0)\, \Sigma(p_1 q_0) \, .$$

Los productos que figuran en cada uno de los miembros de esta ecuación han sido llamados por R. FRISCH «doble gasto» a lo largo de cada uno de los senderos 0 y 1. La noción abstracta de equivalencia se encuentra reducida así a la igualdad de elementos accesibles a la observación.

Este notable resultado está atenuado en la práctica por el hecho de no conocerse en realidad más que puntos aislados sobre cada una de las curvas de ENGEL que definen los senderos 0 y 1. Es, pues, necesario proceder a la interpolación para obtener pares equivalentes. Además, sólo se poseen datos para un número limitado de artículos. Pero estas dificultades no son inherentes al método, sino que se deben a la naturaleza del problema.

Dos observaciones deben hacerse respecto al método expuesto:

a) Es fácil establecer que la igualación del «doble gasto» a lo largo de dos senderos supone definir la equivalencia por la igualdad de los índices de cantidades, q_1 y q_0, calculados ya por la fórmula de LASPEYRES (coeficientes de ponderación iguales a p_0), ya por la de PAASCHE (coeficientes de ponderación iguales a p_1), a los índices q'_1 y q'_0, respectivamente, obtenidos permutando las situaciones 0 y 1.

b) El índice obtenido por el método del doble gasto se confunde con la fórmula ideal de FISHER cuando se supone que los senderos de expansión 0 y 1 están constituídos por rectas que parten del origen. En este caso, tanto las cantidades q_0 como las q_1 varían en la misma relación cuando se modifica la renta.

D) Asimilacion del indice funcional a un indice del tipo Divisia.

Acabamos de ver las dificultades que se presentan en el cálculo del índice funcional ; es, pues, muy importante poderlo relacionar con un índice de tipo ya conocido. Este es el objeto del presente párrafo.

1.° La teoría del complejo adaptado nos prueba que el nivel de aprovisionamiento U de un consumidor queda definido por su renta en dinero r y el vector-precio $\overline{P}$, cuyas componentes son los precios de los diversos bienes. Recordemos que las cantidades q que definen el complejo adaptado $\overline{Q}$ satisfacen :

a) En primer lugar, a la ecuación del gasto $r=\Sigma qp$.

b) En segundo lugar, a las n-1 ecuaciones de equilibrio

$$\frac{u_1}{p_1}=\frac{u_2}{p_2}=\ldots=\frac{u_i}{p_i}=\ldots=\frac{u_n}{p_n}=w$$

En estas ecuaciones, u_i designa el grado final de utilidad $\frac{\partial u}{\partial q_i}$ del bien de lugar i, y w el grado final de utilidad del dinero.

La resolución de estas ecuaciones respecto a las cantidades, en función de la renta y de los precios, permite definir el nivel de aprovisionamiento U correspondiente a la situación $(r, \overline{P})$. Podemos considerar, por tanto, U como una función de la renta y de los precios, a saber :

$$U=\Phi(r,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_i,\ \ldots\ldots,\ p_n)=\Phi(r,\ \overline{P})\ .$$

Esta nueva representación de la utilidad total permite definir :

α) El grado final de utilidad de la renta en dinero $\frac{\partial u}{\partial r}$, que no es sino el valor común w de las relaciones de equilibrio $\frac{u}{p}$, o sea :

$$\frac{\partial u}{\partial p_i}=\frac{\partial \Phi}{\partial r}=w$$

β) Las derivadas $\frac{\partial u}{\partial p}$ de la utilidad total respecto a los precios, o sea:

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \varphi_i$$

Se prueba fácilmente que w es positiva, ya que, siendo los precios constantes, el nivel de aprovisionamiento aumenta con la renta; y que las derivadas parciales φ son todas negativas, ya que, siendo la renta constante, el nivel de aprovisionamiento disminuye cuando el precio de una mercancía aumenta, permaneciendo invariables los precios de las demás.

En fin, con esta concepción pueden establecerse nuevas ecuaciones de equilibrio, llamadas «ecuaciones tangenciales de equilibrio» por oposición a las relaciones antes citadas, que llamamos «ecuaciones puntuales».

Las ecuaciones tangenciales son las siguientes:

$$\frac{\varphi_1}{q_1} = \frac{\varphi_2}{q_2} = \ldots = \frac{\varphi_i}{q_i} = \ldots = \frac{\varphi_n}{q_n} = -w$$

Estas relaciones permiten calcular las componentes q del complejo adaptado, en función de la renta r y de los precios $\overline{P}$, cuando se conoce el «campo de elección» del consumidor, es decir, las superficies de indiferencia definidas en forma puntual:

$$U(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_i, \ldots\ldots, q_n) = U(\overline{Q}) = \text{cte.}$$

o en forma tangencial, mediante una transformación por polares recíprocas

$$\Phi(r, p_1, p_2, \ldots\ldots p_i, \ldots\ldots p_n) = \Phi(r, \overline{P}) = \text{cte.}$$

2.° Estando caracterizada la situación básica por el vector-precio $\overline{P}_0$, definimos el índice de precios z mediante la relación

$$U(r, \overline{P}) = U(r, z\overline{P}_0),$$

o también:

$$\Phi(r, \overline{P}) = \Phi(r, z\overline{P}_0).$$

Es fácil ver que este índice z pertenece al tipo funcional; en efecto, si designamos por q' los componentes del complejo $\overline{Q}'$ adaptado a la situación $(r, z\overline{P}_0)$, equivalente por definición al complejo $\overline{Q}$ adaptado a la situación $(r, \overline{P})$, tenemos:

$$r = \Sigma qp = \Sigma q' z p_0 = z \Sigma q' p_0$$

y, por consiguiente,

$$z = \frac{\Sigma q p}{\Sigma q' p_0}$$

Siendo equivalentes los complejos $\overline{Q}$ y $\overline{Q}'$, z es el índice funcional de los precios $(\overline{P})$ respecto a los precios básicos $\overline{P}_0$ para el nivel de aprovisionamiento $U(r, \overline{P})$.

En la expresión $\Phi(r, \overline{P})$, la renta y los precios constituyen un conjunto de $n+1$ variables homogéneas; se puede, por tanto, reducir éste a las n variables $\frac{p}{r}$, o sea:

$$U = \Phi(r, \overline{P}) = \Psi\left(\frac{\overline{P}}{r}\right)$$

El índice z satisface así a la ecuación:

$$U = \Psi\left(\frac{\overline{P}}{r}\right) + \Psi\left(z\frac{\overline{P}_0}{r}\right)$$

Bajo esta última forma, el nivel de aprovisionamiento no depende más que de la relación $\frac{z}{r}$; puede admitirse en último análisis que el nivel de aprovisionamiento es una función de la «renta real» ρ, cociente de la renta nominal por el índice de precios z, o sea:

$$\begin{cases} \rho = \dfrac{r}{z} \\ U = \Omega(\rho) \end{cases}$$

Esta nueva representación del nivel de aprovisionamiento permite definir el grado final de utilidad de la renta real ω, derivada de U respecto a ρ:

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{d\,\Omega(\rho)}{d\rho} = \omega(\rho)$$

3.° Con la ayuda de las relaciones y definiciones precedentes, podemos obtener las dos relaciones que siguen:

$$w' = \frac{\omega}{z}$$

$$\frac{dz}{z} = \left(1 - \frac{w}{w'}\right)\frac{dr}{r} + \frac{w}{w'}\Sigma\alpha\frac{dp}{p}$$

designando w el grado final de utilidad de la renta nominal en la situación $(r, \overline{P})$ y w' el valor de esta función en la situación $(r, z\overline{P}_0)$.

Puesto que los dos complejos Q, Q′ adaptados a estas dos situaciones son equivalentes, es perfectamente legítimo admitir que w y w' tienen valores infinitamente próximos; esto equivale a suponer que el grado final de utilidad de la renta permanece invariable cuando la renta nominal y el índice de los precios no cambian; se trata, pues, de una hipótesis perfectamente plausible.

En estas condiciones, haremos

$$\frac{w}{w'} = 1 + \varepsilon$$

y tenemos también:

$$w = (1 + \varepsilon)\frac{\omega}{z}$$

$$\frac{dz}{z} = (1 + \varepsilon)\Sigma\alpha\frac{dp}{p} - \varepsilon\frac{dr}{r}$$

En estas dos fórmulas, ε es una función que no se anula idénticamente más que para formas particulares de la función de utilidad, pero en todos los casos es prácticamente despreciable.

Las dos relaciones generales anteriores pueden, pues, reemplazarse por las fórmulas aproximadas siguientes:

$$w = \frac{\omega}{z}$$

$$\frac{dz}{z} = \Sigma\frac{\alpha \cdot dp}{p}$$

4.° Podemos determinar fácilmente la condición para que el índice z sea rigurosamente independiente de r.

Para demostrar que z es prácticamente independiente de r, hemos admitido que el grado final de utilidad de la renta en dinero w conservaba el mismo valor para $\overline{Q}$ y $\overline{Q}'$. Sería, pues, necesario, dentro del mayor rigor, que w fuese constante sobre una misma superficie de indiferencia; esta condición puede expresarse como sigue:

a) Una ecuación de equilibrio en coordenadas puntuales se presenta en la forma:

$$\frac{u}{p} = w$$

o bien:

$$qu = wpq\ .$$

Sumando las relaciones así conseguidas para las diversas mercancías, se obtiene:

$$\Sigma(qu) = \Sigma(wqp) = w\Sigma(qp) = wr \quad ;$$

siendo r constante cuando se pasa de $\overline{Q}$ a $\overline{Q}'$, es necesario, para que w no cambie, que la expresión del primer miembro $\Sigma(qu)$ sea constante sobre la superficie de indiferencia que pasa por $\overline{Q}$.

b) Recurriendo a las ecuaciones tangenciales de equilibrio se encuentra como expresión de la condición buscada:

$$\Sigma(p\varphi) = -\ wr = \text{cte.}$$

La independencia de z frente a r puede expresarse, por tanto, mediante una de las condiciones:

$$\Sigma\, q \frac{\partial u}{\partial q} = \text{cte.}$$

$$\Sigma\, p \frac{\partial u}{\partial p} = \text{cte.}$$

5.° *Determinación del índice z.* Conforme se ha definido, el índice de precios z, utilizado para el cálculo de la renta real de un consumidor, es válido únicamente para este consumidor. Esta restricción se aplica a todo índice fundado en la noción de equivalencia.

Nos proponemos probar, sin embargo, que mediante algunas precauciones referentes a la consideración de grupos homogéneos en el seno de la población estudiada, es posible conducir este tipo de índice a los utilizados corrientemente. Con este objeto estudiaremos la posibilidad del cálculo de z por asimilación a un índice del tipo de Divisia:

a) Para cada grupo de consumidores en el seno de la población estudiada, definimos un índice z que satisface la ecuación :

$$\frac{d\,z_i}{z_i} = \frac{\Sigma_i\,(q\,d\,p)}{\Sigma_i\,(q\,p)} = \Sigma_i\,\alpha\left(\frac{d\,p}{p}\right)$$

El cálculo de este índice es análogo al de un índice del gasto de eslabones con coeficientes de ponderación variables de un eslabón a otro, ya que sabemos que así se calculan los índices del tipo Divisia.

b) Cuando consideramos el conjunto de los consumidores que constituyen la población estudiada, podemos definir el índice general z relativo a este conjunto mediante las fórmulas que permiten el paso de los índices parciales z_i al índice general z.

La renta total

$$r = \Sigma(qp)$$

es, en efecto, la suma de las rentas r_i referentes a cada grupo de consumidores, o sea :

$$r = \Sigma(qp) = \Sigma(r_i) = \Sigma(q_i p_i)\ .$$

Si representamos por α_i la proporción de las rentas r_i en la renta total r, sabemos que el índice general z se define en función de los índices parciales por la ecuación :

$$\frac{d\,z}{z} = \Sigma\left(\alpha_i\,\frac{d\,z_i}{z_i}\right)$$

El cálculo implica, sin duda, el conocimiento de la ley de distribución de las rentas, que permite determinar la parte de la renta total imputable a cada grupo de consumidores. Hemos admitido además implícitamente que la renta es la misma para todos los consumidores de un grupo dado.

El cálculo del índice z considerado de esta forma se presta a los métodos de aproximación que se han indicado a propósito de los índices parciales y que, según los casos, conducen a la consideración de medias aritméticas o geométricas ponderadas, siendo variables de un eslabón a otro los coeficientes de ponderación, como hemos indicado precedentemente.

Se pone así de relieve la ventaja de recurrir para z a un índice del tipo Divisia, lo que permite eludir los inconvenientes inherentes a los métodos particulares de cálculo de los índices fundados sobre la noción de equivalencia, métodos que son a la vez complicados y aproximados.

El índice Divisia ofrece además la ventaja de introducir directamente las cantidades consumidas. Se presta, pues, fácilmente a las modificaciones que se producen entre un eslabón y otro y de una manera general goza de los beneficios de la elasticidad de adaptación que caracteriza a los índices de eslabones.

c) Para cada eslabón del índice se plantea, como para todo índice del gasto, la cuestión de los coeficientes de ponderación.

En realidad, las situaciones inicial y final del eslabón difieren muy poco, de manera que los problemas no presentan la importancia que revisten en el cálculo de índices del gasto referentes a situaciones netamente distintas; sin embargo, si se desea un rigor absoluto, la cuestión se plantea en términos análogos. Creemos que puede resolverse de la manera siguiente:

α) En general, las cantidades referentes a la situación básica son las únicas conocidas; por tanto, sólo puede utilizarse la fórmula de Laspeyres para calcular el valor del índice en la extremidad del eslabón respecto a su origen considerado como situación básica.

β) El valor así determinado debe rectificarse cuando se conocen las cantidades o coeficientes de ponderación relativos a los extremos del eslabón. Es posible entonces recurrir a una de las fórmulas sugeridas por los especialistas de la elaboración de índices; tales son la fórmula de Edgeworth y la fórmula ideal de Fisher. La cuestión no presenta aquí sino un interés secundario, puesto que las diferencias de una extremidad a otra del eslabón son débiles.

γ) Se podría también admitir una hipótesis sobre la ley de variación de las cantidades desde el origen hasta la extremidad del eslabón, inspirándose en las observaciones hechas sobre los eslabones anteriores. Mediante esta hipótesis se podrían asignar *a priori* valores medios al coeficiente de ponderación que figura en el índice del gasto.

De todas maneras, y siempre que no lo impidan las dificultades materiales del cálculo, por otra parte muy reducidas gracias a la mecanización de las organizaciones oficiales de estadística, es posible emplear el índice Divisia para definir un índice general de los consumidores en función de los índices parciales referentes a cada capa de la población. El índice así calculado no es sino el índice general de los precios al por menor que, combinado con el índice general de los precios al por mayor y el índice general de los precios de la producción, permite alcanzar en definitiva el índice monetario, que abraza la totalidad de las operaciones que entran en el campo de aplicación de la ecuación general de los cambios.

V. LAS COMPARACIONES EN EL ESPACIO

Con la excepción del índice monetario, que se refiere concretamente a las variaciones de los precios y las cantidades en el tiempo, los conceptos analizados en las páginas precedentes se aplican en principio lo mismo a las comparaciones en el espacio que a las comparaciones en el tiempo. Importa sin embargo señalar algunas dificultades particulares de las comparaciones en el espacio.

Para apreciar las dificultades de este problema basta recordar que todo índice funcional se define por la relación $\frac{r_1}{r_0}$ de dos gastos considerados como equivalentes en las dos situaciones 0 y 1. Ahora bien, la equivalencia de dos gastos implica recurrir a las superficies de indiferencia y circunscribe las aplicaciones, si no a un solo consumidor, como lo exigiría la interpretación rigurosa de la teoría, por lo menos a un grupo homogéneo de consumidores para los cuales pueda admitirse la identidad de gustos y costumbres. Cuando se trata de consumidores que habitan ciudades, regiones o países diferentes, la equivalencia de dos presupuestos es particularmente difícil de expresar, puesto que no es posible admitir la identidad de gustos y costumbres sobre la que reposa la consideración de las superficies de indiferencia ; por tanto, es necesario no comparar más que consumidores que habiten regiones muy poco distintas en cuanto a los gustos y a las costumbres para que el principio de equivalencia pueda invocarse con validez.

Nos limitaremos a mencionar, en primer lugar, los métodos utilizados por STAEHLE con el nombre de «Indice de desemejanza» y en segundo lugar por R. FRISCH, que recurre al «método de la flexibilidad».

1.° *Indice de desemejanza.*—Designemos por $\overline{Q}$ un complejo elegido arbitrariamente $(q, q', q'', \ldots)$ y por $\overline{Q}_0$ un complejo $(q_0, q'_0, q''_0, \ldots)$ adaptado a la situación 0. Si las cantidades q fuesen rigurosamente proporcionales a las cantidades correspondientes q_0, es decir, si los dos complejos presentasen una composición análoga, serían llamados «semejantes». En este caso los cocientes $\frac{q}{q_0}$ serían todos iguales a un valor común llamado «relación de semejanza».

Cuando los dos complejos, sin ser rigurosamente semejantes, tienen una composición casi análoga, las desviaciones entre los cocientes $\frac{q}{q_0}$ y su valor medio son débiles.

Las desviaciones en cuestión tienen por expresión

$$\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_0 q} - 1$$

El índice de desemejanza de STAEHLE es la media ponderada de los valores absolutos de estas desviaciones, siendo los coeficientes de ponderación los elementos correspondientes $p_0 q_0$ del gasto relativo a la situación básica.

Este «índice de desemejanza» se define por la fórmula

$$D = \frac{\Sigma p_0 q_0 \left(\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_0 q} - 1 \right)}{\Sigma p_0 q_0}$$

o, lo que es lo mismo,

$$D = \Sigma \left(\frac{p_0 q}{\Sigma p_0 q} - \frac{p_0 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \right)$$

Es fácil comprobar que con esta definición se tiene siempre

$$0 \leq D \leq 2$$

Si consideramos un punto fijo $\overline{Q}_0$ del sendero 0 y otro punto $\overline{Q}$ del mismo sendero, la desemejanza es nula cuando $\overline{Q}$ se confunde con $\overline{Q}_0$.

Si, partiendo de $\overline{Q}_0$, se desplaza $\overline{Q}$ en un sentido o en otro sobre el sendero, resulta de las observaciones efectuadas por STAEHLE que el índice D aumenta de una manera prácticamente uniforme. Se deduce que, a lo largo de un sendero, el mínimo de D, que es cero, caracteriza la posición correspondiente a la renta que permite la adquisición del complejo $\overline{Q}_0$.

Análoga comprobación puede hacerse cuando el punto $\overline{Q}$ se desplaza sobre otro sendero, el sendero 1, por ejemplo; STAEHLE ha podido notar la existencia de un mínimo de D para una posición más o menos bien definida de $\overline{Q}$, pero este mínimo, en lugar de ser nulo como en el caso precedente, es una cantidad positiva. Designando por $\overline{Q}_1$ la posición correspondiente a este mínimo de D, admite STAEHLE que el complejo $\overline{Q}_1$ puede considerarse como equivalente al complejo $\overline{Q}_0$. El valor que toma en esta posición la desemejanza caracteriza la divergencia irreductible de los gustos y de la forma de vida que existe entre las residencias 0 y 1.

Desplazando el punto de origen $\overline{Q}_0$ sobre el sendero 0, se establece una correspondencia unívoca entre los puntos de los dos senderos 0 y 1. Esta ligazón puede traducirse gráficamente en un diagrama de tres dimensiones, sobre las que se llevan, por una parte las rentas r_0 y r_1 correspondientes a cada uno de los puntos de los senderos 0 y 1, y, por otra parte, el valor del índice de desemejanza. El lugar geométrico de los puntos representativos del mínimo de D constituye lo que Staehle llama «valle de desemejanza». La consideración de este «valle» permite determinar los pares de combinaciones equivalentes r_0 y r_1.

En realidad, el «valle» de que hablamos, que tiene una definición puramente empírica, permite determinar con una aproximación admisible la renta equivalente a una renta dada.

2.° *Método de la flexibilidad.*—El método de la flexibilidad se basa en la observación siguiente:

Cuando se quiere expresar la equivalencia de dos complejos, es a veces difícil hacerlo sirviéndose directamente de las funciones de utilidad $U=U(Q)$. Cabe emplear entonces magnitudes que varían en el mismo sentido que estas utilidades y que, miradas como funciones uniformes de estas utilidades, pueden ser consideradas como indicadores del nivel de aprovisionamiento, y más fácilmente accesibles a la observación.

Para aplicar este principio R. Frisch recurre a la flexibilidad del dinero, definida a partir del grado final de utilidad de la renta en dinero, que se considera en las ecuaciones generales del equilibrio definidoras del complejo adaptado a una situación dada. Esta magnitud ofrece la ventaja de no estar ligada a las unidades de medida y, por consecuencia, de conservar su sentido cuando se pasa de una superficie de indiferencia a otra. La consideración de la flexibilidad permite así escapar a la principal dificultad que se presenta para las comparaciones en el espacio.

VI. RESUMEN

Los números índices tienen por objeto describir los conjuntos de precios y cantidades de manera que pueda seguirse su evolución y efectuarse comparaciones en el tiempo o en el espacio.

Nacidos de preocupaciones utilitarias, estos índices han dado origen, desde hace medio siglo, a numerosos trabajos teóricos y prácticos cuyo interés ha aumentado con la importancia de los fenómenos monetarios observables en todos los países desde 1914.

Las diversas fórmulas de índices propuestas por los especialistas de la cuestión se condensan en cuatro grupos principales:

1.° *Los índices estadísticos*, que no son sino medias, establecidas generalmente a partir de las relaciones, $\frac{p}{p_0}$, de los precios de los diversos artículos en la situación considerada a los precios de los mismos artículos en la situación de referencia. Los índices calculados por medio de esta concepción no tienen en cuenta el papel económico de las distintas mercancías; reposan exclusivamente en el principio de compensación y su empleo racional exige el estudio de la distribución de los cocientes $\frac{p}{p_0}$ alrededor de su media. De los estudios realizados resulta:

a) Que la distribución de los cocientes $\frac{p}{p_0}$ es asimétrica, mientras que la de sus logaritmos es simétrica y presenta el aspecto general de la curva campaniforme obtenida para la distribución de los errores de observación.

b) Que no es posible, sin embargo, ni desde el punto de vista racional ni desde el punto de vista de la conformidad con las observaciones realizadas, incluir el problema de los números índices en la teoría de los errores de observación.

Para una débil dispersión de los cocientes $\frac{p}{p_0}$, tiene poca importancia el tipo de media elegido, pero si la dispersión es notable, se tendrá que examinar el problema más detenidamente, y tanto el razonamiento como la observación conducen a suponer que la media geométrica es más apropiada que cualquier otra para describir el movimiento de conjunto de los precios.

2.° *Los índices del gasto,* al revés que los precedentes, tienen en cuenta la importancia económica de cada mercancía y se presentan como medias ponderadas que se basan en las cantidades que intervienen en los fenómenos estudiados (producción, cambios, consumo).

La determinación de las cantidades introducidas en estos índices plantea, sin embargo, problemas muy delicados, que en general se han resuelto tan sólo por procedimientos empíricos, imponiendo a las fórmulas elegidas condiciones *a priori* sobre las cuales no se ha conseguido todavía un acuerdo unánime.

De hecho las fórmulas utilizadas más a menudo son :

a) La fórmula de Laspeyres, que hace intervenir las cantidades referentes a la situación básica ;

b) La fórmula de Paasche, que hace intervenir las cantidades referentes a la situación que se estudia ;

c) La fórmula de Edgeworth, que hace intervenir la media aritmética de las cantidades consideradas en las dos fórmulas anteriores ;

d) La fórmula «ideal» de Fisher, que es la media geométrica de las fórmulas de Laspeyres y Paasche.

3.° *El índice monetario,* sugerido por Divisia, se aplica al conjunto de transacciones que intervienen en la ecuación general de los cambios ; se basa en la condición de reversibilidad respecto a los factores, que permite reemplazar la suma de los productos parciales constitutivos del conjunto de los pagos por el producto de un índice de precios y un índice de cantidades, índices que son desde luego recíprocos.

La originalidad del método propuesto por M. Divisia consiste en la aplicación de la ecuación general de los cambios a las variaciones infinitamente pequeñas ; el índice monetario y el índice correlativo de la actividad de los cambios quedan definidos entonces por ecuaciones diferenciales ; gozan de propiedades homólogas que se pueden resumir en la forma siguiente :

a) Para dos situaciones próximas, los dos índices considerados son asimilables a índices del gasto ;

b) Para dos situaciones alejadas, cada uno de estos índices puede calcularse por medio del método de los eslabones.

Resulta, en fin, de la definición adoptada por M. Divisia, que el índice monetario y el índice de la actividad de las transacciones se pueden asimilar a integrales curvilíneas y que, por consiguiente, el valor de cada uno de estos índices, para la situación dada, depende no sólo de la relación entre esta situación y la de referencia, sino también de todas las situaciones intermedias. Este resultado fundamental no es más que un aspecto particular del principio general de la continuidad histórica.

El índice monetario y el índice de la actividad de los cambios son susceptibles de engendrar índices parciales, definidos por fórmulas análogas, pero que se aplican a conjuntos de pagos más limitados que los de la ecuación general de los cambios. Este método de subdivisión permite utilizar fórmulas aproximadas (medias geométricas o aritméticas ponderadas) cuando se cumplen prácticamente ciertas condiciones.

4.° *El índice funcional* se basa en la comparación, para dos situaciones distintas, de los gastos que permiten la adquisición de conjuntos de bienes, o complejos, susceptibles de procurar la misma satisfacción a su poseedor. Los índices así definidos ofrecen la particularidad de no ser válidos más que para un consumidor determinado ; su extensión a grupos de consumidores obliga a limitarse a poblaciones homogéneas en cuanto a la renta y al medio social.

Por su definición misma, los índices funcionales sólo se prestan a cálculos aproximados, ya mediante la consideración de los límites entre los cuales queda comprendido su valor, ya por métodos de aproximación como el del doble gasto, ideado por R. FRISCH.

Sin embargo, es posible conducir la noción del índice funcional a la del índice monetario concebido por DIVISIA, considerando sólo situaciones infinitamente próximas. Esta asimilación parece permitir la simplificación del cálculo práctico de los índices funcionales y ofrece también la ventaja de relacionar estos índices con otros de tipo ya conocido.

Parece, en definitiva, que el problema de los números índices no presenta solución rigurosa cuando se intenta comparar dos situaciones bastante alejadas una de otra ; esto explica la diversidad de conceptos y métodos de cálculo. Si se intenta, por el contrario, comparar situaciones próximas, no es dudoso que el índice del tipo sugerido por DIVISIA constituye la solución racional del problema. Por este camino es preciso, en nuestra opinión, orientar el cálculo práctico de los índices, aunque ha de contarse con la necesidad de utilizar un importante material estadístico ; dificultad ésta que se atenuará ciertamente en el porvenir a causa de la mecanización creciente de los servicios oficiales de estadística.

Debemos insistir, como final, sobre el alcance práctico de los estudios referentes a los números índices. Si antes de 1914, e incluso en algunos países hasta una época más reciente, las fluctuaciones monetarias quedaban limitadas por márgenes de variación estrechos, la actualidad es muy distinta y la amplitud de las variaciones registradas nos debe hacer muy exigentes en cuanto a la definición de la fórmula de cálculo de los números índices. Resulta de múltiples observaciones que en el caso de fluctuaciones grandes de los precios, éstos presentan fuerte dispersión ; ahora bien, sabemos que si esto ocurre la aplicación de distintas fórmulas de índices a los mismos datos estadísticos puede conducir a resultados muy diferentes. Se estima, por ejemplo, que para los índices de precios que podrían calcularse en Francia para el año 1944 respecto al 1938, las diferencias obtenidas adoptando ponderaciones distintas alcanzarían fácilmente el 15 %. Esto explica el interés que se concede a una definición y un cálculo correcto de los números índices.

RENÉ ROY

(Traducción del francés por Angel Anós.)